Université Joseph Fourier
Mat352 Algèbre 1 groupe 1

Contrôle continu du 28 novembre 2006

Durée: 2 heures
Sans document; les exercices et questions de cours sont indépendants.
On justifiera soigneusement les réponses.

Cours

1 Soient a, b deux éléments d'un anneau intègre A tels que a et b n'ont pas de pgcd. L'idéal (a, b) de A peut–il être principal?

2 Soient E un espace vectoriel et F un sous–espace vectoriel de E. On note $\pi: E \to E/F$ la surjection canonique. Définir sa transposée ${}^t\pi$ et montrer que l'espace vectoriel $(E/F)^*$ est isomorphe à l'orthogonal de F.

3 Soient u, v des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Donner en justifiant la définition de $\det u$. Montrer que $\det(v \circ u) = \det v \times \det u$.

Exercices

4 Soient p un nombre premier et $n \geq 2$ un entier. On considère l'anneau quotient $A = \mathbb{F}_p[X]/(X^n)$.

a) Quels sont le cardinal de A? sa caractéristique?

b) L'anneau A est–il isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}$?

c) Etablir la liste de tous les idéaux de A. Préciser les idéaux maximaux.

d) Pour k entier ≥ 2, donner les éléments nilpotents de l'anneau produit $(\mathbb{F}_p)^k$ (c'est–à–dire les éléments dont une puissance est 0). Existe–t–il k tel que l'anneau A soit isomorphe à l'anneau $(\mathbb{F}_p)^k$?

5 **a)** Le groupe G des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/68\mathbb{Z}$ est–il cyclique? Quel est son cardinal?

b) Dans l'anneau $\mathbb{Z}/68\mathbb{Z}$, résoudre l'équation $x^2 = \overline{1}$.

T.S.V.P.

6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On suppose données n formes linéaires $l_1, \ldots, l_n$ sur E ($n \geq 1$), telles qu'on ait pour tout $x \in E$:

$$l_1(x) = \ldots = l_n(x) = 0 \ \text{ entraıne } \ x = 0\,.$$

Montrer que $\dim E \leq n$. (On pourra considérer le sous–espace de E^* engendré par les l_i.)

7 Soient $a_1,\ldots, a_n$ n éléments d'un corps K (n entier ≥ 2). On considère le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & \ldots & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 & \ldots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & a_2^n + a_3^n & \ldots & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix}.$$

a) Pour $1 \leq i \leq n$, on note A_i le vecteur colonne ${}^t(\, a_i \quad a_i^2 \quad \ldots \quad a_i^n\,)$. En utilisant les propriétés du déterminant, notamment sa n–linéarité, montrer que

$$D_n = c \cdot \det\,(A_1, \ldots, A_n)\,,$$

pour un élément c de K qu'on déterminera.

b) Calculer le déterminant D_n. (On rappelle la valeur du déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)\,.)$$

◇ — ◇ — ◇