Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure

Thierry Gallay
Institut Fourier
Université de Grenoble I
BP 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères

1 Introduction et résultats

Le but de cet exposé est de présenter quelques avancées récentes sur deux questions différentes (mais intimement liées) relatives à l'équation de Navier-Stokes incompressible dans le plan $\mathbb{R}^2$: le comportement asymptotique en temps, et l'unicité de la solution lorsque le tourbillon initial est une mesure finie. Il s'agit de travaux en collaboration avec C. Eugene Wayne [11] et avec Isabelle Gallagher [7].

Si $u(x,t) \in \mathbb{R}^2$ désigne le champ de vitesse du fluide, supposé homogène et incompressible, et $p(x,t) \in \mathbb{R}$ son champ de pression, l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \,=\, \nu\Delta u - \nabla p \;, \quad \operatorname{div} u = 0 \;, \tag{1}$$

où $\nu > 0$ est le coefficient de viscosité cinématique. Sans restreindre la généralité, nous supposerons dans toute la suite que $\nu = 1$.

Pour des raisons liées à la contrainte d'incompressibilité, l'étude du comportement asymptotique en temps des solutions de (1) est plus aisée à réaliser sur l'équation satisfaite par le tourbillon $\omega = \operatorname{rot} u$ [8], [9], [10]. Celle-ci est particulièrement simple en dimension deux d'espace, où $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ est une quantité scalaire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega \,=\, \Delta\omega \;. \tag{2}$$

Le champ de vitesse u se reconstruit à partir du tourbillon ω par la loi de Biot-Savart

$$u(x,t) \,=\, \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\,\omega(y,t)\,\mathrm{d}y \;, \quad x \in \mathbb{R}^2 \;, \tag{3}$$

où $x^\perp \equiv (x_1,x_2)^\perp = (-x_2,x_1)$. L'équation (2) complétée par (3) est une équation non locale formellement équivalente au système (1).

Une propriété importante de l'équation de Navier-Stokes, valable en toute dimension, est son *invariance d'échelle* : si $u(x,t)$ est une solution de (1) et si $\omega(x,t)$ est le tourbillon associé, alors pour tout $\lambda > 0$ les fonctions u_λ, ω_λ définies par

$$u_\lambda(x,t) \,=\, \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \;, \quad \omega_\lambda(x,t) \,=\, \lambda^2\omega(\lambda x, \lambda^2 t) \;, \tag{4}$$

sont encore solutions de (1) et (2) respectivement. Il est donc naturel de chercher à résoudre le problème de Cauchy dans des espaces fonctionnels dont les normes soient invariantes sous la transformation (4). Dans l'espace $\mathbb{R}^d$, les exemples les plus simples sont

$$u \in C_b^0([0,+\infty), L^d(\mathbb{R}^d)^d) \;, \qquad \|u\| = \sup_{t\ge 0} \|u(\cdot,t)\|_{L^d} \;,$$
$$\omega \in C_b^0([0,+\infty), L^{d/2}(\mathbb{R}^d)^{d'}) \;, \quad \|\omega\| = \sup_{t\ge 0} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^{d/2}} \;,$$

où $d' = d(d-1)/2$. Lorsque $d = 2$, le choix de l'espace d'énergie $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ pour le champ de vitesse conduit aux solutions classiques de Leray [17]. Par ailleurs, le problème de Cauchy pour le tourbillon est globalement bien posé dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, comme le montre le résultat suivant, dû à M. Ben-Artzi :

Théorème 1.1 [1], [2] *Pour toute donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, l'équation (2) possède une solution globale unique $\omega \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^0((0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^2))$ vérifiant $\omega(0) = \omega_0$. En outre,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x,t)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\,\mathrm{d}x \;, \quad t \ge 0 \;. \tag{5}$$

Enfin, pour tout $p \in [1,+\infty]$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$\|\omega(\cdot,t)\|_{L^p} \;\le\; \frac{C_p \|\omega_0\|_{L^1}}{t^{1-\frac{1}{p}}} \;, \quad t > 0 \;. \tag{6}$$

