

Devoir à la maison n°2
à rendre avant le 19 octobre 2007

Exercice I

1. Si n est pair, montrer que le groupe symétrique \mathfrak{S}_n n'est pas isomorphe à un sous-groupe du groupe alterné \mathfrak{A}_{n+1} .
2. Montrer que le groupe symétrique \mathfrak{S}_5 n'est pas isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{A}_6 (*indication*: considérer les éléments d'ordre 6 de ces 2 groupes).
3. Si $n \geq 2$, construire un morphisme injectif de \mathfrak{S}_n dans \mathfrak{A}_{n+2} .
4. Expliciter un sous-groupe de \mathfrak{A}_5 isomorphe à \mathfrak{S}_3 .
5. (*facultatif*) Combien y a-t-il de tels sous-groupes dans \mathfrak{A}_5 ?

Exercice II

Soit p un nombre premier. On note M_p l'entier $2^p - 1$, et q un diviseur premier de M_p .

1. Montrer que $q - 1$ est multiple de $2p$ (*indication*: on raisonnera dans le groupe des inversibles modulo un entier convenable).
2. Application: montrer, sans le calculer, que le nombre M_{23} n'est pas premier.
