Université Joseph Fourier
L3, DKMat357 **Algèbre2**

Devoir à la maison n°4
à rendre avant le 14 décembre 2007

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Pour tout $x \in E$, on définit $E_x = \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$, et $I_x = \{P \in K[X] \mid x \in \operatorname{Ker} P(u)\}$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que I_x est un idéal non nul de $K[X]$. On note ν_x son générateur unitaire. Montrer que ν_x divise le polynôme minimal μ_u de u.

2. Pour quels x a–t–on $\deg \nu_x = 1$?

3. Comparer le degré de ν_x et la dimension de E_x.

4. Un exemple numérique: E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont une base est $B = (a, b, c)$, et u est l'endomorphisme défini par sa matrice M dans la base B:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme ν_a. En déduire le polynôme minimal de u.

5. Soient x, y dans E.

a) Montrer que ν_{x+y} divise le produit $\nu_x \nu_y$.

b) On suppose que ν_x et ν_y sont premiers entre eux. Montrer que $\nu_{x+y} = \nu_x \nu_y$ (remarquer que $\nu_{-y} = \nu_y$).

6. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que ν_x soit égal à μ_u (on utilisera la factorisation de μ_u dans $K[X]$).

7. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.