Université Joseph Fourier
L3, DKMat357 **Algèbre2**

Devoir à la maison n°3
à rendre avant le 22 novembre 2007

Exercice I

On note A l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{m}{5^n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A est un sous–anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$.

2. Déterminer le groupe multiplicatif $A^{\times}$.

3. Soit I un idéal de A non réduit à $\{0\}$.

a) Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
b) Montrer qu'il existe k entier non nul et premier à 5 tel que $I \cap \mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$.
c) Montrer que $I = kA$.
d) Trouver un anneau isomorphe au quotient A/I.

4. Montrer que l'anneau A est principal et déterminer ses éléments irréductibles, aux inversibles près.

Exercice II

Dans ce qui suit p et n désignent des entiers ≥ 2.

1. Soient K un corps infini, et E un K–espace vectoriel. Montrer, par récurrence sur p, que la réunion de p sous–espaces vectoriels qui sont chacun distinct de E, n'est pas tout E.

2. Application: soient $a_1, \ldots, a_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, tous non nuls. En prenant pour E le dual de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui ne contient aucun des a_i.