

Introduction

Ce mémoire, rédigé en vue de l'habilitation à diriger les recherches, a pour but de présenter les principaux résultats contenus dans huit articles parus ou à paraître, écrits durant les six dernières années [3,5,8–12,14]. Ces travaux sont consacrés dans une large mesure au comportement asymptotique en temps des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, de type parabolique ou hyperbolique avec amortissement, définies sur l'espace \mathbf{R}^n tout entier. On peut les regrouper en deux catégories, qui se recoupent partiellement : les travaux touchant à l'existence et la stabilité d'*ondes progressives* [3,5,8–10,14], et ceux qui mettent en évidence la convergence vers des solutions asymptotiquement *autosimilaires* [5,11,12,14].

Dans un souci d'unité, plusieurs articles figurant dans la liste de publications ci-dessous ont été écartés de la sélection présentée pour l'habilitation. Il en va ainsi d'un travail ancien sur l'existence de variétés invariantes pour des problèmes d'évolution mal posés [4], ainsi que de deux articles récents concernant l'équation de Kadomtsev-Petviashvili [15] et la dynamique des systèmes gradients étendus [16]. Les notes [7,13,17] n'ont pas été retenues non plus, mais les énoncés qu'elles contiennent ont été pris en considération dans le texte de ce mémoire. De façon générale, la présentation met l'accent sur les résultats les plus récents, qui concernent l'équation des ondes avec amortissement, et traite de façon plus succincte les travaux antérieurs consacrés à des équations ou des systèmes de réaction-diffusion.

Les trois premiers chapitres contiennent les énoncés des résultats principaux, précédés d'une brève introduction et complétés de quelques commentaires concernant leur démonstration. Dans un premier chapitre, qui a pour thème l'équation de Ginzburg-Landau réelle, on étudie l'évolution de l'interface séparant deux solutions stationnaires périodiques de périodes différentes. Suivant la stabilité de ces deux états limites, on observe la formation d'une onde progressive (cas monostable) ou d'un profil autosimilaire (cas bistable). Le deuxième chapitre est consacré à un système de réaction-diffusion de type autocatalytique, pour lequel on montre l'existence et la stabilité locale d'une famille d'ondes progressives. Ces solutions sont importantes du point de vue expérimental, car elles décrivent le comportement du système lorsque les deux composants (réactant et catalyseur) sont initialement séparés. Dans le troisième chapitre, on étudie l'existence et la stabilité d'ondes progressives pour l'équation hyperbolique amortie $\varepsilon u_{tt} + u_t = \Delta u + f(u)$, où $\varepsilon > 0$ et f est une non-linéarité de type monostable ou bistable. Le but est de généraliser à ce système la plupart des résultats connus dans le cas parabolique $\varepsilon = 0$, en particulier les énoncés de stabilité locale obtenus à l'aide de fonctionnelles d'énergie, les propriétés de stabilité globale découlant du principe du maximum, et les résultats plus fins décrivant le comportement asymptotique en temps des perturbations.

Le dernier chapitre de ce mémoire, rédigé dans un esprit un peu différent, a pour but de familiariser le lecteur avec la méthode utilisée dans [11,12,14] pour montrer la convergence des solutions vers des profils autosimilaires. Cette technique, qui repose sur l'emploi des *variables d'échelle* $\xi = x/\sqrt{t}$, $\tau = \log t$, n'avait apparemment jamais été appliquée à des équations hyperboliques, et rarement à des systèmes à coefficients non constants. Son efficacité est démontrée ici sur trois exemples de complexité croissante : l'équation de la chaleur non linéaire, une équation hyperbolique amortie à coefficients non constants, et l'équation (3.6) régissant les perturbations d'une onde progressive dans le cas monostable critique.

Existence et stabilité d'ondes progressives

La difficulté principale des systèmes étudiés dans ce mémoire, en ce qui concerne le comportement des solutions pour les grands temps, réside dans le fait qu'ils sont définis sur des régions *non bornées* de l'espace. En effet, ces mêmes systèmes possèdent une dynamique très simple lorsqu'on les considère sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ et que l'on impose des conditions adéquates à la frontière : toutes les solutions convergent vers les points d'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce résultat est classique pour des systèmes gradients tels que l'équation de Ginzburg-Landau (1.1) ou l'équation hyperbolique amortie (3.1). Dans le cas du système de réaction-diffusion (2.1), cette propriété requiert une démonstration *ad hoc*, que l'on trouvera dans [Ma].

La situation est très différente en domaine non borné, où des considérations élémentaires montrent que les solutions ne convergent généralement pas vers des points d'équilibre. Ainsi, l'équation parabolique $u_t = u_{xx} + u - u^3$ possède, pour tout $c \geq 2$, des solutions de la forme $u(x, t) = h(x - ct)$, où h est une fonction décroissante vérifiant $h(-\infty) = 1$, $h(+\infty) = 0$ (fig. 1). Ces solutions en translation uniforme, qui constituent les exemples les plus simples d'*ondes progressives* ou *fronts*, décrivent l'invasion à vitesse constante de la région instable $u = 0$ par la région stable $u = 1$. Il est clair qu'elles ne convergent, au sens d'une distance invariante par translation, vers aucun point d'équilibre du système. On peut toutefois noter que $h(x - ct)$ converge vers 1 uniformément sur tout compact lorsque $t \rightarrow +\infty$.

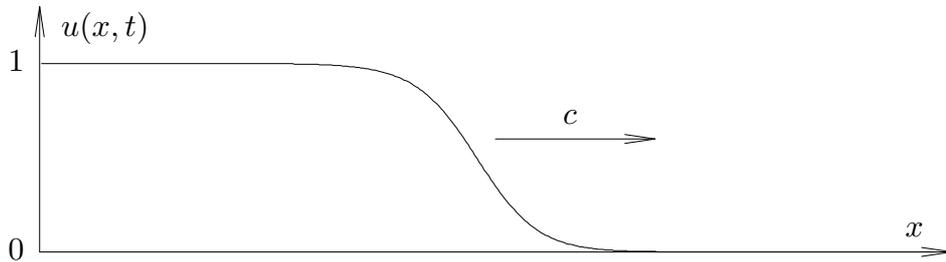


Fig. 1: Une onde progressive de l'équation $u_t = u_{xx} + u - u^3$, de vitesse minimale $c = 2$.

Tous les systèmes étudiés ci-dessous possèdent de telles ondes progressives, mais ces dernières ont souvent une expression plus complexe. Ainsi, pour l'équation de Ginzburg-Landau (1.1), on montre l'existence d'une famille de fronts reliant deux états stationnaires périodiques en espace, de périodes différentes. Ces ondes progressives ne sont plus en translation uniforme, mais ressemblent à un profil rigide qui se déplace vers la droite à vitesse constante, en détruisant un motif périodique devant lui et en le remplaçant par un autre derrière lui (fig. 2). Dans le cas du système de réaction-diffusion (2.1), qui modélise une réaction chimique autocatalytique de la forme $A + B \rightarrow 2B$, les ondes progressives sont à nouveau en translation uniforme, mais possèdent deux composantes α, β représentant respectivement les concentrations du réactant A et de l'autocatalyseur B (fig. 3). Le front décrit la progression spatiale de la réaction, au cours de laquelle le réactant A est remplacé par le catalyseur (et produit) B .

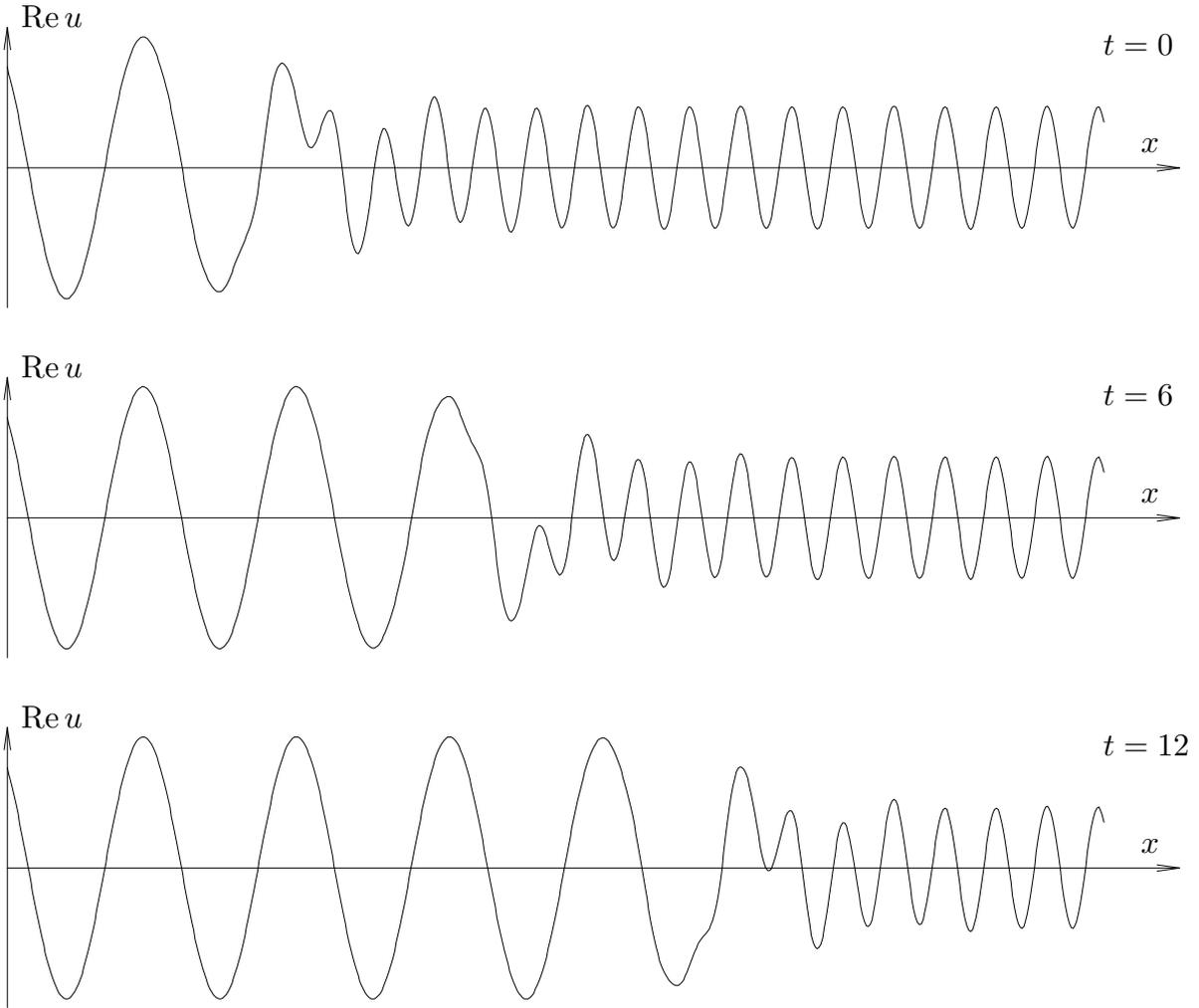


Fig. 2: La partie réelle d'une onde progressive de l'équation de Ginzburg-Landau (1.1), reliant des solutions stationnaires périodiques de périodes différentes. Les valeurs des paramètres sont $q_- = -0.3$, $q_+ = 0.9$, et $c = 5$, cf. (1.2).

Les expériences numériques, ainsi que les résultats rigoureux obtenus dans quelques cas simples, indiquent que les ondes progressives jouent un rôle très important dans la dynamique des systèmes dissipatifs étendus, comparable à celui des points d'équilibre pour les systèmes en domaine borné. Dans le cas de l'équation parabolique $u_t = \Delta u + u - u^3$, il semble en effet que la solution issue d'une donnée initiale positive et bornée converge typiquement vers une superposition d'ondes progressives lorsque $t \rightarrow +\infty$, mais cette affirmation n'a pas encore été complètement démontrée. Quoiqu'il en soit, l'étude de l'existence et de la stabilité des ondes progressives est une étape indispensable vers une meilleure compréhension du comportement de tout système dynamique invariant par translation, en particulier du système associé à une équation aux dérivées partielles à coefficients constants définie sur la droite réelle \mathbf{R} ou sur le cylindre $\mathbf{R} \times \Omega'$, où $\Omega' \subset \mathbf{R}^{n-1}$.

Tous les exemples d'ondes progressives étudiés dans ce mémoire sont essentiellement

unidimensionnels, soit que le système en question soit défini sur \mathbf{R} , soit que le profil de l’onde ne dépende pas des variables transverses. Il s’ensuit que ce profil est solution d’une équation ou d’un système d’équations différentielles ordinaires dans la variable non bornée, que l’on interprétera comme une variable d’évolution. Montrer l’existence de l’onde progressive revient alors à construire une trajectoire *hétérocline* de ce système, reliant entre eux deux points d’équilibre distincts. Pour l’équation de réaction-diffusion (2.1) et l’équation hyperbolique amortie (3.1), une analyse du flot dans l’espace de phase permet de montrer l’existence d’une telle trajectoire par des techniques élémentaires. Dans le cas de l’équation de Ginzburg-Landau (1.1), le système différentiel déterminant le profil de l’onde est de taille infinie, et la construction de la trajectoire hétérocline nécessite d’abord la réduction à une variété invariante de dimension infinie, puis une étude détaillée du système projeté sur cette variété.

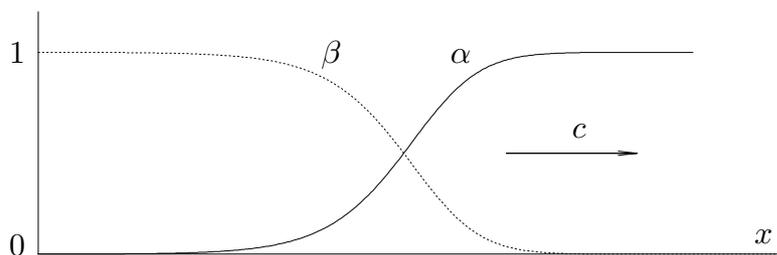


Fig. 3: Les deux composantes α et β d’une onde progressive du système de réaction-diffusion (2.1). Les valeurs des paramètres sont $D = 2$, $k = 0$ et $c = 2D^{1/2}$.

Si les techniques utilisées ici ne permettent de construire que des ondes progressives unidimensionnelles, les méthodes développées pour étudier la stabilité de ces ondes sont plus générales, et permettent de considérer des perturbations quelconques. Ainsi, dans le chapitre 3 consacré à l’équation hyperbolique amortie (3.1), on montre la stabilité des ondes progressives vis-à-vis de perturbations multidimensionnelles dans des espaces de Sobolev à poids, à l’aide de diverses fonctionnelles d’énergie. La même méthode est employée dans le chapitre 2 pour étudier la stabilité des ondes progressives du système de réaction-diffusion (2.1). Dans certains cas, l’utilisation conjointe de fonctionnelles d’énergie et de variables d’échelle permet d’obtenir des résultats plus précis, et de décrire complètement le comportement asymptotique en temps des perturbations.

Convergence vers des solutions autosimilaires

De même que les ondes progressives sont dues à l’invariance par translation, l’invariance sous les dilatations spatiales est à l’origine d’un autre type de solutions importantes pour le comportement asymptotique en temps : les solutions *autosimilaires* de la forme $u(x, t) = t^{-\alpha}\Phi(xt^{-\beta})$, où α est réel, β est positif, et $\Phi(x) \equiv u(x, 1)$ est le *profil* de la solution. De telles expressions sont invariantes sous la transformation d’échelle $u(x, t) \mapsto L^\alpha u(L^\beta x, Lt)$, pour tout $L > 0$. Noter que cette transformation n’est pas une symétrie exacte des systèmes étudiés dans ce mémoire, de sorte qu’aucun d’entre eux ne possède de solution exactement autosimilaire (non triviale). Toutefois, les résultats présentés dans les chapitres 1 et 4 montrent que certains de ces systèmes possèdent des solutions *asymptotiquement* autosimilaires lorsque $t \rightarrow +\infty$, qui décrivent le comporte-

ment des trajectoires issues d'une certaine classe de données initiales. Dans ces exemples, le profil Φ est solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire, qui ne dépend du système original qu'au travers de quelques caractéristiques essentielles, telles que le comportement à l'infini des coefficients ou les conditions aux limites imposées aux solutions. Tous les systèmes étudiés ici étant de type diffusif, l'exposant β est toujours égal à $1/2$ (comme dans l'équation de la chaleur), mais la valeur de α varie d'un problème à l'autre.

Le premier exemple de ce phénomène est l'équation de Ginzburg-Landau (1.1), où une solution autosimilaire décrit le mélange diffusif de deux états stationnaires stables, de périodes différentes. Le module $r(x, t)$ et la phase $\varphi(x, t)$ de cette solution vérifient $r^2 + \varphi_x^2 = 1$ et $\varphi(x, t) = t^{1/2}\varphi_*(xt^{-1/2})$, où φ_* est un profil uniquement déterminé par les périodes des deux états limites. En particulier, la solution converge uniformément sur tout compact vers un troisième état stationnaire, de longueur d'onde intermédiaire.

Le second exemple concerne l'équation hyperbolique amortie $\varepsilon u_{tt} + u_t = (a(x)u_x)_x + f(u)$, où l'on suppose que le coefficient de diffusion $a(x)$ converge vers des limites positives a_{\pm} lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, et que la nonlinéarité $f(u)$ s'annule suffisamment vite au voisinage de l'origine. Les petites solutions de ce système convergent alors vers zéro comme $t^{-1/2}\varphi_0(xt^{-1/2})$, où φ_0 est une fonction gaussienne qui ne dépend que des valeurs limites a_{\pm} . En particulier, ce profil est indépendant du paramètre $\varepsilon > 0$, de sorte que le comportement pour les grands temps est semblable à celui des solutions de l'équation parabolique obtenue en posant $\varepsilon = 0$.

