Université Joseph Fourier
Licence de mathématiques
Algèbre 1 Mat352

Devoir à la maison n° 3
à rendre la semaine du 20 novembre 2006

Exercice 1

Soit p un nombre premier impair.

1. Quel est l'ordre dans $\mathbb{F}_p^\times$ d'une racine du polynôme X^2+1 de $\mathbb{F}_p[X]$?
On suppose désormais que $4 \mid p-3$.

2. Montrer que X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

3. Construire un corps F de cardinal p^2.

4. Le polynôme X^2+1 est–il irréductible dans $F[X]$?

Exercice 2

Soit $A = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que A est un sous-anneau *commutatif* de $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Soit $I = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in A \mid 7 \text{ divise } a \right\}$.

a) Montrer que I est un idéal de A. Donner une partie finie de A qui engendre l'idéal I.

b) Soit φ l'application de A dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ qui, à $\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, fait correspondre $\overline{a}$, la classe de a modulo 7. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux. Déterminer son noyau et son image.

c) L'idéal I est–il maximal?

3. Soit ψ le morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[X]$ dans A défini par

$$\psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i .$$

a) Déterminer le noyau de ψ.

b) Trouver un polynôme Q de $\mathbb{Z}[X]$ tel que l'anneau A soit isomorphe au quotient $\mathbb{Z}[X]/(Q)$. L'anneau A est–il intègre?