Cours MAT302

Partie I : Séries

Odile Garotta,

sur la base du polycopié de Romain Joly, *septembre 2021*

Chapitre 1 : Introduction aux séries

1 Motivation

1.1 Le paradoxe de Zénon d'Élée

Dans le paradoxe de Zénon d'Élée (V^e avant JC), un caillou est lancé sur un arbre et parcourt la moitié de la distance, puis la moitié de la moitié restante, puis la moitié de ce qui reste... Il semble ainsi ne jamais arriver à destination car il lui faut franchir une infinité d'étapes et chacune lui demande un temps non nul.

Essayons de résoudre ce paradoxe. Mettons que pour parcourir la distance d, il faut un temps t. Pour parcourir la moitié de la distance, il faut un temps $t/2$. Pour parcourir la moitié du reste, il faudra un temps $t/4$ et il restera $d/4$ à parcourir. Puis pour parcourir la moitié de la distance restante, il faudra un temps $t/8$ et il restera $d/8$ à parcourir. . . Donc à l'étape n, il restera certes encore $d/2^n$ de distance qu'il faudra $t/2^n$ à franchir, mais on n'a attendu que

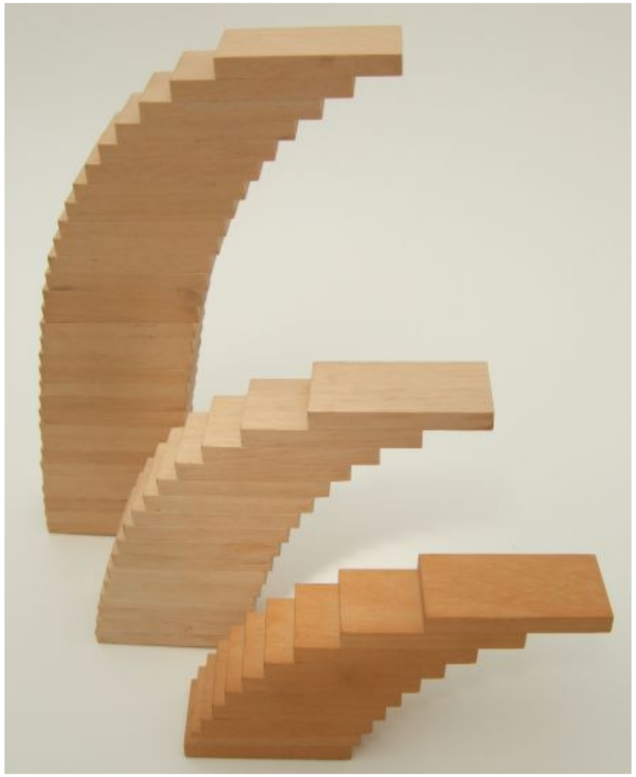
$$\frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^n} = t - \frac{t}{2^n}$$

et donc c'est normal que le caillou n'ait pas encore atteint l'arbre. Au passage, il semble que l'on puisse écrire carrément, pour $t = 1$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1 \tag{1.1}$$

avec une somme infinie. Le paradoxe vient du fait que cette somme, bien qu'infinie, ait une *valeur* finie. Même s'il y a une infinité d'étapes, on n'a pas encore passé plus qu'un temps 1 à observer la scène. Mais ici, nous n'avons pas été très rigoureux en écrivant (1.1) : quel sens donner à ces « $\dots$ » et à une valeur pour cette somme infinie ?

1.2 La série harmonique



Piles de dominos, extraites du site « How round is your circle » par John Bryant et Chris Sangwin.

Dans l'exemple précédent, nous additionnons une infinité de termes, mais ceux-ci sont de plus en plus petits et tendent vers 0. Est-ce que cela suffit à faire que la somme soit finie ? Regardons maintenant une pile de dominos (de longueur disons 2 unités) que nous penchons pour la faire avancer le plus possible. Le domino le plus haut, afin de ne pas tomber, ne doit pas être avancé de plus de 1. Si nous avançons de 1 le domino en-dessous, les deux dominos basculeront.

En fait, si on l'avance de d, l'isobarycentre des deux dominos doit être au-dessus de la pile, ce qui s'écrit

$$(2-d)+(2-d-1) \ \geq \ d+(d+1) \ .$$

Autrement dit il faut que $d \leq 1/2$. Puis un calcul similaire, montre que le troisième domino ne peut pas être avancé de plus de $1/3$ et par récurrence, le $n-$ième ne peut pas être avancé de plus de $1/n$.