Enfin, le dernier exemple de convergence vers des solutions autosimilaires est fourni par les perturbations des ondes progressives. Considérons en effet l'équation parabolique $u_t = u_{xx} + u - u^3$, qui admet des ondes progressives monotones de la forme $h(x - ct)$ pour tout $c \geq 2$ (fig. 1). Dans le cas critique $c = 2$, on montre dans le chapitre 4 que les perturbations, une fois écrites dans le référentiel de l'onde, se comportent pour les grands temps comme $h'(x)t^{-3/2}\Phi(xt^{-1/2})$, où Φ est un profil universel. Un résultat semblable est obtenu pour l'équation hyperbolique $\varepsilon u_{tt} + u_t = u_{xx} + u - u^3$. On remarquera le taux de décroissance inhabituel $\alpha = 3/2$, qui est dû au comportement à l'infini du terme de transport dans l'opérateur linéarisé autour de l'onde progressive.

1. L'équation de Ginzburg-Landau réelle

L'équation de Ginzburg-Landau à une dimension

$$u_t = u_{xx} + u - |u|^2 u, \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}_+$, $u : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$, est une équation d'enveloppe modélisant la formation de structures spatiales dans de nombreux systèmes dissipatifs étendus [CH], [Mi]. Elle y décrit l'évolution des solutions périodiques en espace qui bifurquent d'un état stationnaire homogène devenu instable, et permet en particulier de comprendre le mécanisme de sélection de la longueur d'onde. Des exemples classiques de bifurcations où l'équation (1.1) joue le rôle d'une "forme normale" sont l'apparition de rouleaux de convection dans l'expérience de Rayleigh-Bénard, et la formation de tourbillons dans l'écoulement cylindrique de Couette-Taylor.

L'équation (1.1) possède les solutions stationnaires explicites

$$u_q(x) = \sqrt{1 - q^2} e^{iqx}, \quad x \in \mathbf{R},$$

pour tout $q \in [-1, 1]$. Un argument dû à Eckhaus [Eck] montre que u_q est une solution linéairement stable de (1.1), pour des perturbations dans $L^2(\mathbf{R})$, si et seulement si $q^2 \leq 1/3$. En fait, on peut montrer que l'équation (1.1) ne possède aucune autre solution stationnaire bornée linéairement stable [7]. En outre, si $q^2 < 1/3$, u_q est asymptotiquement stable pour des perturbations dans $H^1(\mathbf{R})$ [6].

Les travaux présentés ci-dessous constituent des réponses partielles à la question générale suivante. Soient $q_-, q_+ \in [-1, 1]$, $\varphi_-, \varphi_+ \in \mathbf{R}$, et soit $u_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction (mesurable) bornée vérifiant les conditions aux limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |u_0(x) - u_{q_-}(x) e^{i\varphi_-}| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |u_0(x) - u_{q_+}(x) e^{i\varphi_+}| = 0. \quad (1.2)$$

Soit enfin $u(x, t)$ la solution de (1.1) vérifiant la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$. Que peut-on dire du comportement de $u(x, t)$ pour les grands temps? En particulier, ce comportement est-il entièrement déterminé par les données au bord q_{\pm}, φ_{\pm} ?

En l'absence d'un principe de comparaison pour l'équation (1.1), il est difficile de répondre à cette question dans toute sa généralité. Néanmoins, il est clair qu'il convient de distinguer plusieurs cas, selon la stabilité des états limites u_{q_-} et u_{q_+} . Lorsqu'un seul d'entre eux est stable, on s'attend à la formation d'une *onde progressive*, ou *front de propagation*, décrivant l'invasion de la région instable par le profil stable. Des résultats généraux concernant l'existence de telles ondes progressives pour l'équation (1.1) sont présentés dans la section 1.1 ci-dessous. Lorsque u_{q_-} et u_{q_+} sont tous deux stables, ces deux états se mélangent de façon diffuse, et la solution $u(x, t)$ converge localement, à une phase près, vers un troisième état stable $u_{q_*}(x)$, avec $q_- \leq q_* \leq q_+$ ou $q_+ \leq q_* \leq q_-$. L'existence et la stabilité du profil autosimilaire décrivant ce *mélange diffusif* seront discutés dans la section 1.2.

1.1. Le cas monostable : existence d'ondes progressives [3,8]

Soient $q_-, q_+ \in \mathbf{R}$ tels que $|q_-| < |q_+| \leq 1$, et soit $c > 0$. Dans cette section, on appellera *onde progressive* (ou simplement *front*) une solution de l'équation (1.1) de la forme $u(x, t) = W(x, x - ct)$, où $W : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction régulière vérifiant les conditions aux limites

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} W(x, \xi) = u_{q_-}(x), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} W(x, \xi) = u_{q_+}(x), \quad (1.3)$$

uniformément en $x \in \mathbf{R}$. Une telle solution ressemble typiquement à un profil rigide en translation uniforme vers la droite, envahissant la structure périodique u_{q_+} devant lui et la remplaçant derrière lui par u_{q_-} (fig. 2).

L'existence d'ondes progressives est facile à montrer lorsque $q_+ = 1$, c'est-à-dire $u_{q_+} = 0$. Dans ce cas, la fonction $W(x, \xi)$ se factorise en $e^{iq_-x} f(\xi)$, où f est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$f''(\xi) + (c + 2iq_-)f'(\xi) + (1 - q_-^2 - |f(\xi)|^2)f(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

et vérifie les conditions aux limites $f(-\infty) = (1 - q_-^2)^{1/2}$, $f(+\infty) = 0$. En interprétant $\xi \in \mathbf{R}$ comme une variable dynamique, le problème se ramène donc à montrer l'existence d'une orbite hétérocline du système (1.4) reliant le point d'équilibre $(1 - q_-^2)^{1/2}$ à l'origine. Ceci se fait aisément en remarquant que (1.4) est un *système gradient* pour la fonction de Lyapunov

$$H(f, f') = \frac{1}{2}|f'|^2 + \frac{1}{2}(1 - q_-^2)|f|^2 - \frac{1}{4}|f|^4,$$

et que le domaine $\{(f, f') \in \mathbf{C}^2 \mid |f| < (1 - q_-^2)^{1/2}, H(f, f') < \frac{1}{4}(1 - q_-^2)^2\}$ est inclus dans le bassin d'attraction de l'origine [3]. Noter qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $q_-^2 < 1/3$, c'est-à-dire que le motif périodique créé par le front est stable.

Le cas où $u_{q_+} \neq 0$ est nettement plus difficile à traiter, et on ne dispose encore que de résultats partiels. On cherche des ondes progressives sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} A_n(t - x/c) e^{iq_n x}, \quad (1.5)$$

où $q_n = q_- + n(q_+ - q_-)$, $n \in \mathbf{Z}$. Les amplitudes $A_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ sont solutions du système différentiel

$$-\frac{1}{c^2}A_n'' + \left(1 + \frac{2iq_n}{c}\right)A_n' = (1 - q_n^2)A_n - F_n(A), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (1.6)$$

où A désigne la famille $\{A_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ et

$$F_n(A) = \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} A_{n_1} A_{n_2} \bar{A}_{-n_3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Le système (1.6) possède deux cercles de points d'équilibre C_-, C_+ correspondant aux solutions stationnaires u_{q_-}, u_{q_+} de (1.1) :

$$C_- = \left\{ A \mid |A_n| = \sqrt{1 - q_-^2} \delta_{n,0} \right\}, \quad C_+ = \left\{ A \mid |A_n| = \sqrt{1 - q_+^2} \delta_{n,1} \right\}.$$

En interprétant à nouveau $\eta = t - x/c$ comme une variable dynamique, le problème revient donc à montrer l'existence d'une trajectoire hétérocline de (1.6) vérifiant

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} A(\eta) \in C_+ , \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} A(\eta) \in C_- . \quad (1.7)$$

La difficulté majeure de cette approche réside dans le fait que le problème de Cauchy pour le système (1.6) est *mal posé*. Un tel obstacle se produit fréquemment lorsqu'on interprète un problème elliptique sur \mathbf{R} (ou dans un domaine cylindrique) comme un problème d'évolution dans la variable non bornée. Dans le cas présent, cette difficulté sera contournée en remarquant que l'origine $A = 0$ possède une variété centrale-stable (de dimension infinie) sur laquelle le problème de Cauchy pour (1.6) est bien posé pour les "temps" positifs. Si $c > 0$ est suffisamment grand, cette variété comprend les cercles C_- , C_+ , et contiendra donc également la trajectoire hétérocline cherchée (si elle existe). Ce point étant acquis, la démonstration de l'existence de cette trajectoire se fait par comparaison avec le cas limite $c = +\infty$, moyennant des restrictions sur les valeurs de q_- et q_+ . Ces résultats, brièvement développés ci-dessous, ont été obtenus en collaboration avec J.-P. Eckmann et C.E. Wayne.

Dans la limite $c \rightarrow +\infty$, le système (1.6) se réduit à

$$A'_n = (1 - q_n^2)A_n - F_n(A) , \quad n \in \mathbf{Z} . \quad (1.8)$$

Contrairement à (1.6), le problème de Cauchy pour (1.8) est bien posé dans de nombreux espaces, notamment dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^1 = \left\{ A \mid \sum_{n \in \mathbf{Z}} (1 + |n|)^2 |A_n|^2 < \infty \right\} .$$

En outre, (1.8) un système *gradient* pour la fonction de Lyapunov

$$V(A) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (q_n^2 - 1) |A_n|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n_1 + \dots + n_4 = 0} A_{n_1} A_{n_2} \bar{A}_{-n_3} \bar{A}_{-n_4} .$$

Une analyse détaillée des solutions stationnaires de l'équation de Ginzburg-Landau [8] révèle que, si le couple (q_-, q_+) est compris dans la région $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^2$ définie par

$$\mathcal{E} = \left\{ (q_-, q_+) \mid 1/\sqrt{3} < q_+ < 1, \quad q_+ - \sqrt{6q_+^2 - 2} < q_- < q_+ - 1 \right\} ,$$

alors le système (1.8) possède exactement trois familles de points d'équilibre: l'origine $A = 0$, et les deux cercles C_- , C_+ . En outre, on a les inégalités

$$V(0) = 0 > V(C_+) = -\frac{1}{4}(1 - q_+^2)^2 > V(C_-) = -\frac{1}{4}(1 - q_-^2)^2 .$$

Il s'ensuit immédiatement que toute trajectoire $A(\eta)$ de (1.8) vérifiant $V(A(0)) < V(C_+)$ converge vers C_- lorsque $\eta \rightarrow +\infty$. En particulier, la variété instable du cercle C_+ , qui est de dimension deux si $(q_-, q_+) \in \mathcal{E}$, est contenue dans le bassin d'attraction de C_- . Ceci montre l'existence d'une solution de (1.8) vérifiant les conditions aux limites (1.7). En remplaçant dans (1.5) avec $c = +\infty$, on voit que cette solution représente une trajectoire *hétérocline en temps* de l'équation de Ginzburg-Landau, reliant entre elles les solutions périodiques u_{q_+} et u_{q_-} .

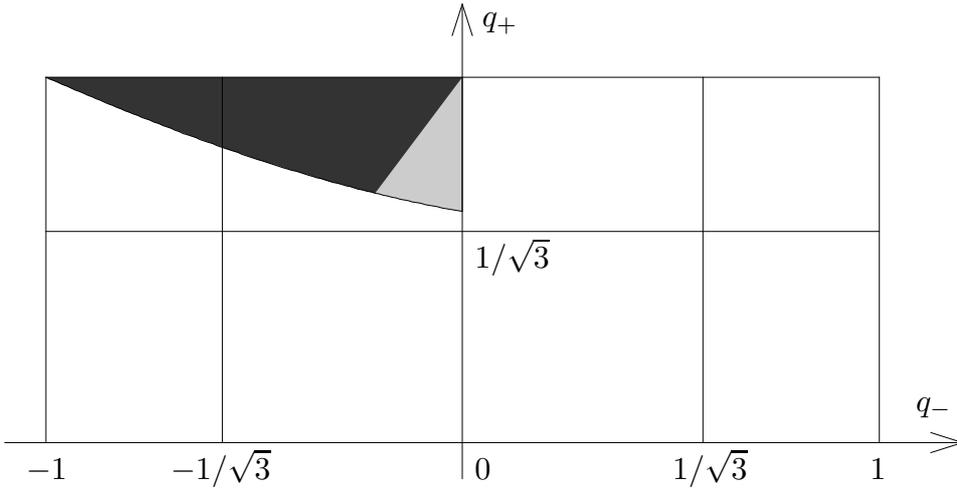


Fig. 4: La région \mathcal{E} du plan (q_-, q_+) dans laquelle nous pouvons montrer l'existence d'une solution de (1.8) vérifiant (1.7) est représentée en noir dans cette figure.

Lorsque $2 < c < \infty$, les valeurs propres du système (1.6) linéarisé autour de l'origine $A = 0$ forment deux familles disjointes $\lambda_n^\pm(c)$ données par

$$\lambda_n^\pm(c) = \frac{c}{2} \left((c + 2iq_n) \pm \sqrt{c^2 - 4 + 4icq_n} \right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Il est facile de voir que $\lambda_n^-(c) \rightarrow 1 - q_n^2$ lorsque $c \rightarrow +\infty$ et que $\text{Re}(\lambda_n^+(c)) \geq c^2/2$. Il suit alors du théorème de la variété centrale [4] que le point d'équilibre $A = 0$ possède une variété centrale-stable \mathcal{V}_{cs} de dimension infinie, tangente à l'origine au sous-espace spectral correspondant à la famille $\{\lambda_n^-\}_{n \in \mathbf{Z}}$. Cette variété est de taille $\mathcal{O}(c)$ lorsque $c \rightarrow +\infty$, et contient les cercles C_-, C_+ si $c > 0$ est suffisamment grand. En outre, le système (1.6) définit sur \mathcal{V}_{cs} un semi-flot pour les temps positifs, qui coïncide avec celui de (1.8) à des corrections d'ordre $1/c^2$ près. Or, si $(q_-, q_+) \in \mathcal{E}$, le système (1.8) possède une trajectoire hétérocline reliant le cercle C_+ (qui est normalement hyperbolique) au cercle C_- (qui est normalement attractif). Une telle trajectoire est structurellement stable, et persiste donc pour le système (1.6) si $c > 0$ est suffisamment grand. Nous pouvons ainsi énoncer notre premier résultat :

Théorème 1.1. *Soit $(q_-, q_+) \in \mathcal{E}$. Il existe $c_0 > 0$ tel que, pour tout $c \geq c_0$, le système (1.6) possède une trajectoire hétérocline vérifiant (1.7).*

Remarques.

1. Les ondes progressives construites ci-dessus relient deux états stationnaires dont l'un (u_{q_+}) est toujours *instable*. La solution u_{q_-} à l'arrière du front est stable ou non, suivant le signe de $q_- + 1/\sqrt{3}$ (fig. 4).

2. Comme la période $2\pi/q_+$ de la solution u_{q_+} envahie par le front est inférieure à celle de la solution u_{q_-} créée à l'arrière, l'onde progressive $u(x, t)$ présente nécessairement un nombre infini de *sauts de phase*, c'est-à-dire de points $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ où le module $|u|$ s'annule et où la phase locale $-i \log(u/|u|)$ a une discontinuité (saut de 2π). Ces sauts de phase sont étudiés plus en détail dans [8].

3. Lorsque $q_+ = 1$, c'est-à-dire $u_{q_+} = 0$, la stabilité linéaire des ondes progressives $e^{iq_-x} f(x - ct)$ construites ci-dessus est discutée dans [7]. Aucun résultat n'est connu dans le cas général où $u_{q_+} \neq 0$.

1.2. Le cas bistable : mélange diffusif [12]

Nous construirons dans cette section des solutions $u(x, t)$ de l'équation de Ginzburg-Landau dont le module ne s'annule jamais. Nous aurons alors avantage à utiliser les coordonnées polaires (r, φ) définies par $u(x, t) = r(x, t)e^{i\varphi(x, t)}$. L'équation (1.1) devient dans ces variables

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + 2\frac{r_x\varphi_x}{r}, \quad r_t = r_{xx} + r(1 - r^2 - \varphi_x^2). \quad (1.9)$$

Remarquons que la phase φ n'intervient au membre de droite qu'au travers de sa dérivée φ_x (ceci est dû à l'invariance de phase de l'équation de Ginzburg-Landau). On peut donc introduire la nouvelle variable $q = \varphi_x$ et récrire le système (1.9) sous la forme

$$q_t = q_{xx} + 2\partial_x\left(\frac{r_x q}{r}\right), \quad r_t = r_{xx} + r(1 - r^2 - q^2). \quad (1.10)$$

Soient $q_-, q_+ \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Nous cherchons des solutions (q, r) de (1.10) vérifiant les conditions aux limites

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = q_{\pm}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x, t) = \sqrt{1 - q_{\pm}^2}. \quad (1.11)$$

Inspirés par les résultats antérieurs de Bricmont et Kupiainen [BK1], nous introduisons les variables d'échelle (ou variables autosimilaires) $\xi = x/\sqrt{t}$, $\tau = \log t$. Ces variables seront discutées plus en détail dans le chapitre 4. Les fonctions transformées d'échelle (η, ρ) définies par

$$q(x, t) = \eta(x/\sqrt{t}, \log t), \quad r(x, t) = \rho(x/\sqrt{t}, \log t),$$

sont alors solutions du système

$$\eta_{\tau} = \eta_{\xi\xi} + \frac{\xi}{2}\eta_{\xi} + 2\partial_{\xi}\left(\frac{\rho_{\xi}\eta}{\rho}\right), \quad \rho_{\tau} = \rho_{\xi\xi} + \frac{\xi}{2}\rho_{\xi} + e^{\tau}\rho(1 - \rho^2 - \eta^2), \quad (1.12)$$

et vérifient les mêmes conditions aux limites que (q, r) dans (1.11).

