Université Joseph Fourier
Licence de mathématiques
Algèbre 1 L352

Devoir à la maison n° 3
à rendre la semaine du 21 novembre 2005

Exercice 1

On note $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{Q}, \text{ il existe } n \in \mathbb{N}, 10^n x \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous–anneau de $\mathbb{Q}$ et que $\mathbb{Z}$ est un sous–anneau de $\mathbb{D}$.

2. A–t–on $-1/50 \in \mathbb{D}^\times$? Déterminer le groupe multiplicatif $\mathbb{D}^\times$.

3. Soit I un idéal de $\mathbb{D}$ non réduit à $\{0\}$.

a) Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, puis qu'il existe un entier strictement positif k tel que $I \cap \mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$.

b) Montrer que I est l'idéal $k\mathbb{D}$ de $\mathbb{D}$ (l'anneau $\mathbb{D}$ est donc principal).

c) Montrer que l'entier k est premier avec 10.

d) Les anneaux quotient $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}/I$ sont-ils isomorphes? Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{D}$.

4. Déterminer un système de représentants des éléments irréductibles de $\mathbb{D}$, modulo les inversibles. Donner la factorisation du décimal $315 \cdot 10^{-5}$ dans ce système (c'est–à–dire son écriture comme produit d'irréductibles du système par un inversible).

5. *(question indépendante de 3. et 4.)* Établir que l'anneau $\mathbb{D}$ est euclidien (on se ramènera à utiliser la division euclidienne dans les entiers). Écrire la division euclidienne dans $\mathbb{D}$ de $315 \cdot 10^{-5}$ par 120.

Exercice 2

On note p un nombre premier impair et on considère l'anneau quotient $A = \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + X + 1)$.

1. a) Quel est le cardinal de A?

b) Montrer qu'il existe une unique valeur de p pour laquelle le polynôme $Q = X^2 + X + 1$ est un carré dans $\mathbb{F}_p[X]$.

2. On prend $p = 3$.

a) Factoriser Q dans $\mathbb{F}_3[X]$. L'anneau A est-il intègre?

b) Montrer que A possède un unique idéal maximal.

c) Construire un morphisme surjectif de A sur $\mathbb{F}_3$.

d) L'anneau A est–il isomorphe à $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$? à $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?

3. On suppose $p \geq 5$.

a) Montrer que Q divise $X^3 - 1$. Si $a \in \mathbb{F}_p$ est racine de Q, quel est l'ordre de a dans $\mathbb{F}_p^\times$?

b) Montrer que $Q = X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ si et seulement si $p \equiv 2 \bmod 3$.

c) À quelle condition sur p l'anneau A est–il un corps?

4. *(question facultative)* On suppose $p \equiv 1 \bmod 3$.
Montrer que A possède exactement deux idéaux maximaux, que l'on décrira. Montrer que A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$.

******