Université Joseph Fourier
L3, DKMat355–**Algèbre1**

Devoir à la maison n°1
à rendre la semaine du 5 octobre 2007

I Soit $n \geq 3$ un entier. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des n points du plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ dont les affixes sont les n racines n-ièmes de l'unité. On considère l'ensemble $D_n = D$ des isométries vectorielles g de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $g(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$.

a) Montrer que D est un groupe pour la composition. (Les groupes D_n sont appelés *groupes diédraux*.)

Dans la suite on s'autorise à ne pas noter explicitement le symbole $\circ$ de la composition. Ainsi gg' désignera $g \circ g'$.

b) Justifier que D a au plus $2n$ éléments.

c) Vérifier que r, la rotation d'angle $2\pi/n$, et s, la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox, sont deux éléments de D.

d) Montrer que $\{r, s\}$ engendre D qui a cardinal $2n$. Le groupe D est–il abélien?

e) On pose $H = < r >$. Montrer que $D \setminus H$ est la classe sH. Décrire ses éléments géométriquement et donner leur ordre.

f) En écrivant les éléments de D sous la forme r^k ou sr^k, avec $k \in \mathbb{Z}$, calculer la composée $g'g$ sous cette même forme (g, g' quelconques dans D).

g) Donner les classes de conjugaison des rotations de D. Quel est le centre de D?

h) (*facultatif)* Donner les classes de conjugaison des éléments de $D \setminus H$.

II Soit p un nombre premier impair. Dans cet exercice on classifie les groupes de cardinal $2p$ à isomorphisme près.

1. Cette question rassemble des résultats préliminaires qui seront utilisés dans la suite. *Sa rédaction est facultative.*

a) Montrer que tout groupe de cardinal pair possède un élément d'ordre 2 (remarquer qu'à tout x tel que $x^2 \neq e$, on peut associer la *paire* $\{x, x^{-1}\}$).

b) Soit G un groupe dans lequel tout élément x vérifie $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

c) Soit $f\colon G \to H$ un morphisme de groupes. Si $x \in G$, montrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.

Dans la suite on note G un groupe de cardinal $2p$. D'après 1.a), G possède un élément x d'ordre 2.

T.S.V.P.

2. On suppose ici que G est abélien.

a) En considérant le groupe quotient $G/ <x>$, montrer avec 1.c) que G possède un élément y d'ordre p ou $2p$.

b) On suppose que l'ordre de y est p. Quel est l'ordre de xy?

c) Conclure que G est forcément cyclique.

3. On suppose G non abélien. On va montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_p (cf. I).

a) Montrer avec 1.b) que G possède un élément y d'ordre p.

b) On note H le sous–groupe engendré par y. Pourquoi H est–il distingué?

c) On pose $z = xy^k$, où k est un entier fixé. Montrer que la classe de z dans G/H a pour ordre 2. En déduire avec 1.c) que l'ordre de z est 2.

d) Montrer les identités : $xyx^{-1} = y^{-1}$, $xy^k = y^{-k}x$ $(k \in \mathbb{Z})$.

e) En utilisant le fait (à justifier) que tout élément de G s'écrit de manière unique y^k ou xy^k, pour un $k \in \{0, \cdots, p-1\}$, conclure à l'isomorphisme souhaité.

*****