Il est essentiel pour la suite de réaliser que les solutions de l'équation de Navier-Stokes fournies par le théorème 1.1 ne coïncident pas avec les solutions de Leray. En particulier, si $u \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ et si $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, il est facile de vérifier que l'on a toujours $\int_{\mathbb{R}^2} \omega\,\mathrm{d}x = 0$. Comme l'intégrale du tourbillon (qui n'est autre que la *circulation* de la vitesse à l'infini) est une quantité conservée, il s'ensuit que si le tourbillon initial n'est pas de moyenne nulle la solution donnée par le théorème 1.1 n'est jamais d'énergie finie. Cette inadéquation des espaces fonctionnels pour le tourbillon et le champ de vitesse est propre à la dimension deux. En dimension trois, si $\omega(x,t)$ est une solution de l'équation pour le tourbillon dans $L^{3/2}(\mathbb{R}^3)^3$, le champ de vitesse obtenu par la loi de Biot-Savart est bien une solution de (1) dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$. Dans ce cas, on ne gagne donc rien en généralité à étudier l'équation pour le tourbillon.

Les exemples les plus simples de solutions d'énergie infinie sont les *tourbillons d'Oseen*

$$\omega(x,t) \;=\; \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \;, \quad u(x,t) \;=\; \frac{\alpha}{\sqrt{t}}\, v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \;, \tag{7}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre (appelé *nombre de Reynolds de circulation*) et

$$G(\xi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\, e^{-|\xi|^2/4} \;, \quad v^G(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\Big(1 - e^{-|\xi|^2/4}\Big) \;, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \;.$$

On remarquera que $\int_{\mathbb{R}^2} G(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x,t)\,\mathrm{d}x = \alpha$. En outre, $\omega(x,t)$ est à symétrie radiale dans $\mathbb{R}^2$, ce qui entraîne que le terme non linéaire $u \cdot \nabla\omega$ dans (2) est identiquement nul. Enfin, $|v^G(\xi)| \sim 1/|\xi|$ lorsque $|\xi| \to \infty$, de sorte que $v^G \notin L^2(\mathbb{R}^2)^2$.

Notre premier résultat montre que ces solutions autosimilaires décrivent le comportement asymptotique en temps de toutes les solutions de (2) dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 1.2 [11] *Si $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, la solution $\omega(x,t)$ de (2) donnée par le théorème 1.1 vérifie*

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \Big\|\omega(x,t) - \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\Big\|_{L^p_x} = 0\ , \quad \text{pour} \quad 1 \le p \le \infty\ , \tag{8}$$

où $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\,\mathrm{d}x$. Si $u(x,t)$ est la solution de (1) obtenue à partir de $\omega(x,t)$ par la loi de Biot-Savart (3), alors

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \Big\|u(x,t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}\, v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\Big\|_{L^q_x} = 0\ , \quad \text{pour} \quad 2 < q \le \infty\ . \tag{9}$$

En particulier, l'équation (8) avec $p = 1$ affirme que la solution $\omega(x,t)$ est non seulement bornée dans L^1, comme le montre (6), mais converge dans cet espace vers l'unique tourbillon d'Oseen accessible au vu de la loi de conservation (5). Ce résultat a été démontré pour des données petites par Y. Giga et T. Kambe [13] (voir aussi [8]), et pour de petites valeurs de la circulation α par A. Carpio [5] (voir aussi [12]). L'énoncé ci-dessus relaxe complètement les hypothèses de petitesse sur la donnée initiale.

Le théorème 1.2 a des conséquences importantes. Tout d'abord, il implique que les tourbillons d'Oseen sont les seules solutions autosimilaires de l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions dont le tourbillon soit intégrable. Ce résultat était attendu et avait été partiellement démontré par une analyse directe de l'équation elliptique satisfaite par le profil de la solution autosimilaire [20]. Remarquons au passage que la condition d'intégrabilité sur le tourbillon est cruciale. En adaptant à la dimension deux les méthodes de M. Cannone et F. Planchon [3], on peut en effet construire de nombreuses autres solutions autosimilaires pour lesquelles le tourbillon décroît comme $1/|x|^2$ à l'infini. Par exemple, si $\phi : S^1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et de moyenne nulle, alors pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit l'équation (1) possède une solution autosimilaire $u(x,t)$ telle que $u(x,0) = \epsilon x|x|^{-2}\phi(x/|x|)$. Mais si ϕ n'est pas identiquement nulle, le tourbillon correspondant $\omega(x,t)$ décroît trop lentement à l'infini pour être intégrable.

