CC1 - ALGÈBRE L3A
29 SEPTEMBRE 2015. DURÉE: 2H

DOCUMENTS, TÉLÉPHONES PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Exercice 1. Soit G un **ensemble** non vide, muni d'une loi interne $*$ associative, possédant un élément neutre 1_G.

On dit qu'un élément $a \in G$ est **simplifiable** si pour tous $b, c \in G$, on a

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \quad \text{et} \quad b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

1. Réinterpréter la propriété « a est simplifiable » en termes des applications

$$\ell_a \colon \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a * x \end{array} \quad \text{et} \quad r_a \colon \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x * a. \end{array}$$

2. On suppose maintenant que G est fini et que tout élément de G est simplifiable. Montrer que tout élément de G possède un inverse à gauche et un inverse à droite, puis en déduire que $(G, *)$ est un groupe.

3. Montrer que le résultat de la question 2. n'est plus vrai si G est infini.

Exercice 2. Soit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et de déterminant 1.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit matriciel.

On se donne un nombre premier p. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on définit $\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $V = U^t$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $U^k, \overline{U}^k$ et $\overline{V}^k$. Quel est l'ordre du sous-groupe $\langle \overline{U} \rangle$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

3. Montrer que l'application

$$\psi \colon \begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ M & \longmapsto & \overline{M} \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Expliciter $\ker(\psi)$.

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \langle \overline{U}, \overline{V} \rangle.$$

5. En déduire soigneusement que ψ est surjective.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. Si $x \in E$ est non nul, on rappelle que τ_x est l'unique endomorphisme de E vérifiant
$$\tau_x(x) = -x \ \text{ et } \tau_x(y) = y \ \text{ pour tout } y \in (\mathbb{R}x)^\perp.$$
C'est un élément du groupe orthogonal $O(E)$. On rappelle que $\tau_x^2 = \mathrm{Id}_E$.

Une *réflexion orthogonale de* E est un élément de la forme $\tau_x, x \in E \setminus \{0\}$.

1. Soient τ, τ' deux réflexions orthogonales de E. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{O}(E)$ telle que $\tau' = f \circ \tau \circ f^{-1}$. On pourra d'abord montrer que pour toute réflexion orthogonale, il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice représentative est $\begin{pmatrix} -1 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix}$.

2. Donner un morphisme de groupes non trivial de $\mathrm{O}(E)$ dans $\mathbb{C}^\times$.

3. Soit $\varphi : \mathrm{O}(E) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que pour toute réflexion orthogonale τ, on a $\varphi(\tau) = \pm 1$.

b) Utiliser 1. pour montrer que toutes les réflexions orthogonales ont même image par φ.

c) En déduire qu'il n'existe qu'un morphisme de groupes non trivial de $\mathrm{O}(E)$ dans $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 4. Soit G un groupe , et soit S une partie de G.

1. Soit $H = \langle S \rangle$. Montrer que H est distingué dans G si, et seulement si, on a $gsg^{-1} \in H$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in S$.

2. Pour tous $x, y \in G$, on pose $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ et on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments $[x, y]$ lorsque x, y parcourent G.

a) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $D(G) = \{1_G\}$?

b) Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ pour tous $x, y \in G$.

c) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.