Maîtrise de mathématiques
Module Malg1

Contrôle continu du 28 novembre 2002
13h15–15h15, salle 18

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite.
Les quatre exercices sont indépendants. La lettre A désigne toujours un anneau commutatif unitaire.

Exercice 1. Si $N \neq 0$ est un $\mathbb{Z}$-sous-module de $\mathbb{Q}$ isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ $(n \geq 1)$, montrer que $n = 1$. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ est-il libre?

Exercice 2. Soient A un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et e un élément de A vérifiant $e^2 = e$. Démontrer que $e = 0$ ou 1.

Exercice 3. Soient I et J deux idéaux d'un anneau A. En utilisant la propriété universelle du produit tensoriel, démontrer que les A-modules $A/I \otimes A/J$ et $A/(I + J)$ sont isomorphes.

Exercice 4. Soit A un anneau, et soient $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$ trois idéaux emboîtés de A. On considère le A–module $M = A/\mathcal{A}_1 \oplus A/\mathcal{A}_2 \oplus A/\mathcal{A}_3$. Pour $i = 1, 2, 3$, on note e_i l'élément de M correspondant à l'unité de $A/\mathcal{A}_i$; ainsi (e_1, e_2, e_3) engendre le A-module M.

a) Déterminer l'annulateur $\mathrm{Ann}(M)$ de M, c'est–à–dire l'idéal des $a \in A$, tels que pour tout $m \in M$, $am = 0$.

b) Pour $r \geq 4$, identifier le A-sous-module $\Lambda^r M$ de l'algèbre extérieure de M.

c) Montrer les inclusions $\mathcal{A}_2 \subset \mathrm{Ann}(\Lambda^2 M)$ et $\mathcal{A}_3 \subset \mathrm{Ann}(\Lambda^3 M)$.

d) Montrer que l'on définit bien une application A–multilinéaire alternée $\phi\colon M^3 \to A/\mathcal{A}_3$ en posant $\phi((\sum_i x_{i,j} e_i)_{j=1,2,3}) = \det(\overline{x_{i,j}})_{i,j}$, où pour $a \in A$, $\overline{a}$ désigne la classe de a modulo $\mathcal{A}_3$.

e) En utilisant c) et d), prouver que $\mathrm{Ann}(\Lambda^3 M) = \mathcal{A}_3$.

f) Déterminer de même l'idéal $\mathrm{Ann}(\Lambda^2 M)$ de A.

g) La suite croissante $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$ d'idéaux de A est-elle bien déterminée par la donnée du A-module M à isomorphisme près?

****