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus en collaboration avec A. Mielke. Notre première observation est que le système non autonome (1.12) possède asymptotiquement, lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, un point d'équilibre (η_*, ρ_*) défini par les relations $\rho_* = (1 - \eta_*^2)^{1/2}$ et

$$\left(\frac{1 - 3\eta_*^2}{1 - \eta_*^2}\eta_*'\right)' + \frac{\xi}{2}\eta_*' = 0. \quad (1.13)$$

On peut en effet montrer le résultat suivant :

Proposition 1.2. *Pour tout $q_-, q_+ \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, l'équation différentielle (1.13) possède une unique solution $\eta_* \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$ telle que $\eta_*(\xi) \rightarrow q_{\pm}$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$. Cette*

solution est une fonction monotone de ξ , et il existe $C > 0$ tel que $|\eta'_*(\xi)| \leq Ce^{-\xi^2/4}$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$. En outre,

$$\int_{-\infty}^0 (\eta_*(\xi) - q_-) d\xi + \int_0^{\infty} (\eta_*(\xi) - q_+) d\xi = 0 .$$

Remarque. La démonstration de la proposition 1.2 dans [12] fait appel à la théorie des opérateurs maximaux monotones. On peut également obtenir ce résultat par une analyse élémentaire, mais laborieuse, des solutions de l'équation différentielle (1.13).

Le reste du travail consiste à montrer la stabilité, pour le système (1.12), du point d'équilibre asymptotique (η_*, ρ_*) dont l'existence est garantie par la proposition 1.2. Pour ce faire, il est commode d'introduire la primitive

$$\varphi_*(\xi) = q_- \xi + \int_{-\infty}^{\xi} (\eta_*(z) - q_-) dz \equiv q_+ \xi - \int_{\xi}^{\infty} (\eta_*(z) - q_+) dz , \quad \xi \in \mathbf{R} .$$

Noter que $\varphi'_* = \eta_*$, et que $\varphi_*(\xi) - q_{\pm} \xi \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$. On définit alors de nouvelles variables ψ et s par les relations

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sqrt{t} \left(\varphi_*(x/\sqrt{t}) + \psi(x/\sqrt{t}, \log t) \right) , \\ r(x, t) &= \sqrt{1 - (\varphi_x(x, t))^2} \exp \left(\frac{1}{2} s(x/\sqrt{t}, \log t) \right) . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Le changement de variables (1.14) appelle quelques commentaires. Tout d'abord, les conditions aux limites (1.11) sont satisfaites si et seulement si les fonctions ψ_{ξ} et s convergent vers zéro lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$. D'autre part, la seconde relation dans (1.14) suggère de résoudre le système (1.9) dans un espace fonctionnel où φ_x et r possèdent le même degré de régularité. Au vu de ces deux remarques, il est naturel de supposer que $\psi \in H^2(\mathbf{R})$ et $s \in H^1(\mathbf{R})$. Enfin, la forme du système (1.12) indique clairement que le module ρ est asymptotiquement assujéti à la dérivée de la phase η , dans le sens que $\rho^2 = 1 - \eta^2 + \mathcal{O}(e^{-\tau})$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. La variable s dans (1.14) est précisément une mesure de cet assujettissement, car $r^2 + \varphi_x^2 = 1 + \mathcal{O}(|s|)$ lorsque $s \rightarrow 0$.

Les fonctions $\psi(\xi, \tau)$, $s(\xi, \tau)$ définies par (1.14) sont solutions d'un système parabolique semi-linéaire assez complexe, qu'il est inutile de reproduire ici [12]. La nécessité de résoudre ce système dans l'espace $H^2(\mathbf{R}) \times H^1(\mathbf{R})$, qui présente un déséquilibre entre ψ et s quant au nombre de dérivées, pose des problèmes techniques analogues à ceux que l'on rencontre dans les systèmes quasi-linéaires. En utilisant diverses estimations d'énergie dans les variables autosimilaires, on montre le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Soient $q_-, q_+ \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, et soit η_* donné par la proposition 1.2. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\tau_0 > 0$ tels que, pour tout $(\psi_0, s_0) \in H^2(\mathbf{R}) \times H^1(\mathbf{R})$ vérifiant $\|\psi_0\|_{H^2} + \|s_0\|_{H^1} \leq \varepsilon_0$, le système (1.9) possède une unique solution de la forme (1.14), où $(\psi, s) \in \mathcal{C}^0([\tau_0, +\infty), H^2 \times H^1)$ satisfait à la condition initiale $(\psi(\tau_0), s(\tau_0)) = (\psi_0, s_0)$. En outre, pour tout $\gamma < 3/4$, on a les estimations*

$$\|\psi(\cdot, \tau)\|_{H^2} = \mathcal{O}(e^{-\gamma\tau}) , \quad \|s(\cdot, \tau)\|_{H^1} = \mathcal{O}(e^{-\tau}) , \quad \tau \rightarrow +\infty . \tag{1.15}$$

En termes des variables originales, le théorème 1.3 montre que le profil autosimilaire

$$U(x, t) = \sqrt{1 - \eta_*(x/\sqrt{t})^2} \exp(i\sqrt{t}\varphi_*(x/\sqrt{t})) , \quad x \in \mathbf{R} , \quad t > 0 , \quad (1.16)$$

qui est asymptotiquement (lorsque $t \rightarrow +\infty$) une solution de l'équation (1.1), est stable pour des perturbations dans $H^2(\mathbf{R})$. Si $u(x, t) = r(x, t)e^{i\varphi(x, t)}$, où (φ, r) est la solution de (1.14) donnée par le théorème 1.3, alors l'estimation (1.15) implique que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, t) - U(x, t)| = \mathcal{O}(t^{-\nu/4}) , \quad t \rightarrow +\infty ,$$

pour tout $\nu < 1$. En particulier, si $q_* = \eta_*(0)$ et $\theta_* = \varphi_*(0)$, il s'ensuit que

$$\sup_{|x| \leq K} \left| u(x, t) - \sqrt{1 - q_*^2} e^{i(\sqrt{t}\theta_* + q_*x)} \right| = \mathcal{O}(t^{-\nu/4}) , \quad t \rightarrow +\infty , \quad (1.17)$$

pour tout $K > 0$. Ce résultat montre que la solution $u(x, t)$ converge uniformément sur tout compact vers le cercle de points d'équilibre $C_* = \{(1 - q_*^2)^{1/2} e^{i(q_*x + \varphi)} \mid \varphi \in \mathbf{R}\}$, mais ne converge vers aucun point du cercle en particulier, à cause du facteur de phase $e^{i\sqrt{t}\theta_*}$ [BK1].

Remarques.

1. Le profil autosimilaire (1.16) vérifie les conditions aux limites (1.2) avec $\varphi_- = \varphi_+ = 0$. Le cas général où $\varphi_{\pm} \neq 0$ n'apporte rien de nouveau lorsque $q_- \neq q_+$, car on peut toujours se ramener à la situation précédente par translation et rotation de phase. Il en va différemment lorsque $q_- = q_+$, auquel cas la différence $\varphi_- - \varphi_+$ est invariante sous les symétries de l'équation. On trouvera dans [12] une discussion du cas $q_- = q_+$, $\varphi_- \neq \varphi_+ \bmod 2\pi$.

2. Lorsque $q_+ \neq q_-$, les expériences numériques montrent que le comportement décrit par (1.17) est représentatif de *toutes* les solutions de l'équation de Ginzburg-Landau vérifiant les conditions aux limites (1.2), mais cette propriété n'a pu être démontrée jusqu'ici que pour un voisinage du profil autosimilaire (1.16).

2. Un système de réaction-diffusion

Ce chapitre est consacré à l'existence et la stabilité d'ondes progressives pour le système de réaction-diffusion

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - uv - kuv^2 , \\ v_t &= Dv_{xx} + uv + kuv^2 , \end{aligned} \quad (2.1)$$

où u, v sont des fonctions de $x \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$ à valeurs positives, et $D > 0$, $k \geq 0$ sont des paramètres. Ce système décrit une réaction chimique autocatalytique isotherme de la forme $A + B \rightarrow 2B$ et $A + 2B \rightarrow 3B$. Les fonctions u et v représentent les concentrations du réactant A et de l'autocatalyseur B , et le paramètre $D = D_B/D_A$ est le rapport de leurs constantes de diffusion. Quant au paramètre k , il mesure la contribution de l'autocatalyse cubique à la réaction totale.

Une question importante du point de vue expérimental est de décrire le comportement du système lorsque les composants A et B sont initialement séparés. Il est donc naturel de considérer les données initiales

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad v_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Noter que $(u, v) = (1, 0)$ est un état d'équilibre *instable* de (2.1), qui représente le point de départ de la réaction (où seul est présent le réactant A), alors que le point d'équilibre *stable* $(u, v) = (0, 1)$ correspond à l'état où la réaction se termine par épuisement du réactant. Pour les données initiales (2.2), on s'attend donc à l'apparition d'une onde progressive de la forme $u(x, t) = \alpha(x - ct)$, $v(x, t) = \beta(x - ct)$ décrivant la propagation vers la droite de la réaction, à une vitesse $c > 0$ qui reste à déterminer. Les fonctions $\alpha, \beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ sont solutions du système

$$\alpha'' + c\alpha' - \alpha\beta - k\alpha\beta^2 = 0, \quad D\beta'' + c\beta' + \alpha\beta + k\alpha\beta^2 = 0, \quad (2.3)$$

et vérifient les conditions aux limites

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (\alpha(y), \beta(y)) = (0, 1), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} (\alpha(y), \beta(y)) = (1, 0). \quad (2.4)$$

Le travail présenté ci-dessous a été réalisé en collaboration avec S. Focant. Dans une première partie, nous discutons l'existence d'ondes progressives solutions de (2.3), (2.4) en fonction des paramètres D , k et c . Nous montrons ensuite que certaines de ces ondes progressives sont des solutions stables du système (2.1), pour des perturbations dans un espace de Sobolev à poids. Toutefois, l'absence d'un principe de comparaison ne nous permet pas de montrer que la solution de (2.1) correspondant à la donnée initiale naturelle (2.2) converge effectivement vers une telle onde progressive, ni *a fortiori* de déterminer la vitesse de cette onde en fonction des paramètres D et k .

2.1. Existence d'ondes progressives [10]

Dans cette section, nous étudions l'existence de solutions positives (α, β) du système (2.3) remplissant les conditions (2.4). Dans le cas où $D = 1$, c'est-à-dire lorsque les constantes de diffusion des substances A et B sont égales, il est facile de montrer que toute solution de (2.3), (2.4) vérifie $\alpha(y) + \beta(y) = 1$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. Il s'ensuit que β est solution de l'équation

$$\beta'' + c\beta' + \beta(1 - \beta)(1 + k\beta) = 0, \quad (2.5)$$

et vérifie les conditions aux limites $\beta(-\infty) = 1, \beta(+\infty) = 0$. Il est bien connu [BB*], [vS] que ce problème possède une solution positive si et seulement si $c \geq c^*(k)$, où

$$c^*(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k \leq 2, \\ \sqrt{k/2} + \sqrt{2/k} & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

Cette solution est unique à une translation près. Lorsque $k \leq 2$, le front de vitesse minimale est souvent appelé “linéaire” ou “pulled” dans la littérature physique, car sa

vitesse est déterminée par l'équation linéarisée autour du point d'équilibre $(u, v) = (1, 0)$. Dans le cas contraire, on parle de front "non linéaire", ou "pushed".

Lorsque $D \neq 1$, la réduction à une seule équation n'est plus possible, et il faut donc étudier le système (2.3) directement. Quand $D > 1$, nos résultats sont relativement complets, et montrent en particulier l'existence d'une vitesse minimale de propagation :

Théorème 2.1. *Soient $D \geq 1$, $k \geq 0$. Il existe $c^* = c^*(D, k) > 0$ tel que le système (2.3), (2.4) possède une solution positive si et seulement si $c \geq c^*$. Cette solution est unique à une translation près. En outre, $c^*(D, k)$ est une fonction croissante de k qui vérifie*

$$c^*(D, k) \geq \begin{cases} 2\sqrt{D} & \text{si } k \leq 2 \\ \sqrt{D}(\sqrt{k/2} + \sqrt{2/k}) & \text{si } k > 2 \end{cases},$$

et

$$c^*(D, k) \leq \begin{cases} 2\sqrt{D} & \text{si } k \leq \bar{k}(D) \\ \sqrt{D}(\sqrt{k} + \sqrt{1/k}) & \text{si } k > \bar{k}(D) \end{cases},$$

où $\bar{k}(D) = (3D - 1)/(3D - 2)$.

Corollaire 2.2. *Soit $D \geq 1$. Il existe $k^* = k^*(D)$ tel que la vitesse minimale $c^*(D, k)$ définie dans le théorème 2.1 vérifie $c^* = 2\sqrt{D}$ si $k \leq k^*(D)$ et $c^* > 2\sqrt{D}$ si $k > k^*(D)$. En outre, on a $\bar{k}(D) \leq k^*(D) \leq 2$ pour tout $D \geq 1$.*

Comme $c = 2\sqrt{D}$ est la vitesse de propagation prédite par l'argument heuristique de "stabilité marginale" [vS], ce corollaire signifie que le front de vitesse minimale est "linéaire" si $k < k^*(D)$ et "non linéaire" si $k > k^*(D)$. La courbe $k^*(D)$, déterminée par intégration numérique du système (2.3), est représentée dans la figure 5.

Lorsque $0 < D < 1$, il est difficile de montrer que l'ensemble des valeurs de la vitesse c pour lesquelles le problème (2.3), (2.4) possède une solution positive est toujours un intervalle de la forme $[c^*, +\infty)$, même si les expériences numériques semblent confirmer cette hypothèse. A défaut, nous pouvons montrer qu'un front positif existe si $c > 0$ est suffisamment grand et n'existe pas si $c < 2\sqrt{D}$:

Théorème 2.3. *Soient $0 < D < 1$, $k \geq 0$. Le système (2.3), (2.4) possède une solution positive, unique à une translation près, si*

$$c \geq \begin{cases} 2\sqrt{D} & \text{si } k \leq 2, \\ \sqrt{D}(\sqrt{k/2} + \sqrt{2/k}) & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

Une telle solution n'existe pas si $c < 2\sqrt{D}$.

Remarque. En particulier, les énoncés ci-dessus montrent que, si $D \geq 1$ et $k \leq \bar{k}(D)$, ou si $0 < D < 1$ et $k \leq 2$, alors un front positif existe si et seulement si $c \geq 2\sqrt{D}$. Ceci généralise le résultat obtenu par Billingham et Needham dans le cas $k = 0$ [BN].

La démonstration des théorèmes 2.1 et 2.3 repose sur l'argument suivant. En additionnant les deux équations dans (2.3) et en utilisant les conditions aux limites (2.4), on obtient la relation

$$\alpha' + c\alpha + D\beta' + c\beta = c,$$

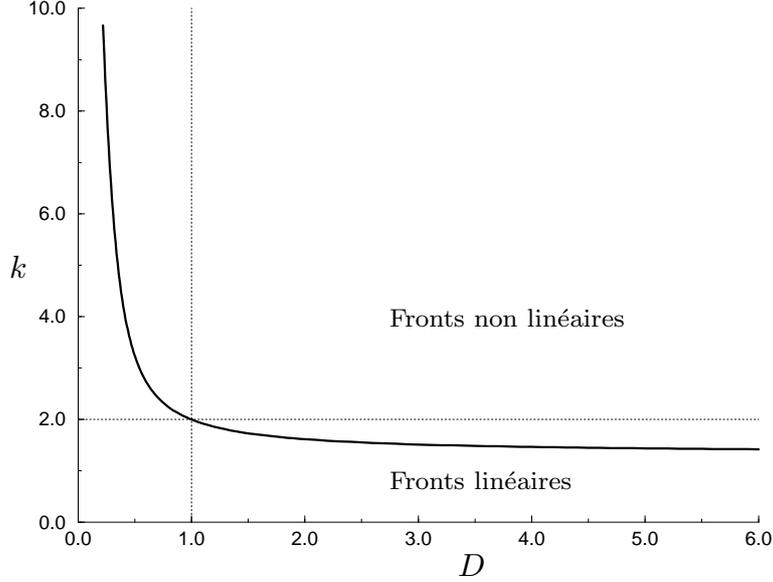


Fig. 5: La courbe $k^*(D)$ séparant les régions où $c^*(D, k) = 2\sqrt{D}$ (fronts linéaires) et $c^*(D, k) > 2\sqrt{D}$ (fronts non linéaires). L'existence de cette courbe n'est garantie par le corollaire 2.2 que pour $D \geq 1$, mais numériquement on peut observer cette séparatrice pour tout $D > 0$. Noter que $k^*(D) > 2$ si $0 < D < 1$, en accord avec le théorème 2.3.

qui permet d'exprimer α' en fonction de α , β et β' . On est ainsi ramené à l'étude du système réduit

$$\alpha' = c(1 - \alpha - \beta) - D\gamma, \quad \beta' = \gamma, \quad \gamma' = -\frac{1}{D}(c\gamma + \alpha\beta(1 + k\beta)), \quad (2.6)$$

pour lequel on cherche une trajectoire hétérocline vérifiant

$$(\alpha, \beta, \gamma)(-\infty) = (0, 1, 0), \quad (\alpha, \beta, \gamma)(+\infty) = (1, 0, 0).$$

Une analyse élémentaire montre que $P_- = (0, 1, 0)$ est un *point selle* du système (2.6) possédant une variété instable de dimension un, alors que $P_+ = (1, 0, 0)$ est un point d'équilibre *attractif*. Si \mathcal{V} désigne la branche de la variété instable de P_- qui pointe initialement à l'intérieur du secteur $Q = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha > 0, \beta > 0\}$, le problème revient donc à montrer que $\mathcal{V} \subset Q \cap \Omega(P_+)$, où $\Omega(P_+)$ est le bassin d'attraction de P_+ . Pour les valeurs des paramètres D, k, c spécifiées dans les théorèmes 2.1 et 2.3, nous vérifions cette propriété en construisant explicitement une région $R \subset \mathbf{R}^3$, positivement invariante sous le flot de (2.6), et telle que $\mathcal{V} \subset R \subset Q \cap \Omega(P_+)$. Cette région est délimitée par quatre surfaces planes ou paraboliques, dont les paramètres sont soigneusement ajustés pour obtenir les propriétés désirées.