Jusqu'où peut-on aller, c'est-à-dire que peut-on atteindre avec

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n} \ ?$$

En fait, la réponse est qu'on peut aller jusqu'à aussi loin de l'on veut !

En effet, prenons $n = 2^p$, on regroupe les termes par paquets

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n} = 1 &+ \frac{1}{2} \\
&+ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\
&+ \frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8} \\
&+ \frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16} \\
&+ \ldots+\frac{1}{2^p}\ .
\end{aligned}
$$

Pour $j \geq 1$, le paquet $1/(2^{j-1}+1)+\ldots+1/2^j$ contient 2^{j-1} termes qui sont tous plus grands que $1/2^j$ et donc il est plus grand que $1/2$. On obtient donc que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2^p}\geq 1+\frac{p}{2}\ .$$

On peut donc obtenir une avancée de dominos aussi grande que l'on veut, ce que l'on pourrait traduire de façon informelle par

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=+\infty\ .$$

Ainsi, même si les termes de la somme sont de plus en plus petits, la somme entière est infinie. Quand on compare avec le cas précédent, on voit que la nuance est subtile : la vitesse à laquelle les termes deviennent petits détermine le fait que la somme est finie ou non.

Remarquons que la divergence de cette série était connue depuis le Moyen-Âge d'après les travaux de Nicolas Oresme.

À propos de la situation présentée, on pourra consulter le site Image des maths

http://images.math.cnrs.fr/Une-tour-de-cartes-qui-penche-a-l-infini.html

1.3 Séries entières

On sait que, quand x est proche de 0, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \tag{1.2}$$

où n est fixé et où $o\left(x^n\right)$ est un terme de la forme $x^n\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Le développement de Taylor nous donne donc une approximation de e^x mais seulement quand x se rapproche de 0 et à n fixé. On ne sait pas si *à x fixé*, le développement est d'autant meilleur que n est grand. En particulier, peut-on écrire

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

avec une somme infinie ? Cela serait pratique pour calculer ne serait-ce que e. En effet, seules les sommes et produits sont réellement calculables. Est-ce ainsi qu'une calculette calcule e^x ? Et si oui, quels nombres peuvent ainsi être calculés par une somme infinie ?

Les scientifiques indiens ont repris les travaux des grecs de l'antiquité et ont introduit les fonctions $\sin$ et $\cos$. Pour calculer leur valeur, ils mettent au point une méthode de calcul qui se traduirait par le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Ces méthodes seront reprises et développées par les perses et les arabes avant de revenir en Occident. Depuis longtemps, ces sommes infinies sont utilisées concrètement.

1.4 Des calculs étranges

Regardons le calcul formel suivant

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$$

donc

$$0 = 1 + (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) \quad \textbf{puis} \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = -1 \; .$$

On voit bien qu'il y a anguille sous roche. Notre problème est bien sûr d'avoir manipulé des sommes infinies qui ne sont pas définies. Ici, on sent bien l'arnaque, mais on peut faire des calculs similaires plus subtils : il faut définir proprement les choses pour savoir comment les manipuler. Ci-dessous, deux exemples de grands mathématiciens à l'époque où on commence à comprendre qu'il manque une théorie propre sur les sommes infinies.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne) utilise une série divergente dans un calcul intermédiaire. Il obtient une valeur juste après soustraction de l'infini de chaque côté de l'égalité ! Remarquons au passage que les notations très différentes d'aujourd'hui comme le $\sqcap$ *pour l'égalité.*

Puis : *Leonhard Euler (1707-1783, Suisse) s'interroge sur le sens des sommes infinies. Il dit par exemple que Leibniz pense que* $1-1+1-1+1-1+\ldots$ *vaut* $1/2$ *mais que cela reste contesté. Il montre que les valeurs* 0 *ou* 1 *sont possibles mais donc qu'il est normal de penser que le vrai résultat est la moyenne. Il donne aussi un exemple de série dont la somme vaut* $-\infty$ *ou* $+\infty$ *suivant le raisonnement et conclut que le résultat doit être une valeur réelle intermédiaire !*

Theorema Arithmeticae infinitorum.

Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

series ⊙ $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ etc. in infinitum ⊓ 2.

Demonstratio.

Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

series ☽ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ etc. in infinitum.

Exponatur et series ⊙ dimidiata:

series ☿ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ etc. in infinitum

Quam ajo esse ⊓ 1.

Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit $\frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252}$ etc. sive depressis fractionum Terminis

series ♀ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ etc. in infinitum.

Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀ Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales.

Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ☿ sive series ⊙ erit aequalis binario.

Quod demonstrandum sumseramus.

DE

SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infinitesimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſint conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna $+$ et $-$ alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

I. . . .	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} +$ etc.
II. . . .	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} +$ etc.
III. . . .	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc.
	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +$ etc.
IV. . . .	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc.
	$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 +$ etc.

Cc 3 §. 2.

§. 3. Ex ſpecie ſecunda Leibnitius primus hanc contemplatus eſt ſeriem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{ etc.}$$

cuius ſummam valere $= \frac{1}{2}$ ſtatuerat, his ſatis firmis rationibus innixus: Primum enim haec ſeries prodit, ſi

rum in hac ſpecie

quarum ſummae ſint finitae, atque adeo negatiuae, ſeu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuiſionem in ſeriem euoluta det: $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 +$ etc. deberet eſſe:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{ etc.}$$

quod aduerſariis non immerito abſurdiſſimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

2 Notions et propriétés de base

Pour le moment, nous n'avons pas écrit les choses rigoureusement. Typiquement, les « ... » sont souvent problématiques (peut-on trouver une unique logique pour boucher les trous ?).

2.1 Définitions et notations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leq q$, on note $\sum_{n=p}^{q} u_n$ la somme des termes depuis $n = p$ jusqu'à $n = q$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{q-1} + u_q \ .$$

On introduit les *sommes partielles* comme étant les nombres

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + \ldots + u_N, \quad N \in \mathbb{N}\,.$$

On appelle *série de terme général* u_n et on note $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ la suite des sommes partielles S_N.

Si la suite des sommes partielles converge quand N tend vers $+\infty$ vers un nombre $S \in \mathbb{C}$, on dit que *la série converge* ou *la série est convergente* et $S = \lim_{N\to+\infty} S_N$ est appelé *somme de la série*. On peut alors noter

$$S = \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que *la série diverge* ou *la série est divergente* et $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'a aucun sens en tant que nombre. Concernant la convergence ou divergence de la série, on parle de *nature* de la série.

Si la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ est convergente et de somme S, on appelle *restes* les termes du type $S - S_N = S - \sum_{n=0}^{N} u_n$ que l'on peut noter

$$R_N = S - S_N = \sum_{n\geq N+1} u_n.$$

Par définition, ce reste tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (s'il y a convergence... mais écrire un reste n'a pas de sens si la série diverge).

Notons que faire démarrer l'indice à $n = 0$ n'est pas obligatoire et on peut regarder des séries $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ ou avec un autre indice de départ.

⚠ Le premier écueil est de confondre la *suite* de terme général u_n avec la *série* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$. La série est la suite des sommes partielles. Étudier la nature de la *série* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ ne consiste pas regarder la convergence de la *suite* de terme général u_n.

L'objet « série » $(\sum_n u_n)$ est une suite. Il est important de ne pas le confondre avec l'objet « somme » $\sum_n u_n$ qui est la limite de la série, un nombre qui n'existe que si la série converge. *Certes, la différence d'écriture est subtile, ce n'est pas une convention générale qui se retrouve partout en dehors de ce cours et on fera parfois des oublis et abus dans ces notations, mais il est important de garder cette différence en tête.* L'objet « série » ne peut se trouver que dans des phrases du type « converge », « diverge », « a pour somme ».... Une expression du type $2 + (\sum_n u_n)$ est louche. On peut écrire $2 + \sum_n u_n$ au sens que le deuxième terme est la somme de la série, mais ceci ne peut s'écrire que une fois que l'on sait que la série converge.

