CC2 - ALGÈBRE L3A
21 OCTOBRE 2015. DURÉE: 3H

DOCUMENTS, TÉLÉPHONES PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Exercice 1. Soit $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans lui-même de la forme

$$f_{a,b}\colon \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b, \end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{R}^\times$ et $b \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ est un groupe pour la composition des applications.

2) Montrer que l'ensemble $\mathrm{T}(\mathbb{R})$ des applications de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x+b, \end{aligned}$$

avec $b \in \mathbb{R}$, est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

3) Montrer que l'on a un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})/\mathrm{T}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times.$$

Exercice 2. On rappelle que si deux éléments d'ordre fini x, y d'un groupe G commutent et ont des ordres premiers entre eux, alors xy est d'ordre fini et $o(xy) = o(x)o(y)$.

Dans la suite, G désigne un groupe fini d'ordre $n \geq 2$.

1) Montrer qu'il existe un plus petit entier $e \geq 2$ tel que $x^e = 1_G$ pour tout $x \in G$. On le note $\exp(G)$ et on l'appelle *exposant de G*.

2) Calculer $\exp(G)$ lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, D_4, S_3$.

3) Montrer que $\exp(G) = \mathrm{ppcm}(o(x), x \in G)$.

4) On suppose que G est abélien, et on écrit $\exp(G) = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$, où les p_i sont des premiers deux à deux distincts, et $m_i \geq 1$.

a) En utilisant 3), montrer qu'il existe $y_i \in G$ dont l'ordre est divisible par $p_i^{m_i}$.

b) En déduire qu'il existe $x_i \in G$ d'ordre $p_i^{m_i}$, puis qu'il existe $g \in G$ tel que $\exp(G) = o(g)$.

c) Montrer que $|G| = \exp(G)$ si et seulement si G est cyclique.

5) Les résultats de 4)b) et 4 c) sont-ils vrais si G n'est pas supposé abélien ?

Exercice 3. Soit E un ensemble à n éléments, avec $n \geq 3$, et soit $a \in E$. Soit $F = E \setminus \{a\}$.

1) Soit $H_a = \{\sigma \in S(E) \mid \sigma(a) = a\}$. Montrer que l'on a des isomorphismes

$$H_a \simeq S(F) \simeq S_{n-1}.$$

2) On suppose que $n \geq 5$. Soit H un sous-groupe de $S(E)$ d'indice n.

a) On fait agir $S(E)$ sur $X = S(E)/H$ par translation. Montrer que le morphisme $\varphi : S(E) \longrightarrow S(X)$ est non trivial, et que son image contient au moins n éléments distincts (utiliser la transitivité de cette action).

b) En étudiant l'indice de $\ker(\varphi)$ dans $S(E)$, montrer que $|\ker(\varphi)| < \dfrac{n!}{2}$. En déduire que φ est injectif.

c) Montrer que pour tout $h \in H$, $\varphi(h)$ fixe $\overline{\mathrm{Id}}_E \in X$.

d) Déduire des questions précédentes que $H \simeq S_{n-1}$.

3) Résumer le résultat obtenu dans cet exercice.

Exercice 4.

Notation. Si G est un groupe et H un sous-groupe, pour tout $g \in G$, on note

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\},$$

ainsi que

$$HgH = \{h_1 g h_2 \mid h_1, h_2 \in H\}.$$

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X non vide.

1) Montrer que pour tout $x_0 \in X$, et tout $g \in G$, on a $\mathrm{Stab}_G(g{\cdot}x_0) = g\mathrm{Stab}_G(x_0)g^{-1}$.

Dans la suite, on suppose que $|X| \geq 2$ et que G agit *doublement transitivement* sur X, c'est-à-dire que pour tous couples (x_1, x_2) et (y_1, y_2) de points de X tels que $x_1 \neq x_2$ et $y_1 \neq y_2$, il existe $g \in G$ tel que $g{\cdot}x_1 = y_1$ et $g{\cdot}x_2 = y_2$.

Soit $x_0 \in X$ fixé. Dans toute la suite, on note $H = \mathrm{Stab}_G(x_0)$.

2)

a) Montrer que G agit transitivement sur X. Expliciter une bijection entre les ensembles G/H et X.

b) Montrer que H agit transitivement sur $X \setminus \{x_0\}$.

c) Soient g, a dans $G \setminus H$. En considérant les points $g \cdot x_0$ et $a \cdot x_0$ de X, déduire de b) que $a \in HgH$.

d) En déduire que pour tout $g \in G \setminus H$, on a $G = H \sqcup HgH$ (où « $\sqcup$ » désigne l'union disjointe).

3) En déduire que tout sous-groupe de G contenant strictement H est égal à G.

4) Soit N un sous–groupe distingué de G.

a) Montrer que l'ensemble $NH = \{nh| \, n \in N, \, h \in H\}$ est un sous–groupe de G.

b) Déduire de ce qui précède que NH est égal à H ou G.

5)

a) Déduire de 1) que le noyau du morphisme $\varphi \colon G \longrightarrow S(X)$ induit par l'action de G est $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.

b) En déduire que soit N fixe chaque point de X, soit N agit transitivement sur X.