Quels que soient $D > 0$ et $k \geq 0$, cette construction s'avère toujours possible si $c > 0$ est suffisamment grand. D'autre part, si $c < 2\sqrt{D}$, les valeurs propres du système linéarisé au point P_+ deviennent complexes, ce qui exclut l'existence d'une orbite *positive* reliant P_- à P_+ . Enfin, lorsque $D > 1$, l'existence d'une orbite hétérocline positive pour une valeur du couple (c, k) permet, par un argument de monotonie assez élaboré, de montrer la même propriété pour tout $c' \geq c$ et tout $k' \leq k$. Ce dernier résultat implique l'existence d'une vitesse minimale $c^*(D, k)$, qui est une fonction croissante du paramètre k .

2.2. Stabilité des ondes progressives [10]

Cette section est consacrée à l'étude de la stabilité des ondes progressives construites précédemment, dans le cas le plus simple où D est proche de 1 et k proche de 0. Sous ces restrictions, il suit des théorèmes 2.1 et 2.3 qu'une onde progressive positive (α, β) existe si et seulement si $c \geq 2\sqrt{D}$. Pour déterminer sa stabilité, nous posons

$$u(x, t) = \alpha(x - ct) + f(x - ct, t), \quad v(x, t) = \beta(x - ct) + g(x - ct, t),$$

et nous obtenons pour la perturbation $f(y, t), g(y, t)$ le système

$$\begin{aligned} f_t &= f_{yy} + cf_y - \beta(1 + k\beta)f - \alpha(1 + 2k\beta)g - N(f, g), \\ g_t &= Dg_{yy} + cg_y + \alpha(1 + 2k\beta)g + \beta(1 + k\beta)f + N(f, g), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $N(f, g) = fg + k(2\beta fg + \alpha g^2 + f g^2)$.

Comme l'état stationnaire $(u, v) = (1, 0)$ envahi par le front est linéairement instable, il est nécessaire de se restreindre à des perturbations qui décroissent exponentiellement lorsque $y \rightarrow +\infty$. Pour tout $s > 0$, nous introduisons les espaces de Hilbert (réels) X_s, Y_s définis par les normes

$$\|f\|_{X_s}^2 = \int_{\mathbf{R}} |f(y)|^2 (1 + e^{2sy}) dy, \quad \|f\|_{Y_s}^2 = \|f\|_{X_s}^2 + \|f_y\|_{X_s}^2.$$

Un calcul direct révèle que le spectre essentiel de l'opérateur linéaire L dans $X_s \times X_s$ défini par

$$L \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y^2 + c\partial_y - \beta(1 + k\beta) & -\alpha(1 + 2k\beta) \\ \beta(1 + k\beta) & D\partial_y^2 + c\partial_y + \alpha(1 + 2k\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

est contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ si et seulement si $c \geq s$ et $Ds^2 - cs + 1 \leq 0$. Pour que le front (α, β) puisse être stable vis-à-vis de perturbations $(f, g) \in Y_s \times Y_s$, il est donc nécessaire de prendre $s = 1/\sqrt{D}$ lorsque $c = 2\sqrt{D}$. Si $c > 2\sqrt{D}$, on choisira la valeur de s qui correspond au plus grand espace de perturbations, c'est-à-dire

$$s = \frac{1}{2D}(c - \sqrt{c^2 - 4D}).$$

On notera toutefois que cet espace est encore trop petit pour inclure les translations de l'onde progressive, car $e^{sy}\beta'(y)$ ne converge pas vers zéro lorsque $y \rightarrow +\infty$.

Avec ces notations, notre résultat principal montre que le front (α, β) est asymptotiquement stable pour des perturbations dans Y_s :

Théorème 2.4. *Il existe $d_0 > 0$ et $k_0 > 0$ tels que, pour tout $D \in [1-d_0, 1+d_0]$, tout $k \in [0, k_0]$ et tout $c \geq 2\sqrt{D}$, on a le résultat suivant. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $K_0 \geq 1$ tels que, pour tout $(f_0, g_0) \in Y_s \times Y_s$ tel que $\|f_0\|_{Y_s} + \|g_0\|_{Y_s} \leq \varepsilon_0$, le système (2.7) possède une unique solution $(f, g) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), Y_s \times Y_s)$ vérifiant la condition initiale $(f(0), g(0)) = (f_0, g_0)$. En outre,*

$$\|f(t)\|_{Y_s} + \|g(t)\|_{Y_s} \leq K_0(\|f_0\|_{Y_s} + \|g_0\|_{Y_s})$$

pour tout $t \geq 0$, et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|f_y(t)\|_{X_s} + \|g_y(t)\|_{X_s}) = 0 .$$

Remarque. Ce résultat montre en particulier que les perturbations convergent uniformément vers zéro dans le sens suivant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbf{R}} (|f(y, t)| + |g(y, t)|) (1 + e^{sy}) = 0 .$$

Noter toutefois qu’aucun taux de décroissance en temps n’est précisé par le théorème 2.4. Cette lacune est partiellement comblée par l’analyse détaillée du problème linéaire résolue par S. Focant [Fo].

La démonstration du théorème 2.4 repose sur des estimations d’énergie tout à fait classiques dans leur esprit, mais relativement délicates à mettre en œuvre dans le cas présent. Il est en particulier nécessaire de contrôler séparément le comportement des perturbations à l’avant et à l’arrière du front, en utilisant dans les deux cas des formes quadratiques différentes pour construire les fonctionnelles d’énergie. Cette technique sera présentée de façon plus détaillée à la section 3.1, où nous l’illustrerons sur l’exemple simple d’une équation hyperbolique scalaire. La méthode utilisée ici ne donne que peu d’informations sur l’origine de la stabilité, et il est difficile de décider si les limitations que nous rencontrons dans son application sont de nature technique ou cachent des phénomènes réels. En particulier, nous ignorons si les ondes progressives du système (2.1) présentent des instabilités (de Turing) lorsque $D \ll 1$ ou $D \gg 1$.

Une autre question intéressante, que nous n’avons pas abordée, est la stabilité des fronts (α, β) lorsque $k \gg 1$. Dans ce cas, la difficulté majeure est d’exclure la présence de *valeurs propres* instables de l’opérateur linéaire L défini par (2.8). Lorsque $D = 1$, la réduction à une équation scalaire permet de contrôler le spectre discret à l’aide de la théorie de Sturm-Liouville, mais de tels résultats ne se généralisent pas à des systèmes qui n’admettent pas de principe de comparaison.

3. L’équation des ondes avec amortissement

Après deux chapitres consacrés à des systèmes paraboliques, nous abordons à présent l’équation hyperbolique amortie

$$\varepsilon u_{tt} + u_t = \Delta_z u + f(u) , \tag{3.1}$$

où u est une fonction réelle de $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ et $t \in \mathbf{R}_+$, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une application non linéaire, et $\varepsilon > 0$ est un paramètre *non nécessairement petit*. Les motivations à l’étude de cette équation ne manquent pas, surtout en dimension un d’espace. En effet, lorsque $n = 1$, la partie linéaire de (3.1) est l’équation classique des “télégraphistes”, qui décrit la propagation des impulsions électriques le long d’une ligne idéale infinie. Cette même équation régit également la probabilité de présence d’une particule se déplaçant à vitesse constante sur la droite réelle, en renversant aléatoirement la direction de son mouvement suivant un processus de Poisson en temps [Go], [Kac]. Ce processus de “saut de vitesse” est utilisé en biologie pour décrire la diffusion d’une population de cellules ou d’individus [DO]. Plus réaliste que le mouvement brownien pour les temps

brefs, car il tient compte de l'inertie des particules, il prédit un comportement identique pour les grands temps. Au même titre que les systèmes de réaction-diffusion, l'équation (3.1) peut donc être considérée comme un modèle de type "champ moyen" décrivant la dynamique d'un ensemble de particules en interaction [Ha1], [Ha2].

L'idée générale motivant les développements présentés dans la suite de ce mémoire est que les solutions de l'équation hyperbolique (3.1) se comportent pour les grands temps comme celles de l'équation parabolique obtenue en posant $\varepsilon = 0$. Dans ce chapitre, nous étayons cette affirmation en étudiant l'existence et la stabilité d'ondes progressives pour le système (3.1), et en retrouvant dans ce cadre plus général la plupart des résultats connus pour l'équation parabolique. Le dernier chapitre sera consacré à un examen détaillé du comportement asymptotique en temps des solutions de (3.1). Sur différents exemples, nous montrerons la convergence vers des solutions autosimilaires de l'équation parabolique associée.

Nous supposons dans la suite de ce chapitre que la non-linéarité f est une fonction régulière vérifiant $f(0) = f(1) = 0$, de sorte que $u = 0$ et $u = 1$ sont des points d'équilibre du système (3.1). Nous distinguerons deux cas, suivant la stabilité de l'origine $u = 0$:

Cas monostable : $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, et $f(u) > 0$ pour $u \in (0, 1)$.

C'est la non-linéarité classique considérée par Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov en 1937 [KPP]. L'exemple le plus simple est $f(u) = u(1 - u)$.

Cas bistable : $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$, et il existe $u_0 \in (0, 1)$ tel que $f(u) < 0$ pour $0 < u < u_0$ et $f(u) > 0$ pour $u_0 < u < 1$.

Cette non-linéarité a été étudiée en particulier par Fife et McLeod [FM] dans le cas parabolique. Un exemple typique est $f(u) = 2u(1 - u)(u - u_0)$.

Dans les deux cas, l'équation (3.1) possède des ondes progressives planes de la forme

$$u(z, t) = h(\sqrt{1 + \varepsilon c^2} z_1 - ct) , \quad (3.2)$$

où $c \in \mathbf{R}$ est un paramètre à déterminer. Sans restreindre la généralité, on a fait coïncider la direction de propagation avec le premier axe de coordonnées. Le profil h est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$h''(x) + ch'(x) + f(h(x)) = 0 , \quad x \in \mathbf{R} , \quad (3.3)$$

à laquelle on ajoute les conditions aux limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1 , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 . \quad (3.4)$$

Il importe de remarquer que l'équation (3.3) est *indépendante de ε* . En ce qui concerne l'existence d'ondes progressives, les résultats pour l'équation hyperbolique (3.1) sont donc exactement les mêmes que dans le cas parabolique, à savoir [AW] :

- Dans le cas monostable, il existe une valeur critique $c_* \geq 2\sqrt{f'(0)} > 0$ telle que l'équation (3.3) possède une solution *monotone* vérifiant les conditions aux limites (3.4) si et seulement si $c \geq c_*$.

- Dans le cas bistable, il existe une unique valeur $c \in \mathbf{R}$ telle que l'équation (3.3) possède une solution vérifiant les conditions aux limites (3.4). Cette solution est une fonction monotone de x .

Dans tous les cas, la solution $h(x)$ de (3.3), (3.4) est unique à une translation près, et converge exponentiellement vers ses limites lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Noter que la vitesse de propagation de l'onde progressive (3.2) n'est pas c , mais $c/(1+\varepsilon c^2)^{1/2}$. Cette vitesse est donc bornée en module par $\varepsilon^{-1/2}$ quel que soit $c \in \mathbf{R}$.

Remarques.

1. Dans le cas monostable, le problème (3.3), (3.4) admet également une solution lorsque $0 < c < c_*$, mais celle-ci n'est pas monotone. Les ondes progressives correspondantes sont toujours instables, et ne seront donc pas considérées ici.

2. Si $f(u) \leq f'(0)u$ pour tout $u \in [0, 1]$, on sait que $c_* = 2(f'(0))^{1/2}$ [AW]. En particulier, $c_* = 2$ lorsque $f(u) = u(1 - u)$.

3. Si $f(u) = 2u(1-u)(u-u_0)$ (cas bistable), on vérifie aisément que $c = 1-2u_0 \in (-1, 1)$ et que $h(x) = (1 + e^x)^{-1}$.

Nous supposons désormais que h est une solution du problème (3.3), (3.4) pour une certaine valeur de $c \in \mathbf{R}$. Pour étudier la stabilité de l'onde progressive (3.2) en tant que solution de (3.1), il est commode de se placer dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse du front. Nous posons donc

$$u(z, t) = v(\sqrt{1 + \varepsilon c^2}z_1 - ct, y, t) \equiv v(x, y, t) ,$$

où $x = \sqrt{1 + \varepsilon c^2}z_1 - ct$ et $y = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$. L'équation pour v s'écrit

$$\varepsilon v_{tt} + v_t - 2\varepsilon c v_{xt} = \Delta v + c v_x + f(v) , \quad (3.5)$$

où $\Delta = \partial_x^2 + \Delta_y$. Par construction, le profil h est à présent une solution stationnaire de (3.5). Nous considérons des solutions perturbées de la forme $v(x, y, t) = h(x) + w(x, y, t)$, et obtenons pour la perturbation w l'équation

$$\varepsilon w_{tt} + w_t - 2\varepsilon c w_{xt} = \Delta w + c w_x + f'(h)w + w^2 \mathcal{N}(h, w) , \quad (3.6)$$

où $\mathcal{N}(h, w) = (f(h+w) - f(h) - f'(h)w)/w^2$. Dans le reste de ce chapitre, nous étudions la stabilité de l'origine $(w, w_t) = (0, 0)$ pour le système (3.6), en commençant par le cas monostable. A l'exception de la section 3.3, tous les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec G. Raugel.

3.1. Le cas monostable : stabilité locale [9,13,14]

Nous montrons dans cette section, sur des exemples représentatifs, que les ondes progressives (3.2) sont asymptotiquement stables pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $c \geq c_*$ dans le cas monostable. Nous supposons toujours que la non-linéarité $f(u)$ est concave sur l'intervalle $[0, 1]$, de sorte que $c_* = 2(f'(0))^{1/2}$. Cette hypothèse simplifie l'étude du système linéarisé autour de l'onde progressive, en particulier dans le cas critique où $c = c_*$. Nous n'étudierons donc pas ici le cas du front "non linéaire", pour lequel $c = c_* > 2(f'(0))^{1/2}$, qui peut cependant être traité à l'aide des méthodes présentées dans la section 3.3 (cas bistable).

Comme dans le cas du système de réaction-diffusion étudié dans la section 2.2, l'instabilité de l'état stationnaire $u = 0$ envahi par le front restreint de façon essentielle le choix de l'espace de perturbations. Pour tout $s > 0$, nous introduisons les espaces de Hilbert réels L_p^2 et H_p^1 définis par les normes

$$\|w\|_{L_p^2}^2 = \int_{\mathbf{R}^n} |w(x, y)|^2 p(x)^2 dx dy, \quad \|w\|_{H_p^1}^2 = \|w\|_{L_p^2}^2 + \|w_x\|_{L_p^2}^2 + \|\nabla_y w\|_{L_p^2}^2,$$

où $p(x) = 1 + e^{sx}$. Noter que le poids $p(x)$ est indépendant de la variable transverse $y \in \mathbf{R}^{n-1}$. Il est facile de vérifier que le spectre essentiel de l'opérateur linéaire Λ_ε dans $X_p = H_p^1 \times L_p^2$ défini par

$$\Lambda_\varepsilon \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^{-1}L & \varepsilon^{-1}(-1 + 2\varepsilon c \partial_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \text{où } L = \Delta + c \partial_x + f'(h),$$

est contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ si et seulement si $s^2 - cs + f'(0) \leq 0$. Lorsque $c = c_* = 2\sqrt{f'(0)}$, on ne peut donc espérer la stabilité de l'onde progressive pour des perturbations dans X_p que si $s = c_*/2$. Si $c > c_*$, on choisira la valeur de s correspondant au plus grand espace de perturbations, c'est-à-dire

$$s = \frac{1}{2} \left(c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)} \right).$$

Même lorsque $n = 1$, cet espace ne contient pas les translations de l'onde progressive, car $h'(x)p(x)$ ne converge pas vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Afin d'énoncer des résultats qui soient valables uniformément en ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il est commode de munir l'espace $X_p = H_p^1 \times L_p^2$ de la forme quadratique

$$\Phi_p^\varepsilon(w_0, w_1) = \|w_0\|_{H_p^1}^2 + \varepsilon \|w_1\|_{L_p^2}^2.$$

Nous commençons par un résultat de stabilité locale en dimension supérieure, que nous énonçons pour simplifier dans le cas où $f(u) = u(1 - u)$.

Théorème 3.1. *On suppose que $f(u) = u(1 - u)$ et que $n \leq 4$. Soient $\varepsilon_0 > 0$ et $c \geq c_*$. Il existe des constantes $\delta_0 > 0$ et $K_0 \geq 1$ telles que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale $(w_0, w_1) \in X_p$ vérifiant $\Phi_p^\varepsilon(w_0, w_1) \leq \delta_0$, l'équation (3.6) possède une unique solution globale $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), X_p)$ telle que $(w(0), w_t(0)) = (w_0, w_1)$. En outre, $\Phi_p^\varepsilon(w(t), w_t(t)) \leq K_0 \Phi_p^\varepsilon(w_0, w_1)$ pour tout $t \geq 0$, et*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \left(\|w(t)\|_{H^1} + \|(pw(t))_x\|_{L^2} + \|\nabla_y w(t)\|_{L_p^2} + \|w_t(t)\|_{L_p^2} \right) = 0, \quad (3.7)$$

avec $\eta = 0$ si $c > c_*$ et $\eta = 1/2$ si $c = c_*$.

Remarques.

1. La restriction $n \leq 4$ est nécessaire pour contrôler la non-linéarité dans l'espace d'énergie X_p à l'aide de l'inclusion de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^4$. L'utilisation des inégalités de Strichartz permettrait de remplacer cette condition par $n \leq 6$ dans le cas présent, ou plus généralement par $n \leq 2(m+1)/(m-1)$ pour une non-linéarité polynomiale de degré $m \geq 2$.

2. En dimension un d'espace, les perturbations $w \in H_p^1$ sont bornées, de sorte que le comportement de la non-linéarité $f(u)$ en dehors d'un voisinage de l'intervalle $[0, 1]$ n'importe pas. A titre d'exemple, quand $n = 1$, on peut montrer [13] que le théorème 3.1 reste vrai pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ telle que

$$f'(0) > 0, \quad f'(1) < 0, \quad \text{et } f''(u) \leq 0 \text{ pour } u \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

3. L'énoncé ci-dessus n'affirme pas que les perturbations (w, w_t) convergent vers zéro dans $H_p^1 \times L_p^2$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, car le membre de gauche de (3.7) ne contrôle pas la quantité $\|pw(\cdot, t)\|_{L^2}$.

