Groupes, actions de groupes et géométrie

Exercices

A) Groupes monogènes, abéliens finis, et ordre des éléments

Exercice 1 Le groupe $\mathbb{Z}^2$ est-il monogène ? Même question pour H sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par une partie finie.

Exercice 2 Pour p premier, on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Trouver un générateur des groupes multiplicatifs $\mathbb{F}_7^\times$, $\mathbb{F}_{13}^\times$ et $\mathbb{F}_{17}^\times$. Donner *tous* les générateurs du groupe $\mathbb{F}_{13}^\times$.

Exercice 3 Soient g élément d'ordre n d'un groupe G et $k \in \mathbb{Z}$.

a) On suppose que $G =< g >$. Montrer que G est isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}$. Montrer que tout sous–groupe de G est cyclique, et que pour tout diviseur d de n, G a un unique sous-groupe d'ordre d.

b) Quel est l'ordre de g^k ? Quels sont tous les générateurs de $< g >$?

c) On prend $G = \mathbb{F}_p^\times$ avec p premier impair. On note $G^k = \{x^k \mid x \in G\}$. Montrer que le sous–groupe G^2 est l'ensemble des x tels que $x^{(p-1)/2} = 1$, d'indice 2 dans G. Décrire de même le sous–groupe G^3 en fonction de $p - 1$.

Exercice 4 a) À quelle condition sur a, b entiers ≥ 2 le groupe produit $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est–il cyclique ?

b) Soient d le pgcd de a et b et m leur ppcm. Factoriser le morphisme de groupes naturel de $a\mathbb{Z}$ dans $(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z})/b\mathbb{Z}$. Quel isomorphisme obtient-on ? Conclure que $ab = dm$.

Exercice 5 Donner l'ordre maximal d'un élément du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/77\mathbb{Z})^\times$, et trouver un élément de cet ordre.

Exercice 6 Donner l'ordre maximal d'un élément du groupe symétrique S_5 ; du groupe alterné A_5.

Exercice 7 Racines de l'unité Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n$ le sous–groupe (cyclique !) des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}^*$.
a) Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$ est l'un des $\mathbb{U}_n$.
b) Soient m, n dans $\mathbb{N}^*$, et N leur *ppcm*. Identifier le groupe $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$. Montrer que le sous–groupe des produits $\mathbb{U}_n \cdot \mathbb{U}_m =< \mathbb{U}_n, \mathbb{U}_m >$ est égal à $\mathbb{U}_N$.
c) On suppose n et m premiers entre eux. Montrer que tout générateur de $\mathbb{U}_{nm}$ s'écrit de manière unique comme produit d'un générateur de $\mathbb{U}_n$ et d'un générateur de $\mathbb{U}_m$. Qu'en déduisez–vous pour la fonction d'Euler φ ?

B) Groupes opérant sur un ensemble et géométrie

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit naturellement sur E. Cette action est–elle transitive ? Quelles sont ses orbites ? Quel est le stabilisateur d'un vecteur u de E ?

2. Même question pour l'action de $\mathrm{O}(E)$, si E est euclidien.

3. Angles Idem pour l'action de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ sur l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$ euclidien, puis pour son action sur l'ensemble des *couples* de vecteurs unitaires (action diagonale). Les orbites pour ces couples forment l'ensemble $\mathcal{A}$ des *angles orientés* $(\widehat{u,v})$ *de vecteurs unitaires* du plan.

a) Définir une bijection ρ de l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces angles $(\widehat{u,v})$ sur le groupe abélien $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Par transport de structure via ρ, ceci munit $\mathcal{A}$ d'une loi de groupe additif.

b) Montrer la *relation de Chasles* $(\widehat{u,v}) + (\widehat{v,w}) = (\widehat{u,w})$.

c) Si u, u', v, v' sont unitaires dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $(\widehat{u,v}) = (\widehat{u',v'})$ ssi $(\widehat{u,u'}) = (\widehat{v,v'})$.

Exercice 9 SO en dimension 3

Soient E un espace euclidien de dimension 3 et S la sphère unité de E pour la norme associée. Si D est une droite vectorielle de E, on note r_D la rotation d'angle π autour de D (appelée aussi demi–tour). Ainsi, r_D appartient au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$.

a) L'action du groupe $\mathrm{SO}(E)$ sur S est–elle transitive ? simplement transitive ? fidèle ?

b) Pour D droite vectorielle de E et g dans $\mathrm{SO}(E)$, reconnaître l'endomorphisme $g \circ r_D \circ g^{-1}$.

c) Soit g un élément de $\mathrm{SO}(E)$. Montrer que g est un demi-tour si et seulement s'il existe v dans S tel que $g(v) = -v$.