⚠ L'indice n dans la sommation est un indice muet. On peut lui préférer d'autres indices comme k, p etc. et on peut aussi contraindre l'indice en posant par exemple $n = 2p$ pour écrire $(\sum_{n \text{ pair}} u_n) = (\sum_p u_{2p})$. Dans tous les cas, l'indice de sommation ne peut pas apparaître en dehors de la somme. S'il le fait, c'est souvent le signe d'une erreur dans le calcul ou les concepts. Cela peut aussi être dû à une mauvaise notation où n sert à deux choses différentes... ce qui amènera à une erreur à coup sûr. En particulier, la somme d'une série convergente, $\sum_n u_n$, ne peut pas dépendre de n !

2.2 Propriétés élémentaires

Les séries n'étant qu'une écriture de suites particulières, les propriétés connues des limites de suites nous donnent directement des propriétés élémentaires pour les séries :

Proposition 1.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, les séries $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n \lambda u_n)$ ont même nature (c'est-à-dire elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux). Si elles convergent alors les sommes vérifient $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$.*

Soient $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n v_n)$ deux séries convergentes, alors $(\sum_n (u_n + v_n))$ converge et a pour somme $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$.

Démonstration : Toutes les affirmations se démontrent de la même façon en utilisant les propriétés élémentaires des limites de suites. Faisons par exemple le cas de la somme. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n$$

car il s'agit d'une somme finie de termes et donc leur ordre peut être changé. Par hypothèse, les deux sommes de droite convergent vers les limites $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ quand $N \to \infty$. Donc la somme de gauche converge vers leur somme. $\square$

Le mécanisme de la démonstration ci-dessus est important : on ne manipule surtout pas une somme infinie sans précaution et encore moins sans savoir si elle converge ou pas. On verra par exemple que l'ordre des termes dans une somme infinie peut changer le résultat de la somme ! Il est donc important de : *considérer d'abord une somme finie de termes, manipuler ainsi les sommes partielles*, puis à la fin *faire tendre le nombre de termes vers l'infini*. Ce mécanisme de preuve sera commun à quasiment toutes les démonstrations.

Au passage, on notera qu'il n'y a pas de résultat sur une série du type $(\sum_n u_n v_n)$ puisqu'il n'y a pas de rapport entre $\sum_{n=0}^N u_n v_n$, $\sum_{n=0}^N u_n$ et $\sum_{n=0}^N v_n$.

Notons que par les résultats ci-dessus :

L'ensemble des séries convergentes a une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

La proposition suivante insiste sur le fait que la *nature* d'une série est une propriété asymptotique, cad. elle ne dépend pas des premiers termes de la série (ce qui n'est évidemment pas le cas de sa *somme* en cas de convergence).

Proposition 1.2. *Soit* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ *une série. Pour tous rangs* n_1 *et* n_2 *dans* $\mathbb{N}$*, les séries* $(\sum_{n\geq n_1} u_n)$ *et* $(\sum_{n\geq n_2} u_n)$ *ont même nature.*

Démonstration : On regarde de nouveau les sommes partielles. Si $N \geq n_2 \geq n_1$ on a

$$\sum_{n=n_1}^{N} u_n = \sum_{n=n_2}^{N} u_n + \left(\sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n\right) .$$

Les deux suites des sommes partielles indexées par N ne diffèrent ainsi que d'une constante $\sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n$: donc l'une converge dès que l'autre converge. $\square$

Le critère de divergence suivant est important.

Proposition 1.3. *Soit* $(\sum_n u_n)$ *une série de nombres complexes. Si elle converge alors la suite* (u_n) *tend vers* 0. *Autrement dit, si* (u_n) *ne tend pas vers* 0 *alors* $(\sum_n u_n)$ *diverge. On parle alors de divergence grossière ou triviale.*

Démonstration : Par hypothèse la suite $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ tend vers une limite S. Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers $S - S = 0$. $\square$

Il s'agit d'un critère de divergence puisque prouver que (u_n) tend vers 0 n'implique pas que $(\sum u_n)$ converge. Il s'agit pourtant d'une erreur très courante que beaucoup trop d'étudiants font malgré les avertissements.

Exemples : La série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ mentionnée par Euler est donc divergente. Il est normal de ne pas pouvoir définir précisément sa somme. De même, le calcul $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = -1$ ne veut donc rien dire. Pour les séries $(\sum_n 1/2^n)$ et $(\sum_n 1/n)$, le terme général tend vers $0\ldots$ et cela ne permet pas d'en déduire leur nature. D'ailleurs la première converge alors que la seconde diverge.