4. Les constantes δ_0 et K_0 dans le théorème 3.1, de même que toutes celles qui interviennent dans la démonstration, sont indépendantes de ε lorsque $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. En prenant partout la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient donc directement un résultat de stabilité locale pour les ondes progressives de l'équation parabolique associée à (3.1).

La démonstration du théorème 3.1 repose sur quelques estimations d'énergie que nous esquissons brièvement. Notons $\omega(x, y, t) = e^{sx}w(x, y, t)$. Nous introduisons les deux familles de fonctionnelles

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{\varepsilon}{2} \omega_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla \omega|^2 + h\omega^2 + \frac{1}{3} e^{-sx} \omega^3 \right) dx dy, \\ E_1 &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon cs \right) \omega^2 + \varepsilon \omega \omega_t \right) dx dy, \quad E_2 = \alpha E_0 + E_1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $\alpha = \max(2\varepsilon, 1/(2c^2))$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{\varepsilon}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \frac{s^2}{2} w^2 + hw^2 + \frac{1}{3} w^3 \right) dx dy, \\ \mathcal{E}_1 &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon cs \right) w^2 + \varepsilon w w_t \right) dx dy, \quad \mathcal{E}_2 = \alpha \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + 3\alpha E_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Noter que les fonctionnelles E_0, E_1 contrôlent principalement le comportement des perturbations (w, w_t) à l'avant du front ($x \geq 0$), et $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ à l'arrière ($x \leq 0$).

Si $\delta > 0$ est suffisamment petit et si $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, T], X_p)$ est une solution de (3.6) telle que $\|w(t)\|_{L_p^2} \leq \delta$ pour tout $t \in [0, T]$, on montre que les fonctionnelles ci-dessus vérifient les inégalités différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dE_0}{dt}(t) &\leq (c^2 - c_*^2) E_0(t), \quad \frac{dE_2}{dt}(t) \leq -\frac{1}{2} E_0(t), \\ \frac{d\mathcal{E}_2}{dt}(t) + \kappa \mathcal{E}_2(t) &\leq K_1 E_0(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\kappa = (8(1+\alpha))^{-1}$ et $K_1 > 0$ est suffisamment grand. Il suit de ces relations que $E_2(t) + \mathcal{E}_2(t) \leq K_2(E_2(0) + \mathcal{E}_2(0))$ pour tout $t \in [0, T]$, où K_2 est une constante indépendante de T . D'autre part, il existe $K_3 > 0$ tel que $\Phi_p^\varepsilon(w, w_t) \leq K_3(E_2 + \mathcal{E}_2)$ pour tout $(w, w_t) \in X_p$ tel que $\|w\|_{L^2_p} \leq \delta$. En combinant ces deux estimations, on montre aisément l'existence globale de la solution de (3.6) dans X_p si $\Phi_p^\varepsilon(w_0, w_1)$ est suffisamment petit.

Supposons donc que $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), X_p)$ est une solution de (3.6) vérifiant les inégalités (3.11) pour tout $t \geq 0$. Les deux premières de ces inégalités entraînent que $E_0 \in L^1(\mathbf{R}_+)$ et que $E_0(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. En vertu de la troisième, il en va de même de $\mathcal{E}_2(t)$, ce qui montre le résultat (3.7) avec $\eta = 0$. Enfin, si $c = c_*$, E_0 est une fonction décroissante et intégrable sur \mathbf{R}_+ , donc $tE_0(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. La dernière inégalité dans (3.11) implique alors que $t\mathcal{E}_2(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et on en déduit (3.7) avec $\eta = 1/2$.

Le théorème 3.1 ne donne guère d'information sur l'origine de la stabilité ni sur le comportement asymptotique en temps des perturbations. En fait, dans le cas non critique $c > c_*$, le mécanisme responsable de la stabilité est principalement un *transport linéaire*: les perturbations “glissent” vers l'arrière du front (dans le référentiel en mouvement) et sont finalement amorties au voisinage du point d'équilibre stable $u = 1$. Il s'ensuit que, si l'on impose une décroissance plus rapide des perturbations lorsque $x \rightarrow +\infty$, on obtient également une meilleure décroissance en temps. Par exemple, si $(w, w_t) \in X_{\bar{p}}$ où $\bar{p}(x) = 1 + e^{\bar{s}x}$ et $\bar{s}^2 - c\bar{s} + f'(0) < 0$, on peut montrer, sous les hypothèses du théorème 3.1, que (w, w_t) converge exponentiellement vers zéro dans $X_{\bar{p}}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

La situation est complètement différente dans le cas critique $c = c_*$, où la stabilité est de nature essentiellement *diffusive*. Les perturbations ressentent toutefois la présence de l'onde progressive, et convergent de ce fait légèrement plus vite vers zéro que les solutions de l'équation de diffusion. Cet effet s'observe plus facilement en dimension un d'espace, où il ne se superpose pas à la diffusion transverse. Pour le mettre en évidence, il est nécessaire de restreindre quelque peu l'espace de perturbations, en imposant une décroissance un peu plus rapide lorsque $x \rightarrow +\infty$. Nous introduisons donc le poids modifié $q(x) = 1 + x^2 e^{s_* x} \equiv 1 + x^2 \exp(c_* x/2)$, et nous définissons comme précédemment l'espace $X_q = H^1_q \times L^2_q \subset X_p$. Notre second résultat décrit de façon précise le comportement asymptotique en temps des perturbations dans X_q :

Théorème 3.2. *On suppose que f vérifie (3.8) et que $n = 1$. Soient $\varepsilon_0 > 0$ et $c = c_*$. Il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale $(w_0, w_1) \in X_q$ vérifiant $\Phi_q^\varepsilon(w_0, w_1) \leq \delta_0$, l'équation (3.6) possède une unique solution globale $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), X_q)$ telle que $(w(0), w_t(0)) = (w_0, w_1)$. En outre, il existe $\alpha_* \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left(1 + \frac{e^{c_* x/2}}{1 + |x|} \right) \left| w(x, t) - \frac{\alpha_*}{t^{3/2}} h'(x) \varphi_* \left(\frac{x \sqrt{1 + \varepsilon c_*^2}}{\sqrt{t}} \right) \right| = \mathcal{O}(t^{-7/4} \log t), \quad (3.12)$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$, où

$$\varphi_*(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq 0 \\ e^{-\xi^2/4} & \text{si } \xi > 0 \end{cases}. \quad (3.13)$$

Ce résultat sera discuté plus en détail dans la section 4.3, où une esquisse de sa démonstration sera présentée. Dans l'immédiat, remarquons que $w(x, t)$ converge vers

zéro comme $t^{-3/2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et que le rapport $w(x, t)/h'(x)$ devient asymptotiquement *autosimilaire* dans cette limite. Noter aussi que le profil φ_* est *universel*: il ne dépend ni des données initiales, ni de la non-linéarité f , ni du paramètre $\varepsilon > 0$. En fait, les données initiales n'apparaissent dans le développement asymptotique (3.12) qu'au travers du coefficient $\alpha_* \in \mathbf{R}$, qui est génériquement non nul.

Remarque. En prenant la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le théorème 3.2, on obtient un résultat de stabilité locale pour les ondes progressives de l'équation parabolique $u_t = u_{xx} + f(u)$. Cet énoncé coïncide, si l'on excepte quelques différences dans le choix des espaces, avec le résultat obtenu antérieurement dans [5]. Les différences essentielles entre les démonstrations contenues dans [5] et dans [14] seront discutées dans la section 4.3.

3.2. Le cas monostable: stabilité globale [9,13]

Les résultats de stabilité obtenus dans la section précédente sont locaux, car ils supposent les perturbations suffisamment petites dans l'espace X_p (ou X_q). Nous montrons à présent comment cette condition de petitesse peut, dans certains cas, être relaxée et remplacée par une condition de *positivité*. Pour simplifier, nous nous plaçons en dimension un d'espace, et nous supposons que la non-linéarité f vérifie, outre (3.8), la condition

$$\sup_{u \geq 1} f'(u) < 0 . \quad (3.14)$$

Dans le cas parabolique, ces hypothèses suffisent à montrer la stabilité des ondes progressives pour des perturbations *positives* de taille arbitraire dans H_p^1 . De telles perturbations restent positives pour tous les temps en vertu du principe du maximum. Ce résultat ne peut pas être directement généralisé à l'équation hyperbolique, car la préservation de la positivité est alors sujette à une condition de petitesse sur ε . Or, cette condition fait elle-même intervenir la taille des perturbations, comme l'illustre la proposition ci-dessous.

Pour tout $d \in [0, 1]$ et tout $K \geq 0$, nous définissons la quantité

$$\Lambda_d(K) = \inf \left\{ \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \mid 0 \leq u \leq d, u < v \leq 1 + K \right\} \leq 0 .$$

Le résultat suivant est une conséquence du principe du maximum pour les équations hyperboliques [PW], [9].

Proposition 3.3. *On suppose que f vérifie (3.8), (3.14) et que $n = 1$. Soient $c \geq c_*$, $d \in [0, 1]$, $K \geq 0$, et soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que*

$$1 + 4\varepsilon\Lambda_d(K) \geq 0 . \quad (3.15)$$

Supposons que $(v, v_t) \in \mathcal{C}^0([0, T], H_{\text{loc}}^1 \times L_{\text{loc}}^2)$ est une solution de (3.5) dont les données initiales (v_0, v_1) vérifient les inégalités

$$v_0(x) \geq dh(x) , \quad \varepsilon v_1(x) \geq \varepsilon c(v_0'(x) - dh'(x)) - \frac{1}{2}(v_0(x) - dh(x)) , \quad (3.16)$$

pour (presque) tout $x \in \mathbf{R}$. Supposons enfin que

$$v(x, t) \leq 1 + K , \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T] . \quad (3.17)$$

Alors $v(x, t) \geq dh(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T]$.

Cet énoncé donne des conditions suffisantes sur les données initiales et les paramètres de l'équation pour garantir la positivité des solutions v de (3.5), lorsque $d = 0$, ou des perturbations w , lorsque $d = 1$. Remarque que (3.15) est la condition classique d'amortissement fort assurant que les solutions de l'équation différentielle ordinaire $\varepsilon u_{tt} + u_t = \Lambda_d(K)u$ n'oscillent pas lorsque $t \rightarrow +\infty$. Elle fait intervenir la taille de la solution $v(x, t)$ au travers de la quantité $\Lambda_d(K)$, qui minore la pente moyenne de la non-linéarité dans la région visitée par cette solution. Noter aussi que la seconde inégalité dans (3.16), qui porte sur la dérivée temporelle à l'instant initial, n'est pas reproduite par l'évolution. Dans la limite parabolique $\varepsilon \rightarrow 0$, les conditions (3.15) et (3.17) disparaissent, et la seconde inégalité dans (3.16) est une conséquence de la première.

Afin d'énoncer le résultat principal de cette section, nous notons $\Psi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ la fonction définie par

$$\Psi(K) = \sup_{0 \leq u \leq 1+K} |f'(u)| .$$

Théorème 3.4. *On suppose que f vérifie (3.8), (3.14) et que $n = 1$. Etant donné $\varepsilon_0 > 0$, $c \geq c_*$, et $d \in (0, 1]$, il existe une constante $C_0 \geq 1$ telle que le résultat suivant soit vrai. Si $K > 0$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ vérifient (3.15), et si $K_* > 0$ est une constante telle que*

$$C_0 K_*^2 (1 + \Psi(K_*)) < K^2 , \quad (3.18)$$

alors, pour toute donnée initiale $(w_0, w_1) \in X_p$ telle que $\Phi_p^\varepsilon(w_0, w_1) \leq K_^2$ et telle que les inégalités (3.16) soient vérifiées par $(v_0, v_1) = (h + w_0, w_1)$, l'équation (3.6) possède une unique solution globale $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), X_p)$ telle que $(w(0), w_t(0)) = (w_0, w_1)$. En outre,*

$$w(x, t) \leq K , \quad h(x) + w(x, t) \geq dh(x) , \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T] , \quad (3.19)$$

et (w, w_t) converge vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ selon (3.7).

Remarques.

1. Il suit des relations (3.15), (3.18) que les constantes K et K_* peuvent être choisies très grandes si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Dans ce cas, le théorème 3.4 montre que de grandes perturbations vérifiant les conditions de positivité (3.16) ne détruisent pas la stabilité de l'onde progressive.

2. Lorsque $f(u) = u(1 - u)$, il est facile de vérifier que $\Lambda_d(K) = -(d + K)$ et que $\Psi(K) = 1 + 2K$. Il s'ensuit que les hypothèses sur la taille des données initiales dans l'énoncé ci-dessus peuvent être réécrites, dans ce cas, sous la forme

$$1 - 4\varepsilon(d + K) \geq 0 , \quad \Phi_p^\varepsilon(w_0, w_1) \leq C_1 K^2 (1 + K)^{-2/3} ,$$

où $C_1 > 0$ est une constante suffisamment grande. En particulier, l'onde progressive est stable pour des perturbations positives de taille $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

La démonstration du théorème 3.4, que nous esquissons pour simplifier dans le cas où $f(u) = u(1 - u)$, repose sur l'observation cruciale suivante. Si $d \in (0, 1]$, les inégalités

différentielles (3.11) vérifiées par les fonctionnelles E_0, E_2, \mathcal{E}_2 restent valables pour toute solution $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, T], X_p)$ de (3.6) telle que

$$v(x, t) = h(x) + w(x, t) \geq dh(x) , \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T] .$$

Ce résultat s'obtient en exploitant le signe des termes non linéaires dans l'équation (3.6) et dans les expressions (3.9), (3.10). Les inégalités (3.11) entraînent en particulier que

$$\Phi_p^\varepsilon(w(t), w_t(t)) \leq C_0 \Phi_p^\varepsilon(w(0), w_t(0)) (1 + \Psi(\|w(0)\|_{L^\infty})) , \quad t \in [0, T] ,$$

où $C_0 \geq 1$ ne dépend que de ε_0, c, d (et de f). Cette borne permet de contrôler la taille de la solution (w, w_t) dans X_p tant que l'inégalité $v(x, t) \geq dh(x)$ reste vérifiée. D'autre part, la proposition 3.3 garantit, moyennant (3.15) et (3.16), la préservation de l'inégalité $v(x, t) \geq dh(x)$ tant que la solution $v(x, t)$ ne dépasse pas une certaine taille. En combinant ces deux résultats, on montre facilement, sous les hypothèses du théorème 3.4, que la solution (w, w_t) existe globalement et vérifie (3.19). Les inégalités (3.11) entraînent alors la convergence vers zéro comme dans le théorème 3.1.

Remarque. Lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et que $f''(u) \leq 0$ pour tout $u \geq 0$, on peut montrer, en utilisant à nouveau le principe du maximum hyperbolique, que la solution (w, w_t) construite dans le théorème 3.4 vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/4} (\|pw(t)\|_{L^\infty} + \|w(t)\|_{H^1} + \|w_t(t)\|_{L^2}) = 0 .$$

Ce résultat suit de (3.7) lorsque $c = c_*$, mais a l'intérêt de fournir un taux de décroissance en temps pour les perturbations dans le cas non critique $c > c_*$ [13].

3.3. Le cas bistable [17]

Nous étudions dans cette section la stabilité locale de l'onde progressive (3.2) dans le cas bistable. Pour simplifier, nous supposons que $f(u) = 2u(1-u)(u-u_0)$, auquel cas l'unique solution de (3.3), (3.4) est $h(x) = (1 + e^x)^{-1}$, avec $c = 1 - 2u_0 \in (-1, 1)$. Les résultats présentés ci-dessous n'ont pas encore été publiés, si ce n'est dans la note [17].

Nous commençons par le cas de la dimension un d'espace, qui doit être traité à part. Nous récrivons l'équation (3.6) sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \Lambda_\varepsilon \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ w^2 \mathcal{N}(h, w) \end{pmatrix} ,$$

où

$$\Lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^{-1} L & \varepsilon^{-1}(-1 + 2\varepsilon c \partial_x) \end{pmatrix} , \quad L = \partial_x^2 + c \partial_x + f'(h) .$$

Comme $f'(h(x)) \rightarrow -1 \pm c$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, un calcul direct (en variables de Fourier) montre que le spectre essentiel de l'opérateur Λ_ε dans l'espace d'énergie $X = H^1(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$ vérifie $\sigma_{\text{ess}}(\Lambda_\varepsilon) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(z) \leq \mu_\varepsilon\}$, où

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \left(-1 + \text{Re} \sqrt{1 - 4\varepsilon(1 - |c|)} \right) < 0 .$$

D'autre part, l'équation aux valeurs propres $\Lambda_\varepsilon(w_1, w_2)^t = \lambda(w_1, w_2)^t$ s'écrit de façon équivalente

$$w_1'' + c(1 + 2\varepsilon\lambda)w_1' + f'(h)w_1 = \lambda(1 + \varepsilon\lambda)w_1, \quad w_2 = \lambda w_1.$$

L'étude de cette équation différentielle révèle que toute valeur propre λ de Λ_ε telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > \mu_\varepsilon$ est forcément réelle et simple. Si elle reste en dehors du spectre essentiel, une telle valeur propre dépend continûment de $\varepsilon > 0$, et converge vers une valeur propre de L lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda = 0$ est une valeur propre de Λ_ε , associée à la fonction propre $(w_1, 0)$, où $w_1(x) = -h'(x) > 0$ (cette valeur propre nulle est due à l'invariance par translation de l'équation originale). En outre, il suit de la théorie de Sturm-Liouville que $\lambda = 0$ est la plus grande valeur propre de L (c'est-à-dire la valeur propre située le plus à droite dans le plan complexe). Par continuité, $\lambda = 0$ est donc la plus grande valeur propre de Λ_ε pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, il existe $\nu_\varepsilon > 0$ tel que le spectre de Λ_ε dans X vérifie

$$\sigma(\Lambda_\varepsilon) = \{0\} \cup \Sigma_\varepsilon, \quad \text{où } \Sigma_\varepsilon \subset \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq -\nu_\varepsilon\}.$$

Cette propriété de séparation spectrale implique que la famille des translatés de l'onde progressive h est *normalement hyperbolique* (et normalement attractive). En utilisant les mêmes techniques que dans le cas parabolique [Sa,He], on en déduit qu'une petite perturbation dans $X = \mathbf{H}^1(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$ a pour effet de translater l'onde progressive dans le référentiel en mouvement :

Théorème 3.5. *On suppose que $f(u) = 2u(1-u)(u-u_0)$ et que $n = 1$. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale $(w_0, w_1) \in X$ vérifiant $\|w_0\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \varepsilon\|w_1\|_{L^2}^2 \leq \delta$, l'équation (3.6) possède une unique solution globale $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), X)$ telle que $(w(0), w_t(0)) = (w_0, w_1)$. En outre, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que, si $v(x, t) = h(x) + w(x, t)$, alors*

$$\|v(\cdot, t) - h(\cdot + \alpha)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \varepsilon\|v_t(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(e^{-\nu t}), \quad t \rightarrow +\infty,$$

pour tout $\nu < \nu_\varepsilon$.

