Examen MAT302

le 4 janvier 2021 de 13h30 à 15h30

Tous documents et dispositifs électroniques sont interdits. **Seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte.*

On rappelle que pour la nature *d'une série, il y a 3 réponses possibles.*

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+e^{-n}}$.

Exercice 2.

1. Déterminer, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série
$$\Big(\sum_n \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}\Big).$$
2. Calculer pour $x \geq 0$, et $n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_n(x) = \int_0^x (1-t)t^{3n}dt\,.$$
3. Si $0 \leq x < 1$, et $N \in \mathbb{N}$, calculer de deux manières la somme
$$\alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_N(x),$$
et en déduire que
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N+3}}{1+t+t^2}dt\,.$$
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}dt\,.$
5. Pour $N \in \mathbb{N}$, comparer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t+t^2}dt$ et $\dfrac{1}{3N+4}$.
6. En déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}\,.$$

$\boxed{T.S.V.P.}$

Exercice 3. Trouver toutes les primitives des fonctions données ci-dessous, sur l'intervalle indiqué :

$$f(x) = \cos(2x)\sin(3x) \ \text{ sur } \mathbb{R}\,; \quad g(x) = \tan x.\ln(\cos x) \ \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,.$$

Exercice 4. Pour $x \geq 0$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln|1-t^2|}{t^2}dt.$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $x \in]0,1[$. En intégrant par parties, calculer $F(x)$.
3. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}dt.$

Exercice 5. Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t-1}}\,,$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{(t+1)\sqrt{t-1}}dt\,,$
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t-1}}dt\,.$

Barème indicatif : 2/8/4/4/3