Université Grenoble Alpes
M1MF

Théorie de Galois, contrôle continu n°2

le 14 avril 2022, durée 1h30

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée***; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

I

Soit ζ une racine primitive 9-ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{F}_7}$. Identifier le corps $\mathbb{F}_7(\zeta)$. Quel est le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{F}_7(\zeta)/\mathbb{F}_7$?

II

Soient K un corps et $P = X^3 + pX + q$ polynôme irréductible séparable de $K[X]$. Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les racines de P dans $\overline{K}$, et $\theta = \theta_1$, $L = K(\theta)$.

1. Calculer $N_{L/K}(P'(\theta))$.

2. En donnant une autre expression de cette norme, montrer que $N_{L/K}(P'(\theta)) = -\Delta$, où $\Delta = \prod_{i<k}(\theta_k - \theta_i)^2$.

III

Soit $P = (X^2 - 5)(X^3 - 2)$ et L le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$.

1. Soit L_1 le corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Déterminer $[L_1 : \mathbb{Q}]$ et la classe d'isomorphisme du groupe de Galois de $L_1/\mathbb{Q}$.

2. Déterminer $[L : \mathbb{Q}]$ et la classe d'isomorphisme du groupe de Galois G de P sur $\mathbb{Q}$.

3. Soit K un sous-corps de L. A-t-on forcément $K/\mathbb{Q}$ galoisienne? A-t-on forcément L/K galoisienne?

4. Donner en justifiant un sous-corps K de L tel que le groupe $\mathrm{Gal}\big(L/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\big)$ soit isomorphe par restriction au groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

5. Donner *explicitement* un élément σ d'ordre 6 dans G.

T.S.V.P.

IV

On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \sqrt{\alpha}$.

1. Déterminer le polynôme minimal Q de α sur $\mathbb{Q}$.

2. On pose $P = Q(X^2)$. Montrer que sa réduction $\overline{P}$ modulo 3 est un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_3[X]$.

3. Qu'en déduisez-vous sur P et sur son groupe de Galois G sur $\mathbb{Q}$?

On note L le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$. On note $\alpha' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta' = i\sqrt{|\alpha'|}$.

4. Décrire L et déterminer le degré $[L : \mathbb{Q}]$ (on pourra calculer $\beta\beta'$).

5. Quel est l'ordre de $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$?

6. Trouver un élément σ d'ordre 4 dans G, puis un élément τ d'ordre 2, tel que $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$.

◇ ◇ ◇