Une autre conséquence du théorème 1.2, ou plutôt de sa démonstration, est que les tourbillons d'Oseen sont des solutions stables (au sens de Liapunov) quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds de circulation. Contrairement à ce qui se produit dans de nombreux écoulements, l'augmentation du nombre de Reynolds ne donne pas lieu à des instabilités hydrodynamiques. En fait, une analyse détaillée de l'opérateur linéarisé autour du tourbillon d'Oseen montre que la rotation rapide a des effets stabilisateurs, dans la mesure où la partie réelle des valeurs propres a tendance à décroître lorsque $|\alpha| \to \infty$ [11], [19].

Enfin, on remarquera que les théorèmes 1.1 et 1.2 restent vrais si l'on remplace (2) par l'équation de la chaleur $\partial_t\omega = \Delta\omega$. Ceci ne doit pas laisser croire que le comportement des solutions des deux équations est similaire. En fait, si la donnée initiale ω_0 est “grande”, les expériences numériques indiquent que la solution $\omega(x,t)$ de (2) passe par un long comportement transitoire “turbulent” au cours duquel l'écoulement s'organise autour de tourbillons isolés qui interagissent et se recombinent entre eux. En régime asymptotique, lorsque l'écoulement a cessé d'être turbulent, tous ces tourbillons se réunissent en un seul grand vortex qui s'étale par diffusion comme une solution de l'équation de la chaleur. C'est ce régime asymptotique, et non le comportement transitoire, qui est décrit par le théorème ci-dessus, lequel ne saurait donc être invoqué pour justifier la “cascade d'énergie inverse” en turbulence bidimensionnelle.

L'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$ n'est pas le seul cadre naturel dans lequel on puisse étudier les solutions de l'équation (2). Un autre choix possible est l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ des mesures (de Radon) réelles finies sur $\mathbb{R}^2$, muni de la norme de la variation totale :

$$\|\mu\| \;=\; \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \phi \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \phi \in C_0(\mathbb{R}^2)\,,\ \|\phi\|_{L^\infty} \le 1 \right\}\;.$$

On rappelle que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est un espace de Banach qui contient $L^1(\mathbb{R}^2)$ comme sous-espace fermé. Sa norme est invariante sous le changement d'échelle $\mu \mapsto \mu_\lambda$, où $\langle \mu_\lambda, \phi(\cdot)\rangle = \langle \mu, \phi(\cdot\lambda^{-1})\rangle$ pour tout $\phi \in C_0(\mathbb{R}^2)$. On dit qu'une suite $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ converge *faiblement* vers μ, et on note $\mu_n \rightharpoonup \mu$, si $\langle \mu_n, \phi\rangle \to \langle \mu, \phi\rangle$ pour tout $\phi \in C_0(\mathbb{R}^2)$. Contrairement à $L^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est stable par convergence faible.

Le problème de Cauchy pour l'équation (2) dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ a été étudié par G.-H. Cottet [6], par Y. Giga, T. Miyakawa et H. Osada [14], ainsi que par T. Kato [16]. En régularisant l'équation ou les données initiales et en passant à la limite, ces auteurs établissent que, pour toute donnée initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, l'équation (2) possède une solution globale $\omega \in C^0((0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ vérifiant $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^1} \le \|\mu\|$ pour tout $t > 0$ et $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \mu$ lorsque $t \to 0+$. En outre, un argument de type Gronwall montre que cette solution est unique si la *partie atomique* de μ est suffisamment petite. Par exemple, T. Kato précise dans [16] que si $\mu = \alpha\delta_0$ avec $|\alpha| < 0.5749$, alors l'unique solution est le tourbillon d'Oseen $\omega(x,t) = (\alpha/t)G(x/\sqrt{t})$.