En dimension supérieure $n \geq 2$, nous ne considérons que des perturbations intégrables par rapport à la variable transverse $y \in \mathbf{R}^{n-1}$. En particulier, cette hypothèse exclut les translations de l'onde progressive. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, $\ell \in \mathbf{N}$, nous introduisons l'espace $Y_\ell^k = \mathcal{H}_\ell^k \times \mathcal{H}_\ell^{k-1}$, où \mathcal{H}_ℓ^k est l'espace de Sobolev à poids défini par la norme

$$\|w\|_{\mathcal{H}_\ell^k}^2 = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{|j| \leq k} |\partial^j w(x, y)|^2 (1 + |y|^2)^\ell dx dy.$$

Dans cette expression, la somme porte sur tous les indices $j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{N}^n$ d'ordre $|j| = |j_1| + \dots + |j_n| \leq k$. Nous supposons que $k > n/2$, de sorte que \mathcal{H}_ℓ^k est une algèbre pour le produit usuel, et que $\ell > (n+1)/2$, ce qui assure l'intégrabilité par rapport à la variable transverse $y \in \mathbf{R}^{n-1}$. Nous notons enfin $\Phi_{k\ell}^\varepsilon$ la forme quadratique sur Y_ℓ^k définie par $\Phi_{k\ell}^\varepsilon(w, w_t) = \|w\|_{\mathcal{H}_\ell^k}^2 + \varepsilon\|w_t\|_{\mathcal{H}_\ell^{k-1}}^2$. Notre dernier résultat s'énonce alors :

Théorème 3.6. *On suppose que $f(u) = 2u(1-u)(u-u_0)$ et que $n \geq 2$. Soient $k > n/2$ et $\ell > (n+1)/2$. Il existe des constantes $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale $(w_0, w_1) \in Y_\ell^k$ vérifiant $\Phi_{k\ell}^\varepsilon(w_0, w_1) \leq \delta$, l'équation (3.6) possède une unique solution globale $(w, w_t) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), Y_\ell^k)$ telle que $(w(0), w_t(0)) = (w_0, w_1)$. En outre, il existe $\alpha_* \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^n} \left| w(x, t) - \frac{\alpha_*}{t^{(n-1)/2}} h'(x) \psi_* \left(\frac{y\sqrt{1+\varepsilon c^2}}{\sqrt{t}} \right) \right| = \mathcal{O}(t^{-n/2}), \quad (3.20)$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$, où $\psi_*(\eta) = e^{-|\eta|^2/4}$.

Cet énoncé ressemble beaucoup au théorème 3.2, quoique le taux de décroissance $t^{-(n-1)/2}$ et le profil autosimilaire ψ_* dans (3.20) soient uniquement dus à la diffusion transverse, sans que la présence de l'onde progressive ne soit ressentie. Dans la limite parabolique $\varepsilon \rightarrow 0$, nous retrouvons un résultat proche de celui obtenu par Kapitula [Kap].

Remarque. Contrairement aux autres résultats de stabilité locale énoncés dans ce chapitre, le théorème 3.6 suppose que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Cette restriction est sans doute de nature technique, et devrait pouvoir être supprimée dans le futur.

4. Variables d'échelle et développements asymptotiques

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude du comportement asymptotique en temps des solutions d'équations paraboliques ou hyperboliques amorties définies sur l'espace tout entier. Les résultats présentés dans les chapitres précédents, en particulier les théorèmes 1.3, 3.1 et 3.6, montrent que les solutions de tels systèmes, une fois exprimées dans des variables appropriées, convergent souvent vers un profil *autosimilaire* lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce profil est solution d'une équation limite, de type parabolique, qui ne retient du système original que quelques caractéristiques essentielles, telles que le comportement à l'infini des coefficients ou les conditions aux limites imposées aux solutions. Il en résulte que le comportement de ces systèmes pour les grands temps jouit d'une certaine *universalité*, qui se traduit par des développements asymptotiques dont les premiers termes ne dépendent des données initiales et des détails de l'équation qu'au travers d'un petit nombre de coefficients, cf. (3.12), (3.20).

Nous présentons dans ce chapitre une méthode permettant d'obtenir rigoureusement de tels développements asymptotiques, basée sur l'emploi des *variables d'échelle* (ou variables *autosimilaires*)

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \tau = \log t. \quad (4.1)$$

Ces variables ont été utilisées par différents auteurs pour établir la convergence vers des solutions autosimilaires, en particulier pour l'équation de la chaleur avec non-linéarité polynomiale [GKS,Kav,BK2,EKM,GV,Wa] ou pour des lois de conservation [EZ,Zu]. Nous montrons ici que cette technique s'applique également à des équations hyperboliques amorties de la forme (3.1), ainsi qu'à des systèmes à coefficients non constants. Ces deux extensions sont apparemment nouvelles, et permettent de démontrer

les théorèmes 3.2 et 3.6 en étudiant le comportement asymptotique en temps des solutions de (3.6).

Pour simplifier la présentation, nous nous placerons dans toute la suite en dimension un d'espace, mais cette restriction n'est nullement essentielle. Nous exposerons pour commencer la méthode des variables d'échelle sur l'exemple simple de l'équation de la chaleur non linéaire. Nous étudierons ensuite une équation hyperbolique amortie dont les coefficients convergent vers des limites, égales ou non, lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Enfin, la dernière section sera consacrée à une esquisse de la démonstration du théorème 3.2. Tous les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec G. Raugel.

4.1. L'équation de la chaleur non linéaire

Cette section ne contient aucun résultat original, mais sert d'introduction aux méthodes utilisées dans la suite de ce chapitre. Nous étudions le comportement asymptotique en temps des petites solutions de l'équation de la chaleur non linéaire

$$u_t = u_{xx} + \gamma|u|^{2\beta}u, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 1, \quad (4.2)$$

où $\gamma \in \mathbf{R}$ et $\beta > 1$ sont des paramètres. Nous supposons toujours que la donnée initiale $u_1(x) = u(x, 1)$ est bornée et intégrable sur \mathbf{R} . Dans le cas linéaire $\gamma = 0$, il est bien connu que la solution $u(x, t)$ de (4.2) vérifie, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} u(\xi\sqrt{t}, t) = \varphi_0(\xi) \int_{\mathbf{R}} u_1(x) dx, \quad \text{où } \varphi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\xi^2/4}.$$

En d'autres termes, $u(x, t)$ converge lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers la solution autosimilaire $\alpha t^{-1/2} \varphi_0(xt^{-1/2})$, où α est l'intégrale de la donnée initiale u_1 . Inspirés par ce résultat, nous cherchons des solutions de (4.2) sous la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log t\right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 1. \quad (4.3)$$

La nouvelle fonction $v(\xi, \tau)$ est alors solution de l'équation

$$v_\tau = v_{\xi\xi} + \frac{\xi}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v + \gamma e^{(1-\beta)\tau}|v|^{2\beta}v, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad \tau \geq 0, \quad (4.4)$$

pour la donnée initiale $v(\xi, 0) = v_0(\xi) \equiv u_1(\xi)$.

Le système (4.4) n'est certes pas plus simple que l'équation originale (4.2), mais il se prête mieux à l'examen du comportement asymptotique en temps des solutions. Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier les propriétés spectrales de l'opérateur linéaire \mathcal{L} figurant dans le membre de droite de (4.4). Par commodité, nous travaillons dans l'espace de Sobolev à poids $H_\ell^k = H_\ell^k(\mathbf{R})$ défini par la norme

$$\|v\|_{k\ell}^2 = \int_{\mathbf{R}} \sum_{j=0}^k |\partial_\xi^j v(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^\ell d\xi, \quad k, \ell \in \mathbf{N}.$$

Le résultat suivant est fondamental pour tous les développements ultérieurs :

Proposition 4.1. Soient $k, \ell \in \mathbf{N}$, et soit $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{H}_\ell^k$ l'opérateur différentiel défini par $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{v \in \mathbf{H}_\ell^k \mid v'' \in \mathbf{H}_\ell^k, \xi v' \in \mathbf{H}_\ell^k\}$ et $\mathcal{L}v = v'' + \frac{\xi}{2}v' + \frac{1}{2}v$ pour $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Alors le spectre de \mathcal{L} est l'ensemble

$$\sigma(\mathcal{L}) = \left\{ -\frac{n}{2} \mid n \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2} \right\}. \quad (4.5)$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \leq \ell - 1$, la valeur propre $\lambda_n = -n/2$ est simple, et la projection spectrale correspondante est donnée par $P_n(v) = (p_n, v)_{L^2} \varphi_n$, où φ_n est la fonction de Hermite

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/4}, \quad (4.6)$$

et p_n est le polynôme de Hermite

$$p_n(\xi) = \frac{2^n}{n!} e^{\xi^2/4} (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/4}. \quad (4.7)$$

Les valeurs propres $\lambda_n = -n/2$ et les expressions (4.6), (4.7) s'expliquent tout naturellement en remarquant que \mathcal{L} est conjugué à l'opérateur de l'oscillateur harmonique :

$$e^{\xi^2/8} \mathcal{L} e^{-\xi^2/8} = \partial_\xi^2 - \frac{\xi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

La présence du spectre continu se montre par calcul direct en représentation de Fourier, où l'opérateur \mathcal{L} a une expression simple [11, Appendix A]. En effet, si l'on note $\hat{v}(\eta) = \int_{\mathbf{R}} v(\xi) e^{-i\eta\xi} d\xi$, on a

$$\widehat{\mathcal{D}(\mathcal{L})} = \left\{ \hat{v} \in \mathbf{H}_k^\ell \mid \eta^2 \hat{v} \in \mathbf{H}_k^\ell, \eta \hat{v}' \in \mathbf{H}_k^\ell \right\}, \quad \widehat{\mathcal{L}v} = -\eta^2 \hat{v} - \frac{1}{2} \eta \hat{v}'.$$

Le semi-groupe engendré par \mathcal{L} est donné par la formule explicite :

$$(e^{\tau \mathcal{L}} v)(\eta) = \exp(-\eta^2(1 - e^{-\tau})) \hat{v}(\eta e^{-\tau/2}), \quad \tau \geq 0. \quad (4.8)$$

En particulier, si $\ell \geq 1$ et si $w \in \mathbf{H}_\ell^k$ vérifie $P_0 w = 0$, où P_0 est le projecteur spectral associé à la valeur propre nulle, on peut montrer l'estimation

$$\|e^{\tau \mathcal{L}} w\|_{k\ell} \leq C e^{-\nu\tau} \|w\|_{k\ell}, \quad \tau \geq 0, \quad (4.9)$$

où $\nu = \min(1/2, \ell/2 - 1/4)$.

Nous supposons désormais que $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$, de sorte que $\mathbf{H}_\ell^k \subset L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$. Si $v(\xi, \tau)$ est une solution de (4.4), la proposition 4.1 suggère la décomposition $v(\xi, \tau) = \alpha(\tau) \varphi_0(\xi) + w(\xi, \tau)$, où

$$\alpha(\tau) = \int_{\mathbf{R}} v(\xi, \tau) d\xi, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} w(\xi, \tau) d\xi = 0.$$

En d'autres termes, $\alpha = (p_0, v)_{L^2}$ et $w = (\mathbf{1} - P_0)v$, où P_0 est la première projection spectrale. Les fonctions α, w sont solutions du système

$$\alpha_\tau = \gamma e^{(1-\beta)\tau} \int_{\mathbf{R}} |v|^{2\beta} v \, d\xi, \quad w_\tau = \mathcal{L}w + \gamma e^{(1-\beta)\tau} Q_0(|v|^{2\beta} v), \quad (4.10)$$

où $v = \alpha\varphi_0 + w$ et $Q_0 = \mathbf{1} - P_0$. Au vu de (4.9) et (4.10), il est évident que, si $\beta > 1$ et si v est une solution de (4.4) suffisamment petite dans H_ℓ^k , alors $w(\xi, \tau)$ converge exponentiellement vers zéro lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, et $\alpha(\tau)$ tend vers une valeur limite $\alpha_* \in \mathbf{R}$. Nous avons donc esquissé la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 4.2. *Soient $k, \ell \in \mathbf{N}^*$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $\beta > 1$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute donnée initiale $v_0 \in H_\ell^k$ telle que $\|v_0\|_{k\ell} \leq \delta$, l'équation (4.4) possède une unique solution globale $v \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), H_\ell^k)$ telle que $v(0) = v_0$. En outre, il existe $\alpha_* \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\|v(\cdot, \tau) - \alpha_*\varphi_0\|_{k\ell} = \mathcal{O}(e^{-\mu\tau}), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

pour tout $\mu < \min(1/2, \ell/2 - 1/4, \beta - 1)$.

En termes des variables originales, ce résultat montre que la solution de (4.2) vérifie

$$u(x, t) = \frac{\alpha_*}{\sqrt{t}} \varphi_0\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{O}(t^{-1/2-\mu}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Le coefficient α_* dépend des données initiales, et coïncide avec $\int_{\mathbf{R}} u_1(x) \, dx$ lorsque $\gamma = 0$.

Remarque. En introduisant la variable auxiliaire $\zeta(\tau) = e^{(1-\beta)\tau}$, on peut récrire l'équation (4.4) sous la forme d'un système autonome

$$v_\tau = \mathcal{L}v + \gamma\zeta|v|^{2\beta}v, \quad \zeta_\tau = (1-\beta)\zeta, \quad (4.11)$$

que l'on étudiera dans l'espace $H_\ell^k \oplus \mathbf{R}$. Si $\beta > 1$, l'origine $(v, \zeta) = (0, 0)$ du système (4.11) possède une variété centrale de dimension un, qui coïncide avec le sous-espace $V_0 = \{(\alpha\varphi_0, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ associé à la valeur propre nulle. Cette variété est localement attractive, et constituée de points d'équilibre de (4.11). Il suit alors d'un résultat général [Ca] que toute trajectoire de (4.11) dans un voisinage de l'origine converge exponentiellement vers $(\alpha_*\varphi_0, 0)$ pour un $\alpha_* \in \mathbf{R}$. Cette démonstration géométrique très élégante de la proposition 4.2 est due à C.E. Wayne [Wa].

4.2. Une équation hyperbolique amortie à coefficients non constants [11]

Nous étudions dans cette section le comportement pour les grands temps des petites solutions de l'équation hyperbolique avec dissipation

$$\varepsilon u_{tt} + u_t = (a(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 1, \quad (4.12)$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre. Nous supposons que le coefficient de diffusion $a(x)$ est une fonction continue, strictement positive, qui converge rapidement vers des limites $a_{\pm} > 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Nous supposons également que la non-linéarité $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction localement lipschitzienne vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(u)| \leq C|u|^p$ pour tout $u \in \mathbf{R}$, où $C > 0$ et $p > 3$. Ce problème modèle est traité ici comme une étape intermédiaire entre l'équation de la chaleur discutée au paragraphe précédent et l'équation (3.6) régissant la perturbation d'une onde progressive, qui constitue notre objectif final.

Motivés par les résultats obtenus dans le cas parabolique, nous cherchons à montrer la convergence des solutions de (4.12) vers des fonctions autosimilaires lorsque $t \rightarrow +\infty$. Nous généralisons à cet effet le changement de variables (4.3) de la façon suivante. Si $u(x, t)$ est une solution (régulière) de (4.12), nous posons

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log t\right), \quad u_t(x, t) = \frac{1}{t^{3/2}} w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log t\right), \quad (4.13)$$

où $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 1$. Les nouvelles fonctions $v(\xi, \tau)$, $w(\xi, \tau)$ vérifient alors le système

$$\begin{aligned} v_\tau - \frac{\xi}{2}v_\xi - \frac{1}{2}v &= w, \\ \varepsilon e^{-\tau} \left(w_\tau - \frac{\xi}{2}w_\xi - \frac{3}{2}w \right) + w &= (a(\xi e^{\tau/2})v_\xi)_\xi + e^{3\tau/2}f(v e^{-\tau/2}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $\xi \in \mathbf{R}$, $\tau \geq 0$. En vertu de (4.13), les données initiales pour l'équation (4.12) et le système (4.14) sont reliées par les formules $v(\xi, 0) = u(\xi, 1)$, $w(\xi, 0) = u_t(\xi, 1)$, $\xi \in \mathbf{R}$.

