UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER Année 2005/2006

Unité d'enseignement de mathématiques L32

Devoir à la maison N.1

à rendre la semaine du 3 octobre

Les résultats doivent être soigneusement justifiés. La qualité de la rédaction est un élément déterminant de l'appréciation du raisonnement.

Exercice 1

Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ? Est-il engendré par un nombre fini d'éléments ?

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est la classification à isomorphisme près des groupes à 6 éléments.

1. Montrer que le groupe S_3 des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est un groupe à 6 éléments non abélien.

Soit $(G, .)$ un groupe ayant 6 éléments. On note e_G l'élément neutre de G.

On suppose dans un premier temps que G n'est pas abélien.

2. Montrer que les éléments de G différents de e_G ne peuvent pas être tous d'ordre 2.

3. En déduire que G possède un élément d'ordre 3.

On choisit un élément x de G d'ordre 3. On note H le sous-groupe de G engendré par x. Le groupe H est donc de cardinal 3. On choisit un élément y de G qui n'est pas dans H.

4. Montrer que les parties H et yH sont disjointes et que leur réunion est G. En déduire que H est distingué dans G.

5. Montrer que la paire $\{x, y\}$ engendre G.

6. Quel est l'ordre de yxy^{-1} ? Montrer que $yxy^{-1} = x^2$.

7. Montrer que $y^2 \in H$, puis que $y^2 = e_G$.

8. En déduire que G est isomorphe au groupe S_3 (on pourra utiliser les tables des lois de groupe).

On revient au cas général.

9. En étudiant le cas des groupes abéliens, déterminer le nombre de groupes à 6 éléments à isomorphisme près.