Le problème de l'unicité de la solution de (2) à donnée mesure et celui du comportement asymptotique en temps de cette même solution sont étroitement liés, comme l'a observé A. Carpio dans [5]. Plus précisément, on sait montrer le résultat (8) pour toutes les solutions de (2) dont la circulation α est suffisamment petite pour que l'unicité de la solution de (2) avec donnée initiale $\mu = \alpha\delta_0$ soit connue. Le lien entre ces deux problèmes est un argument de *renormalisation* classique, dont l'origine exacte m'est inconnue, mais qui semble assez ancien (voir par exemple [15] pour une application de cet argument à l'équation des milieux poreux). Soit $\omega(x,t)$ une solution de (2) donnée par le théorème 1.1, et notons $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2}\omega(x,t)\,\mathrm{d}x$. Si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs convergeant vers l'infini, on sait que $\omega_n(x,t) = \lambda_n^2\omega(\lambda_n x, \lambda_n^2 t)$ est encore une solution pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les bornes a priori sur la solution ainsi que les propriétés de régularisation de l'équation (2) permettent alors d'extraire une sous-suite convergeant vers une limite $\bar\omega(x,t)$. Ainsi

$$\omega_n(x,t) \;=\; \lambda_n^2\omega(\lambda_n x, \lambda_n^2 t) \;\xrightarrow[n\to\infty]{(\text{sous}-\text{suite})}\; \bar\omega(x,t)\;, \tag{10}$$

et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^2 \times [\epsilon, 1/\epsilon]$ pour tout $\epsilon > 0$. D'autre part, comme $\omega(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on a également

$$\omega_n(x,0) \;=\; \lambda_n^2\omega(\lambda_n x, 0) \;\xrightarrow[n\to\infty]{(\text{cv faible})}\; \alpha\delta_0(x)\;.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $\bar\omega(x,t)$ est une solution de (2), que $\|\bar\omega(\cdot,t)\|_{L^1} \le C|\alpha|$ pour tout $t > 0$, et que $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ lorsque $t \to 0+$ [12]. Si $|\alpha|$ est suffisamment petit, les résultats d'unicité mentionnés ci-dessus impliquent que $\bar\omega(x,t) = (\alpha/t)G(x/\sqrt{t})$, quelle que soit la suite $\lambda_n \to \infty$ et indépendamment de la suite extraite. En posant d'abord $t = 1$ puis $\lambda_n = \sqrt{t}$ dans (10), on obtient donc

$$t\omega(\sqrt{t}x, t) \;\xrightarrow[t\to+\infty]{}\; \alpha G(x) \quad \text{uniformément en } x \in \mathbb{R}^2\;,$$

ce qui montre (8) avec $p = \infty$. Le résultat pour $p = 1$ s'obtient en remarquant que la convergence dans (10) a aussi lieu dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ pour chaque $t > 0$, et les autres valeurs de p s'en déduisent par interpolation.

Les techniques développées dans la section 2 permettent de s'affranchir de l'hypothèse de petitesse sur la circulation α non seulement dans le calcul du comportement asymptotique des solutions, mais aussi dans le problème de l'unicité de la solution avec tourbillon initial $\alpha\delta_0$. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 1.3 [11] *Soient $T > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\omega \in C^0((0,T), L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ est une solution de (2) bornée dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ qui vérifie $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ lorsque $t \to 0+$, alors*

$$\omega(x,t) \;=\; \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\;, \quad x \in \mathbb{R}^2\;, \quad t \in (0,T)\;.$$

Ainsi, les tourbillons d'Oseen sont également les seules solutions de l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ avec une masse de Dirac (à l'origine) comme tourbillon initial.

Pour terminer, il est naturel de se demander si cette propriété d'unicité s'étend à toutes les mesures finies. La réponse est encore affirmative, et ce résultat s'obtient en combinant les méthodes utilisées dans [14] et [16], qui fonctionnent lorsque la partie atomique de la mesure est suffisamment petite, avec le théorème 1.3 qui permet de traiter les grandes masses de Dirac. Au vu du théorème 1.2 et des résultats d'existence contenus dans [6], [14], [16], on obtient l'énoncé final suivant, qui résume et généralise tout ce qui précède :