Les hypothèses que nous avons faites sur la diffusion $a(x)$ et sur la non-linéarité $f(u)$ impliquent que les coefficients du système non autonome (4.14) possèdent des limites lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Il est donc naturel de penser que le comportement pour les grands temps des solutions de (4.14) est déterminé par le système limite, qui s'écrit

$$v_\tau = \tilde{\mathcal{L}}v \stackrel{\text{déf}}{=} (\tilde{a}(\xi)v_\xi)_\xi + \frac{\xi}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v, \quad w = (\tilde{a}(\xi)v_\xi)_\xi, \quad (4.15)$$

où

$$\tilde{a}(\xi) = \begin{cases} a_- & \text{si } \xi < 0, \\ a_+ & \text{si } \xi > 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Remarquons que (4.15) est une équation parabolique linéaire à coefficients constants par morceaux, qui ne retient du système original que les valeurs limites a_{\pm} du coefficient de diffusion. En particulier, cette équation est indépendante de ε et de la non-linéarité f , pour autant que $|f(u)| \leq C|u|^p$ avec $p > 3$. Les propriétés spectrales de l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}$ dans (4.15) sont identiques à celles de l'opérateur \mathcal{L} étudié dans la proposition 4.1,

qui correspond au cas particulier où $a_+ = a_- = 1$. Ainsi, le spectre de $\tilde{\mathcal{L}}$ dans l'espace \mathbb{H}_ℓ^k est constitué de ℓ valeurs propres isolées $\lambda_n = -n/2$ ($n = 0, \dots, \ell - 1$) et de spectre continu remplissant le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1/4 - \ell/2\}$. Les fonctions propres $\tilde{\varphi}_n$ et les projections spectrales \tilde{P}_n associées aux valeurs propres λ_n ne sont plus données par les formules (4.6), (4.7), mais par des expressions modifiées que l'on trouvera dans [11, Appendix A]. En particulier, la première fonction propre devient

$$\tilde{\varphi}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{\sqrt{a_+} + \sqrt{a_-}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tilde{a}(\xi)}\right), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Conformément à ces remarques, si $v(\xi, \tau)$ est une solution de (4.15) dans \mathbb{H}_ℓ^k pour un $\ell \geq 1$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que

$$v(\xi, \tau) = \alpha \tilde{\varphi}_0(\xi) + \mathcal{O}(e^{-\nu\tau}), \quad w(\xi, \tau) = \alpha \tilde{\psi}_0(\xi) + \mathcal{O}(e^{-\nu\tau}), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (4.17)$$

où $\nu = \min(1/2, \ell/2 - 1/4)$ et

$$\tilde{\psi}_0(\xi) = (\tilde{a}(\xi)\tilde{\varphi}'_0(\xi))' = -\frac{\xi}{2}\tilde{\varphi}'_0(\xi) - \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_0(\xi).$$

Notre résultat principal montre que le comportement asymptotique (4.17) est aussi celui des solutions du système complet (4.14) dans un voisinage de l'origine. Nous l'énonçons pour simplifier dans le cas où $k = \ell = 1$, en notant $X = \mathbb{H}_1^1$, $Y = \mathbb{H}_1^0$, et $Z = X \times Y$.

Théorème 4.3. *Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale $(v_0, w_0) \in Z$ telle que $\|v_0\|_X^2 + \varepsilon\|w_0\|_Y^2 \leq \delta$, le système (4.14) possède une unique solution globale $(v, w) \in \mathcal{C}^0([0, +\infty), Z)$ telle que $(v(0), w(0)) = (v_0, w_0)$. En outre, il existe $\alpha_* \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\|v(\tau) - \alpha_* \tilde{\varphi}_0\|_X + \|w(\tau) - \alpha_* \tilde{\psi}_0\|_{L^2} = \mathcal{O}(\tau e^{-\mu\tau}), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (4.18)$$

où $\mu = \min(1/4, (p-3)/2)$.

Remarques.

1. Dans le cas linéaire où $f = 0$, le coefficient α_* dans (4.18) est donné par la formule explicite

$$\alpha_* = \int_{\mathbf{R}} (v_0(\xi) + \varepsilon w_0(\xi)) d\xi.$$

2. En plus de (4.18), la démonstration fournit l'estimation suivante

$$\int_0^\tau e^{-2\mu(\tau-s)} \|w(s) - \alpha_* \tilde{\psi}_0\|_Y^2 ds = \mathcal{O}(\tau^2 e^{-2\mu\tau}), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Toutefois, sous les hypothèses du théorème 4.3, nous ne savons pas si $\|w(\tau) - \alpha_* \tilde{\psi}_0\|_Y = \mathcal{O}(\tau e^{-\mu\tau})$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$.

En termes des variables originales, le théorème 4.3 montre que, pour toute donnée initiale $(u(1), u_t(1))$ suffisamment petite dans Z , l'équation (4.12) possède une unique

solution globale $(u, u_t) \in \mathcal{C}^0([1, +\infty), Z)$, qui devient asymptotiquement autosimilaire lorsque $t \rightarrow +\infty$. En particulier, il suit de (4.18) que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| u(x, t) - \frac{\alpha_*}{\sqrt{t}} \tilde{\varphi}_0 \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right| = \mathcal{O} \left(\frac{\log(t)}{t^{\mu+1/2}} \right), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (4.19)$$

et

$$\left\| u_t(\cdot, t) - \frac{\alpha_*}{t^{3/2}} \tilde{\psi}_0 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}} \right) \right\|_{L^2} = \mathcal{O} \left(\frac{\log(t)}{t^{\mu+5/4}} \right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.20)$$

On remarquera que ces expressions ne dépendent du paramètre $\varepsilon > 0$, de la non-linéarité $f(u)$ et de la forme exacte de la fonction $a(x)$ qu'au travers du coefficient $\alpha_* \in \mathbf{R}$. En particulier, les estimations (4.19), (4.20) sont également valables pour les solutions de l'équation de diffusion obtenue en posant $\varepsilon = 0$ dans (4.12).

La démonstration du théorème 4.3 débute de la même façon que celle de la proposition 4.2. On part de la décomposition

$$v(\xi, \tau) = \alpha(\tau) \tilde{\varphi}_0(\xi) + V(\xi, \tau), \quad w(\xi, \tau) = \beta(\tau) \tilde{\varphi}_0(\xi) + \alpha(\tau) \tilde{\psi}_0(\xi) + W(\xi, \tau),$$

où $\alpha(\tau) = \int_{\mathbf{R}} v(\xi, \tau) d\xi$ et $\beta(\tau) = \int_{\mathbf{R}} w(\xi, \tau) d\xi$. Ces définitions impliquent que les fonctions V et W sont à moyenne nulle :

$$\int_{\mathbf{R}} V(\xi, \tau) d\xi = \int_{\mathbf{R}} W(\xi, \tau) d\xi = 0. \quad (4.21)$$

Les équations vérifiées par α, β s'écrivent alors

$$\frac{d}{d\tau} \alpha(\tau) = \beta(\tau), \quad \frac{d}{d\tau} (\varepsilon e^{-\tau} \beta(\tau) + \alpha(\tau)) = m(\tau), \quad (4.22)$$

où $m(\tau) = e^{3\tau/2} \int_{\mathbf{R}} f(v e^{-\tau/2}) d\xi$. En particulier, si $v(\cdot, \tau)$ reste borné dans l'espace $X = H_1^1$, les équations (4.22) impliquent que $\alpha(\tau)$ converge exponentiellement vers une valeur limite α_* lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, et que $\beta(\tau)$ converge vers zéro.

D'autre part, les fonctions V, W sont solutions du système

$$\begin{aligned} V_\tau - \frac{\xi}{2} V_\xi - \frac{1}{2} V &= W, \\ \varepsilon e^{-\tau} \left(W_\tau - \frac{\xi}{2} W_\xi - \frac{3}{2} W \right) + W &= (a(\xi e^{\tau/2}) V_\xi)_\xi + \alpha(\tau) (b(\xi e^{\tau/2}) \tilde{\varphi}'_0)_\xi \\ &\quad - \varepsilon e^{-\tau} h(\xi, \tau) + r(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (4.23)$$

où $b(x) = a(x) - \tilde{a}(x)$ et

$$h(\xi, \tau) = 2\beta(\tau) \tilde{\psi}_0(\xi) + \alpha(\tau) (\tilde{a}(\xi) \tilde{\psi}'_0)' , \quad r(\xi, \tau) = e^{3\tau/2} f(v e^{-\tau/2}) - \tilde{\varphi}_0(\xi) m(\tau).$$

Le point crucial est de montrer que la solution (V, W) de (4.23) converge exponentiellement vers zéro lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Dans le cas de l'équation de la chaleur discutée au paragraphe précédent, la convergence vers zéro de la solution w de (4.10) était une

conséquence immédiate de l'estimation (4.9). L'analogie de cette borne est plus difficile à démontrer dans le cas présent, car la partie linéaire de (4.23) est non autonome et à coefficients non constants. Il est toutefois possible d'obtenir les estimations nécessaires à l'aide de diverses fonctionnelles d'énergie, dont la construction est détaillée dans [11]. En particulier, pour exploiter la contrainte (essentielle) de moyenne nulle (4.21), on introduit les primitives

$$F(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} V(\eta, \tau) d\eta, \quad G(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} W(\eta, \tau) d\eta,$$

et l'on commence par estimer (F, G) dans $H^1 \times L^2$ à l'aide de fonctionnelles classiques. Cette idée de passer aux primitives est déjà présente dans les travaux antérieurs de Hsiao et Liu [HL] et de Nishihara [Ni], qui ont obtenu des résultats dans l'esprit du théorème 4.3 pour des systèmes de lois de conservation.

Remarque. Si $p > 4$ et si les données initiales $(u(1), u_t(1))$ sont suffisamment petites dans $H_2^1 \times H_2^0$, on peut montrer [11] que la solution de (4.12) vérifie

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| u(x, t) - \frac{\alpha_*}{\sqrt{t}} \tilde{\varphi}_0 \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) - \frac{\beta_*}{t} \tilde{\varphi}_1 \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right| = \mathcal{O} \left(\frac{\log(t)}{t^{\mu'+1/2}} \right), \quad t \rightarrow +\infty,$$

où $\alpha_*, \beta_* \in \mathbf{R}$, $\mu' = \min(3/4, (p-3)/2)$ et $\tilde{\varphi}_1$ est la fonction propre de l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}$ relative à la valeur propre $\lambda_1 = -1/2$. On voit donc que le développement asymptotique de $u(x, t)$ en puissances de $t^{-1/2}$ est entièrement déterminé, jusqu'au deuxième ordre, par les valeurs limites a_{\pm} du coefficient de diffusion. La situation change à partir du troisième ordre ($t^{-3/2}$), qui contient non seulement la fonction propre $\tilde{\varphi}_2$ relative à la valeur propre $\lambda_2 = -1$, mais également, pour la première fois, un terme dépendant explicitement de ε .

4.3. Stabilité locale du front critique dans le cas monostable [5,14]

Nous reprenons dans cette section l'étude de la stabilité des ondes progressives pour l'équation hyperbolique amortie (3.1), dans le cas monostable critique, en dimension un d'espace. Nous supposons donc que la non-linéarité f remplit les conditions (3.8), et que le paramètre c fixant la vitesse de l'onde est égal à sa valeur minimale $c_* = 2(f'(0))^{1/2}$. Notre point de départ est l'équation (3.6) satisfaite par les perturbations, qui devient dans le cas présent

$$\varepsilon w_{tt} + w_t - 2\varepsilon c_* w_{xt} = w_{xx} + c_* w_x + f'(h)w + w^2 \mathcal{N}(h, w). \quad (4.24)$$

En exploitant une idée due à Kirchgässner [Ki], nous considérons des perturbations w de la forme

$$w(x, t) = h'(x)W \left(x, \frac{t}{1 + \varepsilon c_*^2} \right). \quad (4.25)$$

Rappelons que $h'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, de sorte que le changement de variables (4.25) est bien défini. Pour simplifier, nous noterons encore t dans la suite la nouvelle variable $t/(1+\varepsilon c_*^2)$. L'équation vérifiée par la fonction $W(x, t)$ s'écrit

$$\eta W_{tt} + (1 - \nu \gamma(x))W_t - 2\nu W_{xt} = W_{xx} + \gamma(x)W_x + h'(x)W^2 \mathcal{N}(h, h'W), \quad (4.26)$$

où

$$\eta = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon c_*^2)^2}, \quad \nu = \frac{\varepsilon c_*}{1 + \varepsilon c_*^2}, \quad \gamma(x) = c_* + 2 \frac{h''(x)}{h'(x)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

L'analyse qui va suivre utilise de façon essentielle le comportement à l'infini de la fonction $\gamma(x)$, que nous décrivons maintenant. Une étude de l'équation différentielle (3.3) avec $c = c_*$ montre [AW] que le front critique h vérifie

$$h(x) = \begin{cases} 1 - a_3 e^{\kappa x} + \mathcal{O}(e^{2\kappa x}) & x \rightarrow -\infty, \\ (a_1 x + a_2) e^{-c_* x/2} + \mathcal{O}(x^2 e^{-c_* x}) & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.27)$$

où $a_1, a_3 > 0$, $a_2 \in \mathbf{R}$, et $\kappa = \frac{1}{2}(-c_* + \sqrt{c_*^2 - 4f'(1)}) > 0$. En utilisant des développements semblables pour les dérivées h' et h'' , on obtient

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_- + \mathcal{O}(e^{\kappa x}) & x \rightarrow -\infty, \\ 2/(x+x_0) + \mathcal{O}(x e^{-c_* x/2}) & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.28)$$

où $\gamma_- = c_* + 2\kappa$ et $x_0 = (a_2/a_1 - 2/c_*)$. On peut également montrer que $\gamma'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, comme l'illustre la figure 6. Il suit de (4.28) qu'il existe une unique fonction $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$p'(x) = \gamma(x)p(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{x^2} = 1. \quad (4.29)$$

Il est clair que $p(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et que $p(x) = \mathcal{O}(e^{\gamma_- x})$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

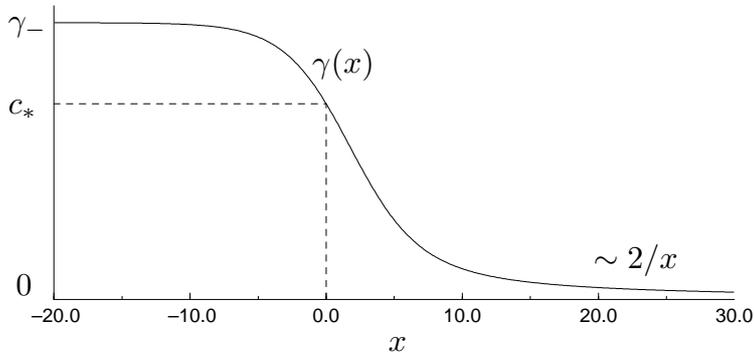


Fig. 6: La fonction $\gamma(x)$ dans le cas où $f(u) = u - u^2$ (donc $c_* = 2$, $\gamma_- = 2\sqrt{2}$).

Lorsque $\varepsilon = 0$ (et donc $\eta = \nu = 0$), l'équation (4.26) linéarisée autour de l'origine se réduit à

$$W_t = W_{xx} + \gamma(x)W_x. \quad (4.30)$$

Cette équation parabolique a été étudiée dans [5], où nous avons montré en particulier le résultat suivant :

Proposition 4.4. Soit $W_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction (mesurable) telle que

$$\int_{-\infty}^0 e^{\kappa x} |W_0(x)| dx + \int_0^{\infty} (1+x)^3 |W_0(x)| dx < \infty.$$

Alors l'unique solution de l'équation (4.30) pour la donnée initiale W_0 vérifie, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} W(\xi \sqrt{t}, t) = \varphi_*(\xi) \int_{\mathbf{R}} p(x) W_0(x) dx, \quad (4.31)$$

où φ_* est défini en (3.13) et p est déterminé par (4.29).

Ainsi, la solution $W(x, t)$ de (4.30) décroît comme $t^{-3/2}$ et devient asymptotiquement autosimilaire lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce résultat nous servira de guide dans la suite, où nous établirons, par un argument indépendant, la même propriété pour les solutions de l'équation complète (4.26).

Inspirés par la proposition 4.4 et par les résultats de la section précédente, nous cherchons des solutions W de (4.26) sous la forme

$$W(x, t) = \frac{1}{t^{3/2}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log t\right), \quad W_t(x, t) = \frac{1}{t^{5/2}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log t\right). \quad (4.32)$$

Les nouvelles fonctions $U(\xi, \tau), V(\xi, \tau)$ vérifient le système

$$\begin{aligned} U_\tau - \frac{\xi}{2} U_\xi - \frac{3}{2} U &= V, \\ \eta e^{-\tau} (V_\tau - \frac{\xi}{2} V_\xi - \frac{5}{2} V) + (1 - \nu \gamma(\xi e^{\tau/2})) V - 2\nu e^{-\tau/2} V_\xi &= \\ U_{\xi\xi} + e^{\tau/2} \gamma(\xi e^{\tau/2}) U_\xi + e^{-\tau/2} h'(\xi e^{\tau/2}) U^2 N(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (4.33)$$

où $N(\xi, \tau) = \mathcal{N}(h(\xi e^{\tau/2}), e^{-3\tau/2} h'(\xi e^{\tau/2}) U)$. Pour déterminer le comportement asymptotique en temps des solutions de (4.33), nous observons que les coefficients de ce système non autonome possèdent des limites lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. En vertu de (4.28), nous avons en effet

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{\tau/2} \gamma(\xi e^{\tau/2}) = \frac{2}{\xi} \quad \text{si } \xi > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \gamma(\xi e^{\tau/2}) = \gamma_- \quad \text{si } \xi < 0,$$

de sorte que le système limite s'écrit

$$U_\tau = \mathcal{L}_\infty U \stackrel{\text{déf}}{=} U_{\xi\xi} + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{2}{\xi}\right) U_\xi + \frac{3}{2} U \quad \text{si } \xi > 0, \quad U_\xi = 0 \quad \text{si } \xi \leq 0. \quad (4.34)$$

Il est donc raisonnable de supposer que le comportement pour les grands temps des solutions de (4.33) est déterminé par les propriétés spectrales de l'opérateur \mathcal{L}_∞ défini sur \mathbf{R}_+ , avec condition de Neumann homogène en $\xi = 0$. Or, il est facile voir que \mathcal{L}_∞ n'est autre que l'image par le changement de variables (4.32) de la partie radiale de l'opérateur de Laplace en dimension trois. En effet, si U et W sont reliés par (4.32), l'équation $U_\tau = \mathcal{L}_\infty U$ correspond à $W_t = W_{xx} + (2/x)W_x$, $x > 0$. Cette observation cruciale explique le facteur $t^{3/2}$ dans (4.31), et permet de déterminer le spectre de \mathcal{L}_∞ par calcul direct, comme dans la proposition 4.1. Ainsi, dans l'espace $H^1(\mathbf{R}_+, (1+x)^6 dx)$, le spectre de \mathcal{L}_∞ est constitué de la valeur propre $\lambda_0 = 0$, dont la fonction propre est la gaussienne $e^{-\xi^2/4}$, et du demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(z) \leq -1/4\}$.

