Université Joseph Fourier

Préparation à l'agrégation de mathématiques
Devoir d'algèbre, à rendre le 3 février 2005

I

Dans cette partie on décrit les idéaux maximaux de l'anneau de polynômes $A[X]$, pour A un anneau principal ayant "suffisamment" d'irréductibles. Les résultats 3.b) et d) serviront en II avec $A = \mathbb{R}[Y]$.

1. Soit k un corps. Montrer qu'il y a une infinité de polynômes irréductibles unitaires dans $k[X]$ (penser à l'argument d'Euclide pour l'infinitude des nombres premiers). Rappeler quels sont les idéaux maximaux de $k[X]$.

Dans la suite de cette partie, on se donne un anneau principal A qui possède une infinité d'éléments irréductibles 2 à 2 non associés (ainsi A n'est pas un corps, mais par exemple $A = \mathbb{Z}$ ou $A = k[X]$, où k est un corps). On note K le corps des fractions de A.

2. Montrer qu'aucun idéal principal (P) de $A[X]$ n'est maximal (si $\deg P \geq 1$, on pourra utiliser un irréductible de A qui ne divise pas le coefficient dominant de P).

3. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $A[X]$. On note P un générateur, choisi dans $A[X]$ et primitif (c.a.d. le pgcd dans A de ses coefficients est 1), de l'idéal principal engendré par $\mathcal{M}$ dans $K[X]$.

a) Démontrer l'égalité $PK[X] \cap A[X] = PA[X]$ (on rappelle que sur un anneau factoriel le produit de deux polynômes en une indéterminée primitifs l'est encore).

b) En utilisant **2.**, montrer que $P \in A^{\times}$ et $\mathcal{M} \cap A \neq \{0\}$. Pourquoi a–t–on $\mathcal{M} \cap A = \delta A$, où δ est un irréductible de A?

c) Etablir un isomorphisme entre le quotient de $A[X]$ par l'idéal engendré par δ et un certain anneau principal.

d) Conclure qu'il existe Q dans $A[X]$ qui vérifie (i) et (ii):

(i): l'idéal $\mathcal{M}$ est engendré par δ et Q,

(ii): le polynôme $\overline{Q}$ obtenu en réduisant les coefficients de Q modulo (δ) est irréductible dans $A/(\delta)[X]$;

et montrer qu'inversement tout idéal (δ, Q) de $A[X]$, où δ est irréductible dans A et Q satisfait (ii), est maximal.

T.S.V.P.

II

Dans cette partie on propose d'étudier l'anneau $C = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$. On établira notamment que cet anneau n'est pas euclidien mais est cependant principal.

1. Montrer que X^2+Y^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X,Y]$. Conclure que l'anneau C est intègre.

2. En utilisant une division "euclidienne" convenable, montrer que toute classe $\overline{P}$ de C s'écrit de manière unique $A(x)y+B(x)$, où x et y sont les classes de X et Y dans C, et $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que les morphismes non nuls de $\mathbb{R}$–algèbres de C dans $\mathbb{C}$ correspondent bijectivement aux couples (s,t) de $\mathbb{C}^2$ tels que $s^2+t^2+1=0$. Utiliser ces morphismes et l'écriture **2.** pour prouver que le groupe $C^\times$ est exactement $\mathbb{R}^\times$.

4. Pour toute classe $\overline{P}$ de C non inversible, montrer que la restriction à $C^\times \cup \{0\}$ de la surjection canonique de C sur $C/(\overline{P})$ n'est pas surjective.

5. On suppose que (C,v) est un anneau euclidien. En considérant, parmi les éléments ni nuls ni inversibles de C, une classe $\overline{P}$ qui minimise v, obtenir une contradiction avec **4**. Par suite l'anneau C n'est pas euclidien.

6. Soient $\overline{\mathcal{M}}$ un idéal maximal de C, et $\mathcal{M}$ son image réciproque dans $\mathbb{R}[X,Y]$. On va montrer que $\overline{\mathcal{M}}$ est principal.

a) Justifier que l'idéal $\mathcal{M}$ est maximal. En utilisant pour $A = \mathbb{R}[Y]$ les résultats 3.b) et d) de la partie I, démontrer que $\mathcal{M}$ contient un polynôme de degré 1 $aX+bY+c$.

b) Montrer alors que l'idéal $\mathcal{M}$ est engendré par X^2+Y^2+1 et $aX+bY+c$ (remarquer que par I 3.d), l'idéal $(Q(Y), aX+bY+c)$ est maximal, si $a \neq 0$ et $Q(Y)$ est irréductible sur $\mathbb{R}$). Conclure que l'idéal $\overline{\mathcal{M}}$ est principal.

7. On admet pour cette question que tout idéal de $\mathbb{R}[X,Y]$, donc aussi tout idéal de C, admet un ensemble fini de générateurs; cela entraîne de manière élémentaire que tout idéal propre de C est contenu dans un idéal maximal. De plus, le même argument que pour un anneau principal permet alors de montrer que tout élément non nul de C est un produit fini d'inversibles et/ou irréductibles de C.

Déduire alors de **1.** et **6.** que l'anneau C est factoriel, puis que tout idéal (c,c') de C est principal. Conclure enfin que l'anneau C est principal.

*****