Dans les questions d) et e) on se donne un sous–groupe G de $\mathrm{SO}(E)$ qui agit transitivement sur S.

d) Montrer que G contient un demi–tour.

e) On rappelle que $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les demi–tours. En déduire $G = \mathrm{SO}(E)$.

f) Montrer avec a) et b) que le centre de $\mathrm{SO}(E)$ est $\{id_E\}$ et que les demi–tours forment une classe de conjugaison dans $\mathrm{SO}(E)$.

Exercice 10 Soit G un groupe fini opérant transitivement sur un ensemble fini X. On considère un point $x \in X$ et on note H son stabilisateur.

1. Pour $g \in G$, expliciter le stabilisateur du point $g \cdot x$.

2. À quelle condition sur H l'action de G est–elle fidèle ? Et si de plus G est abélien ?

3.(*) Soit K un sous–groupe distingué de G. Montrer que les orbites de X pour l'action de K ont toutes même cardinal.

Donner un contre–exemple dans le cas où K n'est pas distingué.

Exercice 11 Dénombrement sur les corps finis
Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini et n entier ≥ 1.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ opère *simplement transitivement* sur l'ensemble $\mathcal{B}$ des bases de $(\mathbb{F}_q)^n$ (cad. : pour toutes bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de $(\mathbb{F}_q)^n$, il existe un unique g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ tel que $g(e_i) = e'_i$ pour tout i).

2. En déduire l'ordre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

3. Soit d entier $\leq n$. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{F}_q)^n$ de dimension d.

Exercice 12 Nombre d'orbites et G–coloriages

1. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X fini. Montrer la *formule de Burnside* qui donne le nombre N d'orbites pour cette action :

$$N = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{card} \operatorname{Fix}(g)\,,$$

où $\operatorname{Fix}(g)$ ($g \in G$) désigne l'ensemble des $x \in X$ tels que $g \cdot x = x$ *(on pourra dénombrer de deux manières l'ensemble $E = \{(g, x) \in G \times X \,|\, g \cdot x = x\}$).*

Un ensemble $\mathcal{C}$ de q couleurs étant fixé, on appelle G*–coloriage* de X par $\mathcal{C}$ toute G–orbite de l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions de X dans $\mathcal{C}$, où on munit $\mathcal{F}$ de l'action induite.

2. Expliciter l'action de G sur $\mathcal{F}$ et montrer qu'une fonction f de $\mathcal{F}$ est fixe par l'élément g de G ($g \in G$) ssi f est constante sur les $\langle g \rangle$–orbites de X.

3. En déduire que le nombre de G–coloriages de X vaut $\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} q^{|X/\langle g \rangle|}$, où pour tout g on note $|X/\langle g \rangle|$ le nombre de $\langle g \rangle$–orbites de X.

Des exemples :

4. Colliers de perles À partir de perles de couleur rouge ou bleue, combien peut–on faire de colliers de 6 perles différents ? (on identifie deux colliers à rotation et symétrie près, *ie* modulo l'action du groupe diédral D_6, cf. exo 20.)

5. Dénombrer les coloriages possibles d'un cube, à rotation près, où chaque face est coloriée avec l'une des 3 couleurs blanche, rouge, ou bleue (voir exo 22-9).

C) Quelques applications à la structure des groupes finis

Exercice 13 Théorème de Cauchy, preuve de J. McKay

Soit G un groupe fini d'ordre multiple de p, p un nombre premier. Dans G^p, on considère la partie $S = \{(x_1, \dots, x_p) | \, x_1 \cdots x_p = 1_G\}$.

On fait agir $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ par permutation circulaire sur G^p : pour $\bar{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $(x_1, \dots, x_p) \in G^p$, on pose $\bar{k} \cdot (x_1, \dots, x_p) = (x_{1+k}, \dots, x_{p+k})$, où les indices sont vus modulo p : $x_{l+p} = x_l = x_{[l]}$ pour tout l, en notant $[l]$ le représentant de $\bar{l}$ dans $\{1, \dots, p\}$.

