Examen MAT302

le 5 janvier 2023 de 15h à 17h

Tous documents et dispositifs électroniques sont interdits. **Toutes les réponses doivent être justifiées** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte. On peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.*

Exercice 1. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2 + \sin^2 n} \;; \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{2+n}{2+5^n}} \;; \qquad \text{c)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4+(-1)^n\, n^{2/3}}\,.$$

Exercice 2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2(x-3)}\,dx$.

Exercice 3. Étudier la convergence des intégrales généralisées

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}\,dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{x^2}}\,dx.$$

Exercice 4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^\alpha)}dx\,.$

1. Pour quelles valeurs de α l'intégrale I_α est-elle convergente ?
2. Soit α une telle valeur. À l'aide du changement de variable $u = x^\alpha$, calculer I_α.

T.S.V.P.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

2. En utilisant 1. et que $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} dt$ ($k \in \mathbb{N}$), montrer que
$$u_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt .$$

3. Montrer que pour $N \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{-t^2 - (-t^2)^{f(N)}}{(1+t^2)^2} dt$, où $f(N)$ est un certain entier $> N$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t^2)^N}{(1+t^2)^2} dt$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini *(on pourra montrer que la valeur absolue de l'intégrale est majorée par* $\displaystyle\int_0^1 t^{2N} dt$*)*.

5. Déduire de ce qui précède que la série $(\sum_n u_n)$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$.

6. À l'aide du changement de variable $t = \tan u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{\pi/4} \sin^2(u) du$.

7. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

8. Montrer comment déduire de certaine(s) question(s) de cet exercice que la série $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ converge et a pour somme $\dfrac{\pi}{4}$.

Barème indicatif : 5/ 2,5/ 2,5/ 3/7