Université Joseph Fourier
Licence de mathématiques L3
L352 Algèbre – groupe 2

Contrôle continu du 29 novembre 2005

Durée: 2 heures
Sans document; les six exercices sont indépendants.
On justifiera soigneusement les réponses.

1 On considère le sous–anneau $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ de $\mathbb{C}$ formé des éléments $a + ib\sqrt{3}$, où a et b parcourent $\mathbb{Z}$ (résultat admis). On remarque que $\mathbb{Z}$ est un sous–anneau de A. On note $f\colon \mathbb{Z} \to A/(1 + i\sqrt{3})$ le morphisme qui à tout entier m associe sa classe $\overline{m}$ dans le quotient de A.

a) Déterminer l'image et le noyau de f.

b) Établir un isomorphisme d'anneaux entre le quotient $A/(1+i\sqrt{3})$ et un anneau $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

c) L'idéal $(1 + i\sqrt{3})$ de A est–il premier?

d) Utiliser **b)** pour montrer que l'idéal $(2, 1 + i\sqrt{3})$ de A est maximal.

2 Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes $P(X) = X^3 - X + 2$ et $Q(X) = X^2 + 1$.

a) L'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(P)$ est–il un corps?

b) Déterminer le *pgcd* de P et Q.

c) Déterminer un générateur D de l'idéal (P, Q) de $\mathbb{R}[X]$. Exprimer D comme élément de l'idéal (P, Q).

d) Trouver tous les couples (U, V) de $\mathbb{R}[X]^2$ qui vérifient $UP = -VQ$.

e) Trouver tous les couples (U, V) de $\mathbb{R}[X]^2$ qui vérifient $UP + VQ = 4X$.

3 **a)** Le groupe G des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$ est–il cyclique? Quel est son cardinal?

b) Soit m le plus grand ordre d'un élément de G. Déterminer un élément de G d'ordre m.

4 Soient K un corps et P un élément non nul de $K[X]$.

a) Montrer que l'idéal (P) de $K[X]$ est un sous–espace vectoriel de $K[X]$.

b) Montrer que l'espace vectoriel quotient $K[X]/(P)$ est de dimension finie et en donner une base.

T.S.V.P.

5 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K. On note L un sous–espace vectoriel du dual de E. Montrer l'équivalence des deux propriétés:

(i) On a $L = E^*$.

(ii) Pour tous v, w distincts dans E, il existe $l \in L$ tel que $l(v) \neq l(w)$.

6 Soit n un entier ≥ 4. On note E le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus $n-1$. On désigne par a et b deux réels distincts, et on considère les trois formes linéaires sur E:

$$l_1\colon P \mapsto P(a) \quad l_2\colon P \mapsto P'(a) \quad l_3\colon P \mapsto P(b).$$

a) La famille (l_1, l_2, l_3) est–elle libre?

Soit F l'ensemble des formes linéaires sur E dont le noyau contient le sous–espace $V = \operatorname{Ker} l_1 \cap \operatorname{Ker} l_2 \cap \operatorname{Ker} l_3$.

b) Montrer que F est un sous–espace vectoriel de E^*.

c) Déterminer une famille génératrice finie, puis une base de F.

*****