1. Montrer que S est stable sous l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelles sont ses orbites à 1 élément ?

2. Calculer le cardinal de S et conclure que G possède au moins un élément d'ordre p.

Exercice 14 Des sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe fini. On suppose que G possède un sous–groupe H d'indice p le plus petit facteur premier de $\operatorname{card} G$.

Montrer que H est distingué dans G (utiliser l'action de G par translation sur G/H) : c'est le théorème de Ore.

2. Montrer que si un groupe infini G possède un sous-groupe d'indice fini, alors il possède un sous-groupe *distingué* d'indice fini.

Théorèmes de Sylow :

Notations : p désigne un nombre premier et G un groupe fini, d'ordre $n = p^\alpha m$, où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et p ne divise pas m. On appelle "p–sous–groupe de Sylow" de G tout sous–groupe d'ordre p^α.

Exercice 15 premier théorème de Sylow

Avec les notations ci-dessus, son énoncé est : *G possède un p–Sylow.* On va le prouver par une récurrence sur l'ordre de G, qui utilise les groupes quotients. Le théorème est clair si G est d'ordre p. On suppose dans les questions 1. et 2. qu'il est vrai pour tout groupe d'ordre $< n$ et multiple de p. On admettra le théorème de Cauchy (voir exo 13) dans le cas où le groupe est *abélien* (la preuve dans ce cas est élémentaire, avec une récurrence sur l'ordre de G qui utilise les quotients).

1. Si G contient un sous–groupe strict dont l'indice est premier à p, justifier que G possède un p–sous–groupe de Sylow.

2. On suppose que p divise l'indice de tous les sous–groupes stricts de G.

a) Écrire l'équation aux classes pour l'action de G par conjugaison sur lui-même, et montrer que le centre de G contient un élément x d'ordre p. Si $\alpha = 1$, $\langle x \rangle$ est un p–sous–groupe de Sylow.

b) Si $\alpha \geq 2$, justifier que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et conclure pour G en utilisant un p–Sylow de $G/\langle x \rangle$.

3. En déduire le théorème.

Exercice 16 DEUXIÈME THÉORÈME DE SYLOW

1. Soient H, P des sous–groupes d'un groupe fini G. Soit p un diviseur premier de $\text{card}\,(G)$. On suppose que $\text{card}\,(P) = p^n$ et que $[G : H] = m$ est premier avec p.

Montrer que P est contenu dans un conjugué de H (on fera agir P par translation sur G/H).

2. En déduire que *les p–sous–groupes de Sylow de G sont tous conjugués*, et que *tout p–sous–groupe de G est inclus dans un p–Sylow* : c'est le deuxième théorème de Sylow.

Exercice 17 LES 2–SOUS–GROUPES DE SYLOW DE S_4

1. On note D_4 le groupe des isométries du carré de sommets $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ euclidien (voir aussi exo 20). On numérote les sommets dans le sens trigonométrique. Montrer que D_4 agit sur l'ensemble des 4 sommets. Étudier cette action et énumérer les permutations du sous-groupe de S_4 ainsi obtenues.

2. En modifiant l'ordre de numérotation des sommets, montrer que S_4 possède 3 sous–groupes isomorphes à D_4, tous conjugués. Quelle est leur intersection deux à deux ? On reconnaîtra un même sous–groupe distingué de S_4.

Exercice 18 LE GROUPE ALTERNÉ A_5

a) Donner les types d'éléments de A_5 et le nombre d'éléments de chaque type. Pour chaque type, déterminer le cardinal de la classe de conjugaison dans A_5. Montrer(*) que si σ est un 5–cycle, σ et σ^2 ne sont pas conjugués.

b) Soit H un sous-groupe distingué de A_5. En remarquant que H est réunion de classes de conjugaison, montrer que H est A_5 ou $\{id\}$. Par suite le groupe A_5 est *simple* non abélien (c'est en fait le *plus petit* groupe simple non abélien ; ..c'est aussi le groupe des isométries positives laissant invariant un icosaèdre régulier).

D) Groupes finis d'isométries, en dimension 2 et 3

Exercice 19 Déterminer le groupe des isométries affines du plan qui conservent globalement la partie X suivante :

i) la réunion des axes Ox et Oy

ii) l'ensemble des deux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

iii) l'ensemble des quatre points $(\pm 1, 0)$ et $\pm(1, 1)$

iv) l'ensemble $\{(\pm 2, \pm 1)\}$ (sommets d'un rectangle)

(voir aussi exo 25).

