Master1, mathématiques
Algèbre 1

Devoir à la maison n° 3
à rendre la semaine du 6 janvier 2004

1. Soit le polynôme $P(X) = X^4 - X^2 - 1$ de $\mathbb{F}_3[X]$.

a) Montrer que P est irréductible et déterminer son ordre.

b) Le polynôme P est–il irréductible dans $\mathbb{F}_9[X]$?

On note $\mathbb{F}_{81}$ le corps $\mathbb{F}_3[X]/(P)$, α la classe de X. Ainsi $\alpha^4 - \alpha^2 - 1 = 0$.

c) Déterminer une base normale de $\mathbb{F}_{81}$ sur $\mathbb{F}_3$.

d) Donner le polynôme minimal de α^6 sur $\mathbb{F}_3$.

e) L'élément α est–il un carré dans $\mathbb{F}_{81}$?

f) On pose $Q(X) = P(X^2)$. Montrer que Q n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{81}$, ni dans le corps à 27 éléments. Factoriser Q en produit d'irréductibles sur $\mathbb{F}_3$.

2. Soient $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, et $n \geq 1$ un entier premier à q.

a) On note K le corps de décomposition du polynôme $X^n - 1$ sur $\mathbb{F}_q$. Montrer que $X^n - 1$ a toutes ses racines distinctes dans K.

L'ensemble des racines de $X^n - 1$ est un sous–groupe cyclique de $K^\times$. Pour chaque entier d divisant n, on note $\Phi_d(X)$ le polynôme produit des $X - \zeta$ où ζ parcourt les $\phi(d)$ racines primitives d^{emes} de 1 dans K.

b) Justifier l'identité $X^n - 1 = \Pi_{d|n}\Phi_d(X)$. Montrer que $\Phi_n(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, où p est la caractéristique de $\mathbb{F}_q$.

On veut étudier la décomposition de $\Phi_n(X)$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Pour cela on note P l'un de ces facteurs irréductibles, et s son degré. On désigne par r l'ordre de q dans le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

c) En considérant un corps de rupture k de P, montrer que r divise l'entier s.

d) En considérant le sous–corps de k formé des racines du polynôme $X^{q^r} - X$, conclure que $s = r$.

e) Donner la factorisation du polynôme $X^9 - 1$ sur $\mathbb{F}_2$ et sur $\mathbb{F}_7$. Donner le nombre et les degrés des facteurs irréductibles de Φ_9 sur $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_{17}$.

******