Université Grenoble Alpes
M1MF

**Théorie de Galois, contrôle continu n°2**
le 18 avril 2023, durée 1h30

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.* **Chaque réponse doit être justifiée***; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

## I

Soit $L/K$ une extension galoisienne de degré $n$, de groupe de Galois cyclique engendré par $\sigma$.

**1.a)** Montrer que $\operatorname{Ker}\operatorname{Tr}_{L/K}$ est un hyperplan du $K$-espace vectoriel $L$.

**b)** Montrer que $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_L - \sigma) \subset \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}_{L/K}$.

**c)** Montrer que $\dim_K \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_L - \sigma) = 1$.

**d)** Conclure que $\operatorname{Ker}\operatorname{Tr}_{L/K} = \operatorname{Im}(\mathrm{id}_L - \sigma)$.

**2.** On suppose que $n = p$ premier et que $p$ est la caractéristique de $K$.

**a)** Montrer qu'il existe $u \in L$ tel que $\sigma(u) - u = 1$.

**b)** Montrer que $K(u) = L$.

**c)** On pose $a = u^p - u$. Calculer $\sigma(a)$ et montrer que $a \in K$.

**d)** On pose $P = X^p - X - a$. Montrer que $P$ est irréductible dans $K[X]$ et que $L$ est son corps de rupture sur $K$.

## II

Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5}, j)$, où on note $j = e^{2i\pi/3}$.

**1.** Déterminer tous les plongements de $L$ sur $\mathbb{Q}$.

**2.** L'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$ est-elle normale?

On admettra dans la suite [*question bonus*] que $i \notin L$.

**3.** Déterminer les éléments du groupe de Galois $G$ de $L$ sur $\mathbb{Q}$.

**4.** Déterminer le groupe $\operatorname{Gal}\big(L/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})\big)$ et sa structure.

**5.** Le groupe $G$ contient-il un élément d'ordre 6?

**6.** Déterminer la structure du groupe $G$.

**T.S.V.P.**

## III

**1.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $P$. On suppose que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est galoisienne, et qu'il existe un nombre premier $p$ tel que la réduction de $P$ modulo $p$ soit irréductible.
Démontrer que $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$ est cyclique.

**2.** Soient $a, b \in \mathbb{Q}^{\times}$. On suppose que $a, b, ab \notin \mathbb{Q}^{\times 2}$. Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

- **a)** Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne de degré 4, et que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- **b)** Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.
- **c)** En déduire que $X^4 - 2(a+b)X^2 + (a-b)^2 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible.
- **d)** On suppose que $2(a+b), a-b \in \mathbb{Z}$. Utiliser la question **1.** pour prouver que pour tout $p$ premier, $X^4 - 2(a+b)X^2 + (a-b)^2$ n'est pas irréductible modulo $p$.

$\diamond \diamond \diamond$