Exercice 20 Groupe diédral des isométries d'un polygone régulier [1]

On se fixe un entier $n \geq 3$. Les polygones à n côtés qui sont *réguliers* sont ceux qui admettent le plus grand groupe "de symétrie" (d'ordre $2n$, cf. 1c).

On dit qu'un groupe G est *diédral de type* D_n, s'il est engendré par deux éléments r, s tels que : r est d'ordre n, s est d'ordre 2 et $rsrs = 1_G$ (de manière équivalente, $rs = sr^{-1}$).

1. On se place dans le plan euclidien usuel, identifié à $\mathbb{C}$. On considère le polygone convexe régulier à n côtés $\mathcal{P}_n$, de sommets les $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$, et on définit les isométries r et s par : $\forall z \in \mathbb{C}, r(z) = e^{2i\pi/n}z, s(z) = \bar{z}$ (r est la rotation d'angle $2\pi/n$ et s est la réflexion d'axe Ox). On note G le sous–groupe $\langle r, s \rangle$ de $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$.

a) Montrer que G est diédral de type D_n.

b) Montrer que le groupe des isométries du plan euclidien qui conservent l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}_n$ est G (on vérifie que c'est aussi le groupe des isométries du polygone $\mathcal{P}_n$), et que G est d'ordre $2n$. Pour $n = 3$ et $n = 4$, dessiner $\mathcal{P}_n$ et les axes des réflexions de son groupe d'isométries.

c) Vérifier que G agit transitivement, d'une part sur les sommets de $\mathcal{P}_n$, d'autre part sur l'ensemble des $2n$ couples formés d'un côté de $\mathcal{P}_n$ et de l'un de ses deux sommets.

2. Soit $G = \langle r, s \rangle$ un groupe diédral de type D_n.

a) Montrer que : $G = \{1_G, r, \ldots, r^{n-1}\} \cup \{s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$ et que G est d'ordre $2n$.

b) Montrer que deux groupes diédraux de type D_n sont isomorphes.

3. Montrer que S_3 est diédral de type D_3 (le groupe du triangle équilatéral).

Exercice 21 Groupe des isométries du tétraèdre régulier, applications
Dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dimension 3 on considère un tétraèdre régulier [2] T et on note G le groupe des isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets de T . On pourra *utiliser* G pour traiter les questions géométriques 3. et 4.

1. Montrer que G est isomorphe à un sous–groupe de S_4.

2. En exhibant des réflexions dans G qui fixent 2 sommets, montrer que G est isomorphe à S_4. En déduire que le groupe G^+ des *déplacements* qui laissent $\mathcal{S}$ globalement invariant est isomorphe au groupe alterné A_4. Identifier ses éléments.

3. a) Montrer que l'isobarycentre O des quatre sommets de T en est équidistant.

b) Montrer que les hauteurs de T sont concourantes en O et coupent les faces en leur centre de gravité.

---

1. déf : ligne polygonale fermée définie par une suite de points $(P_1, \ldots, P_n)$, telle que tous les côtés P_iP_{i+1} $(1 \leq i \leq n,\ P_{n+1} = P_1)$, et tous les angles en les P_i, soient égaux.

2. T est l'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires équidistants les uns des autres, qui sont alors ses sommets.

4. a) Justifier que les paires d'arêtes opposées de T sont orthogonales. Quelle est leur perpendiculaire commune ?

b) En considérant la composée de demi–tours de G, montrer que les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées de T (les *bimédianes*) sont perpendiculaires deux à deux.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bimédianes. On dispose alors d'une version géométrique de l'*existence d'un morphisme surjectif de S_4 sur S_3* :

c) Justifier que G agit sur $\mathcal{B}$. Montrer que cette action définit un morphisme *surjectif* de $G \simeq S_4$ sur le groupe symétrique $S(\mathcal{B}) \simeq S_3$. Quel est son noyau ?