Il s'ensuit que toute solution de (4.34) converge exponentiellement, lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, vers un multiple de la fonction φ_* définie en (3.13). Si (U, V) est une solution globale de (4.33) dans un voisinage de l'origine, on peut donc supposer que $(U(\cdot, \tau), V(\cdot, \tau)) \rightarrow \alpha_*(\varphi_*, \psi_*)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, où $\psi_* = -\frac{\xi}{2}\varphi'_* - \frac{3}{2}\varphi_*$. Noter que le système limite (4.34) est indépendant de ε , de sorte que ces remarques s'appliquent également au cas parabolique, en accord avec la proposition 4.4.

Nous introduisons maintenant les espaces fonctionnels dans lesquels nous formulerons notre résultat. Pour tout $\tau \geq 0$, notons L_τ^2 , H_τ^1 les espaces de Lebesgue et de Sobolev définis par les normes

$$\|U\|_{L_\tau^2}^2 = \int_{-\infty}^0 e^{2\kappa\xi e^{\tau/2}} |U(\xi)|^2 d\xi + \int_0^\infty (1+\xi)^6 |U(\xi)|^2 d\xi, \quad \|U\|_{H_\tau^1}^2 = \|U\|_{L_\tau^2}^2 + \|U_\xi\|_{L_\tau^2}^2.$$

Notre espace de base est le produit $Z_\tau = H_\tau^1 \times L_\tau^2$ muni de sa norme naturelle, ainsi que de la forme quadratique

$$\Phi_\eta(\tau, U, V) = \|U\|_{H_\tau^1}^2 + \eta e^{-\tau} \|V\|_{L_\tau^2}^2, \quad \eta > 0.$$

Il suit de (4.32) que $(U(\cdot, \tau), V(\cdot, \tau)) \in Z_\tau$ si et seulement si $(W(\cdot, t), W_t(\cdot, t)) \in Z_0 = H_0^1 \times L_0^2$. En vertu de (4.25), (4.27), ceci est encore équivalent à $(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t)) \in X_q$, où X_q est l'espace dans lequel est formulé le théorème 3.2. Ces équivalences expliquent le choix de l'espace (dépendant du temps) Z_τ .

Nous pouvons à présent énoncer notre résultat final, dont découle le théorème 3.2 :

Théorème 4.5. *Supposons que f vérifie (3.8), et soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale $(U_0, V_0) \in Z_0$ vérifiant $\Phi_\eta(0, U_0, V_0) \leq \delta$, le système (4.33) possède une unique solution globale $(U, V) \in C^0([0, +\infty), Z_\tau)$ telle que $(U(0), V(0)) = (U_0, V_0)$. En outre, il existe $\alpha_* \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\tau \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \|U(\tau) - \alpha_* \varphi_*\|_{H_\tau^1}^2 + \eta e^{-\tau} \|V(\tau) - \alpha_* \psi_*\|_{L_\tau^2}^2 + \int_0^\tau e^{-(\tau-s)/2} \|V(s) - \alpha_* \psi_*\|_{L_s^2}^2 ds \\ \leq C(1 + \tau)^2 e^{-\tau/2} \Phi_\eta(0, U_0, V_0). \end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultat montre en particulier que $U(\cdot, \tau)$ converge vers $\alpha_* \varphi_*$ comme $e^{-\tau/4}$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Le taux de décroissance $e^{-\tau/4}$ est optimal dans notre espace de fonctions, car il correspond à la borne supérieure du spectre continu de l'opérateur \mathcal{L}_∞ dans $H^1(\mathbf{R}_+, (1+x)^6 dx)$. Il est toutefois possible de l'améliorer jusqu'à $e^{-\tau/2}$ en supposant une décroissance polynomiale plus rapide des fonctions U, V lorsque $\xi \rightarrow +\infty$, comme dans [5].

2. Nous ignorons si $\|V(\tau) - \alpha_* \psi_*\|_{L_\tau^2}^2 = \mathcal{O}(e^{-\tau/4})$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Cette difficulté à obtenir une borne ponctuelle en temps sur la seconde composante existe déjà pour le système (4.12), voir la remarque 2 après le théorème 4.3.

La démonstration du théorème 4.5 suit exactement les mêmes lignes que celle du théorème 4.3. Motivés par le résultat (4.31) et l'analyse spectrale de l'opérateur \mathcal{L}_∞ , nous décomposons la solution (U, V) de (4.33) de la façon suivante :

$$U(\xi, \tau) = \alpha(\tau) \varphi_*(\xi) + f(\xi, \tau), \quad V(\xi, \tau) = \beta(\tau) \varphi_*(\xi) + \alpha(\tau) \psi_*(\xi) + g(\xi, \tau),$$

où les coefficients $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ sont choisis de façon que

$$\int_{\mathbf{R}} p(\xi e^{\tau/2}) f(\xi, \tau) \, d\xi = \int_{\mathbf{R}} p(\xi e^{\tau/2}) g(\xi, \tau) \, d\xi = 0 . \quad (4.35)$$

Alors les fonctions $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ sont solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires de la forme (4.22). Sous l'hypothèse que $U(\cdot, \tau)$ reste borné dans H_τ^1 , ces équations impliquent que $\alpha(\tau)$ converge exponentiellement vers une valeur limite α_* lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, et que $\beta(\tau)$ converge vers zéro.

D'autre part, les fonctions $f(\xi, \tau), g(\xi, \tau)$ sont solutions d'un système très semblable à (4.33), avec quelques termes additionnels faisant intervenir $\alpha(\tau)$ et $\beta(\tau)$. Comme précédemment, la conditions de moyenne nulle (4.35) permet de passer aux primitives

$$F(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\tau} p(y e^{\tau/2}) f(y, \tau) \, dy , \quad G(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\tau} p(y e^{\tau/2}) g(y, \tau) \, dy .$$

En utilisant une hiérarchie de fonctionnelles d'énergie, dont la construction s'avère ici assez délicate, on montre que les fonctions F, G d'abord, et f, g ensuite, convergent exponentiellement vers zéro lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, dans les espaces fonctionnels appropriés. Ceci achève la démonstration, que l'on trouvera exposée en détail dans [14].

Remarque. Dans un travail antérieur [5] consacré au cas parabolique $\varepsilon = 0$, nous avons obtenu l'analogue du théorème 4.5, dans des espaces de fonctions apparentés. La démonstration présentée dans [5], sensiblement différente de celle que nous avons esquissée ici, comporte deux étapes principales. Dans un premier temps, nous étudions l'équation linéaire (4.30) par des méthodes opératorielles, et nous obtenons des estimations asymptotiques en temps qui impliquent en particulier le résultat (4.31). La seconde étape consiste à estimer les termes non linéaires et à montrer la convergence vers le profil autosimilaire φ_* , en contrôlant les itérations d'une application dite de "renormalisation". Cette application \mathcal{R} , introduite dans [BKL], associe à la donnée initiale $W_1 = W(\cdot, 1)$ la solution de l'équation (4.26) (avec $\eta = \nu = 0$) au temps $t = L^2 \gg 1$, transformée d'échelle suivant la formule suivante

$$(\mathcal{R}W_1)(x) = L^3 W(Lx, L^2) , \quad x \in \mathbf{R} .$$

Il s'ensuit que $\mathcal{R}^k W_1 = U(\cdot, 2k \log L)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, où U est la solution de (4.33) (avec $\eta = \nu = 0$) vérifiant la condition initiale $U(\cdot, 0) = W_1$. En d'autres termes, contrôler les itérations de l'application de renormalisation revient à étudier à *temps discrets* l'opérateur d'évolution associé à l'équation (4.33).

La comparaison avec la démonstration du théorème 4.5 présentée ci-dessus révèle deux avantages substantiels de la nouvelle méthode. Tout d'abord, nous n'avons besoin d'aucune estimation précise sur la résolvante de l'opérateur linéarisé autour de l'onde progressive, même si certaines données spectrales interviennent dans la construction de nos fonctionnelles. Cette simplification importante, qui a déjà permis de traiter le cas hyperbolique $\varepsilon > 0$, est tout particulièrement intéressante dans la perspective d'applications futures à des problèmes en dimension supérieure, où l'on ne dispose pas de représentation explicite de la résolvante (à l'aide, par exemple, de la fonction d'Evans). Secondement, il n'est pas nécessaire d'étudier séparément l'équation linéarisée et le

problème complet, car la méthode présentée dans ce chapitre incorpore naturellement les termes non linéaires, dans la mesure où ils sont sans importance pour le comportement asymptotique. Dans le cas présent, un effet du changement de variables (4.32) est de munir la non-linéarité dans (4.33) d'un facteur $e^{-\tau/2}$ qui la rend négligeable dans la limite des grands temps. La rançon de cette approche est la nécessité d'étudier le système relativement complexe (4.33), dans un espace Z_τ qui dépend de surcroît du temps.

Liste de publications[†]

- [1] Th. Gallay, “Fermions dans un espace-temps courbe à deux dimensions”, travail de diplôme de l’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1990.
- [2] Th. Gallay et G. Wanders, “Massless fermion emission on $1 + 1$ dimensional curved space-times”, *Helv. Phys. Acta* **66** (1993), 378-404.
- [3] J.-P. Eckmann et Th. Gallay, “Front solutions for the Ginzburg-Landau equation”, *Commun. Math. Phys.* **152** (1993), 221-248.
- [4] Th. Gallay, “A center-stable manifold theorem for differential equations in Banach spaces”, *Commun. Math. Phys.* **152** (1993), 249-268.
- [5] Th. Gallay, “Local stability of critical fronts in non-linear parabolic partial differential equations”, *Nonlinearity* **7** (1994), 741-764.
- [6] Th. Gallay, “Existence et stabilité des fronts dans l’équation de Ginzburg-Landau à une dimension”, Thèse de l’Université de Genève, 1994.
- [7] Th. Gallay, “Periodic patterns and traveling fronts for the Ginzburg-Landau equation”, dans *Structure and Dynamics of Nonlinear Waves in Fluids*, A. Mielke, K. Kirchgässner (Eds), World Scientific (1995), 230–238.
- [8] J.-P. Eckmann, Th. Gallay et C.E. Wayne, “Phase slips and the Eckhaus instability”, *Nonlinearity* **8** (1995), 943–961.
- [9] Th. Gallay et G. Raugel, “Stability of travelling waves for a damped hyperbolic equation”, *Z. angew. Math. Phys.* **48** (1997), 451–479.
- [10] S. Focant et Th. Gallay, “Existence and stability of propagating fronts for an autocatalytic reaction-diffusion system”, *Physica D* **120** (1998), 346–368.
- [11] Th. Gallay et G. Raugel, “Scaling variables and asymptotic expansions in damped wave equations”, *J. Diff. Equations* **150** (1998), 42–97.
- [12] Th. Gallay et A. Mielke, “Diffusive mixing of stable states in the Ginzburg-Landau equation”, *Commun. Math. Phys.* **199** (1998), 71–97.
- [13] Th. Gallay et G. Raugel, “Stability of propagating fronts in damped hyperbolic equations”, dans *Partial differential equations: theory and numerical solutions*, W. Jäger *et.al.* (Eds), Chapman & Hall Research Notes in Mathematics **406** (2000), 130–146.
- [14] Th. Gallay et G. Raugel, “Scaling variables and stability of hyperbolic fronts”, prépublication de l’Université de Paris-Sud 98-87, à paraître dans *SIAM J. Math. Analysis*.
- [15] Th. Gallay et G. Schneider, “KP description of unidirectional long waves – The model case”, prépublication de l’Université de Paris-Sud 99-64.
- [16] Th. Gallay et S. Slijepčević, “Energy flow in extended gradient partial differential equations”, prépublication de l’Université de Paris-Sud 99-83.
- [17] Th. Gallay, “Convergence to Travelling Waves in Damped Hyperbolic Equations”, *Proceedings du congrès EQUADIFF 99*, Berlin 1999.

[†] Les numéros des publications présentées pour l’habilitation figurent en **gras**.

Références

- [AW] D.G. Aronson et H.F. Weinberger: Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics, *Adv. in Math.* **30** (1978), 33–76.
- [BB*] E. Ben-Jacob, H. Brand, G. Dee, L. Kramer et J.S. Langer: Pattern propagation in nonlinear dissipative systems, *Physica* **14D** (1985), 348–364.
- [BN] J. Billingham et D.J. Needham: The development of travelling waves in quadratic and cubic autocatalysis with unequal diffusion rates. I. Permanent form travelling waves, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **334** (1991), 1–24.
- [BK1] J. Bricmont et A. Kupiainen: Renormalization group and the Ginzburg-Landau equation. *Comm. Math. Physics* **150** (1992), 193–208.
- [BK2] J. Bricmont et A. Kupiainen: Stable Non-Gaussian Diffusive Profiles, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* **26** (1996), 583–593.
- [BKL] J. Bricmont, A. Kupiainen et G. Lin: Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), 893–922.
- [Ca] J. Carr: *Applications of Centre Manifold Theory*, *Appl. Math. Sci.* **35**, Springer-Verlag, New-York (1981).
- [CH] M.C. Cross et P.C. Hohenberg: Pattern formation outside equilibrium, *Reviews of Modern Physics* **65**, No. 3, 851–1112.
- [DO] S.R. Dunbar et H.G. Othmer: On a Nonlinear Hyperbolic Equation Describing Transmission Lines, Cell Movement, and Branching Random Walks, dans *Non-linear Oscillations in Biology and Chemistry*, H.G. Othmer (Ed.), *Lect. Notes in Biomathematics* **66**, Springer (1986).
- [Eck] W. Eckhaus: *Studies in nonlinear stability theory*, Springer tracts in Nat. Phil. **6** (1965).
- [EKM] M. Escobedo, O. Kavian et H. Matano: Large Time Behavior of Solutions of a Dissipative Semi-linear Heat Equation, *Comm. Partial Diff. Equations* **20** (1995), 1427–1452.
- [EZ] M. Escobedo et E. Zuazua: Large-time Behavior for Convection Diffusion Equations in \mathbf{R}^N , *J. Funct. Anal.* **100** (1991), 119–161.
- [FM] P.C. Fife et J.B. McLeod: The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65** (1977), 335–361.
- [Fo] S. Focant: *Stabilité de fronts d’onde dans des équations de réaction-diffusion couplées*, Thèse de l’Université de Louvain-la-Neuve (1998).
- [GKS] V.A. Galaktionov, S. P. Kudyumov et A.A. Samarskii: On Asymptotic Eigenfunctions of the Cauchy Problem for a Nonlinear Parabolic Equation, *Math. USSR Sbornik* **54** (1986), 421–455.
- [GV] V.A. Galaktionov et J. L. Vazquez: Asymptotic Behaviour of Nonlinear Parabolic Equations with Critical Exponents. A Dynamical System Approach, *J. Funct. Anal.* **100** (1991), 435–462.
- [Go] S. Goldstein: On Diffusion by Discontinuous Movements and the Telegraph Equa-

- tion, Quart. J. Mech. Appl. Math. **4** (1951), 129–156.
- [Ha1] K.P. Hadeler: Reaction Telegraph Equations et Random Walk Systems, dans *Stochastic and spatial structures of dynamical systems*, S. van Strien, S. Verduyn Lunel (eds.), Royal Acad. of the Netherlands, North Holland, Amsterdam (1996).
- [Ha2] K.P. Hadeler: Reaction Transport Systems, dans *Mathematics inspired by biology*, V.Capasso, O.Diekmann (eds), CIME Lectures 1997, Florence, Springer Verlag, in print.
- [He] D. Henry: *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer, Berlin, 1981.
- [HL] L. Hsiao et T.-P. Liu: Convergence to Nonlinear Diffusion Waves for Solution of a System of Hyperbolic Conservation Laws with Damping, Comm. Math. Phys. **143** (1992), 599–605.
- [Kac] M. Kac: A Stochastic Model Related to the Telegrapher's Equation, Rocky Mountain J. Math. **4** (1974), 497–509.
- [Kap] T. Kapitula: Multidimensional Stability of Planar Travelling Waves, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 257–269.
- [Kav] O. Kavian: Remarks on the Large Time Behavior of a Nonlinear Diffusion Equation, Ann. Inst. Henri Poincaré **4** (1987), 423–452.
- [Ki] K. Kirchgässner: On the Nonlinear Dynamics of Travelling Fronts, J. Diff. Eqns. **96** (1992), 256–278.
- [KPP] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii et N.S. Piskunov: Etude de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Moscow Univ. Math. Bull. **1** (1937), 1–25.
- [Ma] K. Masuda: On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 360–370.
- [Mi] A. Mielke: The Ginzburg-Landau Equation in its Role as a Modulation Equation, prépublication (1999).
- [Ni] K. Nishihara: Convergence Rates to Nonlinear Diffusion Waves for Solutions of System of Hyperbolic Conservation Laws with Damping, J. Differential Equations **131** (1996), 171–188.
- [PW] M.H. Protter et H.F. Weinberger: *Maximum Principles in Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. (1967).
- [vS] W. van Saarloos: Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence, Phys. Rev. A **39** (12) (1989), 6367-6390.
- [Sa] D.H. Sattinger: On the Stability of Waves of Nonlinear Parabolic Systems, Adv. Math. **22** (1976), 312–355.
- [Wa] C.E. Wayne: Invariant Manifolds for Parabolic Partial Differential Equations in Unbounded Domains, Arch. Rat. Mech. Anal. **138** (1997), 279–306.
- [Zu] E. Zuazua: A Dynamical System Approach to the Self-similar Large Time Behavior in Scalar Convection-diffusion Equations, J. Differential Equations **108** (1994), 1–35.