Université Joseph Fourier
Licence de mathématiques, Mat352
AlgèbreI, groupe 2

Contrôle continu du 29 septembre 2005

Durée: 2 heures
Sans document; les cinq exercices sont indépendants.
On justifiera soigneusement les réponses.

1 **a)** Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Pour $g \in G$, que pouvez-vous dire de l'ordre de $\varphi(g)$ comparé à celui de g? Et si φ est un isomorphisme?

b) Soient G un groupe et x dans G. L'application $g \mapsto xgx^{-1}$ de G dans G est-elle un isomorphisme?

c) Soient x, y deux éléments *quelconques* d'un groupe G. Montrer que xy et yx ont le même ordre.

2 **a)** Soit π la surjection canonique de groupes π: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Déterminer en fonction de l'entier m l'image par π du sous–groupe $m\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

b) Soit H le sous–groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par 6 et 14. Identifier H. Quelle est son image par π?

3 Soit G l'ensemble des matrices réelles 2-2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.

a) Montrer que G est un groupe pour la multiplication des matrices.

Dans la suite on note $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

b) Les applications $\varphi : G \to (\mathbb{R}^*, \times)$, donnée par $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$,

et $\psi : G \to (\mathbb{R}, +)$, donnée par $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto b$, sont–elles des morphismes? Si oui, en écrire la factorisation canonique.

c) Est–il vrai que T est un sous–groupe distingué de G? Montrer que H est un sous–groupe de G.

d) Déterminer les classes à gauche et à droite de l'élément $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de G modulo H. Discuter leur égalité.

e) Le sous–groupe H de G est-il distingué?

f) Déterminer le centre de G.

T.S.V.P.

4 Dans le groupe abélien $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on note H le sous–groupe engendré par l'élément $(\overline{1}, \overline{1})$.

a) Déterminer l'indice $[G \colon H]$.

b) Quel est l'ordre de la classe de $(\overline{1}, \overline{2})$ dans le groupe G/H?

5 Soient G un groupe, et H un sous–groupe de G contenant le sous–groupe dérivé $D(G)$ de G.

a) Montrer que H est distingué dans G.

b) Le groupe quotient G/H est–il abélien?

c) Considérant les groupes $G/D(G)$ et G/H, est–il vrai que l'un des deux est naturellement un quotient de l'autre? que l'un des deux est naturellement un sous–groupe de l'autre? (une réponse négative peut être justifiée par un contre–exemple, pensez à $G = \mathbb{Z}$.)

*****