5. Expliciter géométriquement les deux types d'isométries négatives de G.

Exercice 22 Groupe des isométries du cube

Soit $\mathcal{C}$ un cube de $E = \mathbb{R}^3$ centré en l'origine. On numérote les sommets d'une face $A_1, \ldots, A_4$, puis on note B_i le sommet opposé de A_i ($1 \leq i \leq 4$). Les droites $D_i := (A_iB_i)$ sont alors les 4 grandes diagonales du cube. On note G, resp. G^+, le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ (resp. des rotations) qui laissent globalement invariant l'ensemble des sommets de $\mathcal{C}$; tout élément de G induit une permutation des 8 sommets de $\mathcal{C}$, et il fixe leur isobarycentre (0), c'est donc une isométrie *vectorielle* de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que G agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des grandes diagonales de $\mathcal{C}$. En utilisant la numérotation des D_i, on en déduit un morphisme φ de G dans S_4.

2. Montrer que $\varphi(-id_E) = id_{S_4}$ et que $\ker\varphi \cap G^+ = \{id_E\}$ (on étudiera la restriction d'un élément g du noyau à chaque grande diagonale, on se ramènera au cas où $g_{|D_1} = id$).

3. Dans cette question on montre que les transpositions sont dans $\varphi(G^+)$. Sans perte de généralité, on cherche $g \in G^+$ telle que $\varphi(g)$ soit la transposition (12). On note I le milieu de l'arête A_1A_2, J le milieu de l'arête B_1B_2 et r le retournement (rotation d'angle π) d'axe (IJ).

Montrer que r est dans G^+, puis que $\varphi(r) = (12)$.

4. Conclure que la restriction de φ à G^+ est un isomorphisme sur S_4.

5. Soit X l'ensemble des paires de faces opposées de $\mathcal{C}$. Montrer que G^+ agit transitivement sur X. En déduire un morphisme surjectif de S_4 dans S_3 dont on explicitera le noyau (cf. exo 21, 4c).

6. Faire la liste des types de rotations de G^+, en identifiant leur axe et angle, suivant le type de la permutation qu'elles induisent sur $\mathcal{D}$.

7. Notons G^- l'ensemble des isométries négatives de G. Montrer que G^- est l'ensemble des $-g$, où g parcourt G^+, classe modulo G^+.

8. En déduire que G est isomorphe à $G^+ \times \{-id_E\}$ et donc à $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9. Reprendre la liste obtenue en 6. et donner pour chaque type d'élément g le nombre d'orbites de l'action de $\langle g \rangle$ sur l'ensemble des 6 faces de $\mathcal{C}$ (application : exo 12, 5).

Exercice 23 TOUT SOUS–GROUPE FINI DE $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ EST CYCLIQUE OU DIÉDRAL

1.a) Montrer que tout sous–groupe fini de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ est cyclique.

b) Soit G un sous–groupe fini de $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ qui n'est pas inclus dans $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. On note $G^+ = G \cap \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $[G : G^+] = 2$. Montrer que si $\mathrm{card}\, G \geq 3$, G est diédral (cf. exo 20) ; et que sinon G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (groupe assimilé à un groupe diédral).

c) Conclure que *tout sous–groupe fini de* $O(\mathbb{R}^2)$ *est cyclique ou diédral.*

2. Soit maintenant E est un espace vectoriel de dimension n, euclidien pour le produit scalaire $b = <\,,\,>$. On notera $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries de (E, b). On se donne G un sous–groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

Pour tous x, y dans E on définit $b'(x, y) = \frac{1}{\mathrm{card}\, G} \sum_{g \in G} < g(x), g(y) >$.

a) Montrer que b' est un produit scalaire sur E et que les éléments de G sont des isométries *de l'espace euclidien* (E, b').

b) Soient B, B' des bases orthonormées de E pour les produit scalaires b, resp. b', et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est la matrice de passage de B' à B.

Montrer que le conjugué $u\,G\,u^{-1}$ de G est inclus dans $\mathrm{O}(E)$. En déduire que *tout sous–groupe fini de* $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$) *est conjugué à un sous–groupe de* $O(E)$ (resp. $O_n(\mathbb{R})$).

3. Déduire de 1. et 2. que tout sous–groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ est cyclique ou diédral.

E) Groupe affine euclidien

Exercice 24 Soit u une isométrie de $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dimension n. On note $\vec{u}$ la partie linéaire de u, et E l'espace vectoriel sous–jacent à $\mathcal{E}$.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(\vec{u} - id_E) \ominus \mathrm{Im}\,(\vec{u} - id_E)$. On notera $F = \mathrm{Ker}\,(\vec{u} - id_E)$.

