Université Joseph Fourier
L3A groupe 1
DKMat357 AlgèbreII

Contrôle continu du 4 décembre 2007

Durée: 2 heures
Sans document; les huit exercices sont indépendants.
On justifiera soigneusement les réponses.

1 Soit V le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(-1, 0, 3)$.

a) Donner un système minimal d'équations linéaires de V (et justifier).

b) On note $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/V$ la surjection canonique. Donner un sous–espace vectoriel W de $\mathbb{R}^3$ tel que la restriction de π à W soit un isomorphisme de W sur $\mathbb{R}^3/V$.

2 Donner une matrice réelle 3×3 qui est nilpotente d'indice 2.

3 Donner la décomposition de Dunford de la matrice réelle $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

5 a) L'idéal $(X^2 + X + 1)$ de $\mathbb{R}[X]$ est–il maximal?

b) Donner la factorisation du morphisme d'anneaux $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ défini par $P \mapsto P(j)$, où on note $j = e^{2i\pi/3}$.

c) Soient a, b, c trois réels. Trouver un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$X - 1 \text{ divise } Q - c \quad \text{et} \quad X^2 + X + 1 \text{ divise } Q - aX - b\,.$$

d) Soit $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ le morphisme d'anneaux $P \mapsto (P(1), P(j))$. Déterminer le noyau et l'image de g.

e) Expliciter un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^3 - 1)$ sur un produit de corps.

6 Soient E un K–espace vectoriel et $s \geq 1$ un entier. Soit $\varphi : E \to K^s$ une application linéaire. Pour $1 \leq i \leq s$, on note $e_i^* : K^s \to K$ la forme "i-ème coordonnée" et on pose $\varphi_i = e_i^* \circ \varphi$.

a) Comparer les sous–espaces $\operatorname{Im} {}^t\varphi$ et $\operatorname{vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_s)$ de E^*.

b) Donner le noyau de ${}^t\varphi$.

c) Montrer que φ est surjective si et seulement si la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ est libre dans E^*.

T.S.V.P.

7 Soient E un K–espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. Pour toute forme n–linéaire alternée f sur E, on définit $f_u : E^n \to K$ par $f_u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$.

a) Montrer que f_u est n–linéaire alternée.

b) Montrer qu'il existe $\lambda \in K$, indépendant de la forme f, tel que $f_u = \lambda f$.

c) Montrer que $\lambda = \mathrm{tr}(u)$.

8 Soit u un endomorphisme d'un K–espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_i$, et que chaque sous-espace F_i est stable par u; on note u_i l'endomorphisme de F_i induit par u, μ_i le polynôme minimal de u_i.

Prouver que le polynôme minimal μ_u est le ppcm de $\mu_1, \dots, \mu_s$.

◇ ◇ ◇ ◇