Examen MAT302

le 27 juin 2022 de 8h à 10h

Tous documents et dispositifs électroniques sont interdits, **seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte.*

Exercice 1. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n\geq 0} \frac{n^3\, 2^n}{(1+n^2)\, 3^n}\ ; \qquad \text{b) } \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\ ; \qquad \text{c) } \sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 2. On considère la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

1. Montrer la convergence de cette série.

   Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $J_N = (-1)^N \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3} dt$.

2. En utilisant la valeur de $\int_0^1 t^{3n} dt$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = J_N + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}\,.$$

3. Montrer que $|J_N| \leq \dfrac{1}{3N+4}$.

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$.

5. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+t^3}$.

6. Calculer une primitive de la fonction $g\colon t \mapsto \dfrac{-t+2}{3(t^2-t+1)}$ sur $\mathbb{R}$.

7. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

$\boxed{T.S.V.P.}$

Exercice 3. Soit $a > 0$.

1. À l'aide d'un changement de variable, comparer les intégrales : $I_a = \displaystyle\int_1^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ et $J_a = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

2. Peut-on en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$?

3. *(question bonus)* Soit $t > 0$. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{x}{t}$, et de la question précédente, déterminer la valeur de l'intégrale $H(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{t^2+x^2}dx$.

Exercice 4. Étudier la convergence des intégrales généralisées $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx$.

Barème indicatif : 6/9/ 2,5(+1,5)/ 2,5