2. Caractériser les translations t_v de $\mathcal{E}$ qui commutent avec u.

3. Montrer que si u possède un point fixe et $v \in E$, alors $t_v \circ u$ possède un point fixe si et seulement si $v \in F^\perp$.

4. Pour $n = 1$, puis 2 puis 3, quelles sont les isométries de $\mathcal{E}$ qui s'écrivent comme produit de $n + 1$ réflexions orthogonales, et pas de moins ?

5. Pour $n = 3$, trouver la condition pour que deux rotations données de $\mathcal{E}$ d'axes distincts commutent.

Exercice 25 **1.** Déterminer le groupe G des isométries affines du plan, resp. de l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3, qui conservent globalement la partie X suivante :

a) l'ensemble $\mathbb{Z} \times \{0\}$ du plan affine euclidien.

b) une droite donnée D de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Montrer qu'alors l'ensemble des vissages d'axe D est un sous–groupe d'indice 2 du sous–groupe G^+ des déplacements de G.

c) la réunion de deux droites non coplanaires de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

2. Trouver un groupe de vissages isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ qui laisse invariante l'hélice $\mathcal{H}$ définie par $x = r\cos t, y = r\sin t, z = at, t \in \mathbb{R}$, où $ar > 0$.

Pour les exercices 26 à 30 on se donne $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

Exercice 26 Soit ABC un triangle non aplati de $\mathcal{P}$. Soit M_0 un point de (AB). La parallèle à (BC) issue de M_0 coupe (AC) en M_1. La parallèle à (AB) issue de M_1 coupe (BC) en M_2 *etc.* On définit ainsi des points M_n (pour $n \geq 0$). Montrer que $M_6 = M_0$ (on pourra mettre en évidence une transformation *affine* de la droite (AB)).

Exercice 27 Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{P}$, de centres O et O' et de rayons inégaux R et R', combien y a–t–il d'homothéties de $\mathcal{P}$ qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$? Construire leur centre.

Exercice 28 Étant données r et r' deux rotations de $\mathcal{P}$ de centres respectifs A et B et d'angles respectifs α et β, expliciter la composée $r' \circ r$ (décomposer r et r' en produit de symétries orthogonales convenables pour construire les éléments géométriques de $r' \circ r$).

Exercice 29 Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On note r_A (resp. r'_A) la rotation de centre A et d'angle $a = \widehat{BAC}$ (resp. $2a/3$), et on définit de même les rotations r_B et r_C (resp. r'_B et r'_C).

1. On note I le point d'intersection des deux trisectrices intérieures du triangle ABC issues de A et B “proches” du côté AB. Déterminer l'isométrie $r'_A \circ r'_B$.

2. Déterminer les isométries $f = r_C \circ r_B \circ r_A$ et $\tilde{f} = r_A \circ r_B \circ r_C$. Que peut–on dire si le triangle ABC est équilatéral ?

3. Déterminer de même la composée de symétries orthogonales $g = s_{(AB)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(BC)}$: montrer que g n'a pas de point fixe et préciser sa décomposition canonique, selon que ABC est ou non rectangle en B.

4. Montrer que ${r_A}^2 \circ {r_B}^2 \circ {r_C}^2 = id_{\mathcal{P}}$ (utiliser les symétries de 3.).

Exercice 30 Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère deux points A et B, situés dans un même demi–plan ouvert de frontière D.

1. Déterminer les points M de la droite D tels que la somme $MA+MB$ soit minimale.

2. Pour un tel point M, que peut–on dire des demi–droites $[MA)$ et $[MB)$?

3. Reprendre la question 1. avec D droite, et A, B deux points de $\mathcal{E}$ *euclidien de dimension 3.*

Exercice 31 PENTAGONE DE VAN DER WAERDEN

Soient A, B, C, D, E cinq points de $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. On suppose que $AB = BC = CD = DE = EA \neq 0$ et que les angles $\widehat{EAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$ et $\widehat{DEA}$ sont égaux. L'objectif est de montrer que les cinq points A, B, C, D, E sont coplanaires.

1. Montrer qu'il existe une isométrie f de $\mathcal{E}$ telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = E$ et $f(E) = A$.

On suppose que les cinq points ne sont pas coplanaires.

2. Montrer que $f^5 = id_{\mathcal{E}}$.

3. En déduire que f est une rotation de $\mathcal{E}$.

4. Conclure. Peut–on étendre ce résultat à d'autres entiers que 5 ?

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$