Théorème 1.4 [7] *Pour toute mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, l'équation (2) possède une solution globale unique*

$$\omega \in C^0((0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$$

telle que $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^1} \le \|\mu\|$ pour tout $t > 0$ et $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \mu$ lorsque $t \to 0+$. En outre,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x,t)\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \mu(\mathbb{R}^2)\;, \quad \textit{pour tout } t > 0\;,$$

et

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \Big\|\omega(x,t) - \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\Big\|_{L^p_x} \;=\; 0\;, \quad \textit{pour tout } p \in [1,\infty]\;. \tag{11}$$

Ce résultat montre que le problème de Cauchy pour l'équation (2) est globalement bien posé dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, et décrit de surcroît le comportement asymptotique en temps de toutes les solutions. Comme le montre l'argument de renormalisation ci-dessus, l'affirmation concernant le comportement asymptotique est une conséquence de la propriété d'unicité dans cet espace. A ce jour, le théorème 1.4 est pour l'équation de Navier-Stokes le seul résultat d'existence et d'unicité à données quelconques dans un espace fonctionnel suffisamment grand pour contenir les données initiales de certaines solutions autosimilaires.

2 Variables autosimilaires et fonctions de Liapunov

Dans cette section, on prépare la démonstration du théorème 1.2, qui affirme que les solutions de (2) dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ convergent vers les tourbillons d'Oseen lorsque $t \to \infty$. Il est naturel d'introduire les variables autosimilaires $\xi = x/\sqrt{t}$ et $\tau = \log(t)$. Plus précisément, si $\omega(x,t)$ est une solution de (2) et si $u(x,t)$ est le champ de vitesse associé, on définit de nouvelles fonctions $w(\xi,\tau)$ et $v(\xi,\tau)$ par

$$\omega(x,t) \;=\; \frac{1}{t}\, w\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log(t)\Big)\;, \quad u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\, v\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}, \log(t)\Big)\;. \tag{12}$$

Ce changement de variables n'est pas défini en $t = 0$, mais cette singularité n'est qu'apparente : comme l'équation (2) est autonome, on peut aussi bien choisir $t = 1$ comme "instant initial", auquel cas $w(\xi,0) = \omega(\xi,1)$ et $v(\xi,0) = u(\xi,1)$. Le tourbillon transformé d'échelle $w(\xi,\tau)$ vérifie l'équation

$$\partial_\tau w + (v \cdot \nabla_\xi) w \;=\; \Delta_\xi w + \frac{1}{2}\,(\xi \cdot \nabla_\xi) w + w\;, \tag{13}$$

qui est encore autonome grâce à l'invariance d'échelle. Le champ de vitesse transformé d'échelle $v(\xi,\tau)$ s'obtient toujours de $w(\xi,\tau)$ par la loi de Biot-Savart. Ainsi, l'unique effet du changement de variables (12) est de remplacer dans (2) le laplacien par l'opérateur de Fokker-Planck $\mathcal{L} = \Delta + \frac{1}{2}(\xi\cdot\nabla) + 1$. Dans [8], [9], [10], on montre que le spectre de $\mathcal{L}$ dans des espaces L^2 à poids est partiellement discret, et que cette propriété permet de calculer le comportement asymptotique des solutions de (13) au voisinage de l'origine à un ordre arbitrairement élevé. On s'en tiendra ici à l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$, et on s'efforcera de déterminer le comportement asymptotique de toutes les solutions, sans condition de taille.

Comme le changement des variables (12) pour le tourbillon est une isométrie dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, il suit directement du théorème 1.1 que l'équation (13) définit dans cet espace un semi-flot global $\{S(\tau)\}_{\tau\ge 0}$. Pour tout $\tau \ge 0$, l'application non linéaire $S(\tau)$ est une contraction dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ qui préserve l'intégrale :

$$\|S(\tau)w_0\|_{L^1} \;\le\; \|w_0\|_{L^1}\;, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^2} S(\tau)w_0 \,\mathrm{d}\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} w_0 \,\mathrm{d}\xi\;, \quad \forall w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)\;.$$

En outre, la famille $\{\alpha G\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ des tourbillons d'Oseen est une ligne de points d'équilibre du système. La démonstration du théorème 2 se ramène donc au problème suivant : étant donné $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w_0 \,\mathrm{d}\xi$, montrer que $S(\tau)w_0 \to \alpha G$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ lorsque $\tau \to \infty$.

La solution de ce problème utilise plusieurs ingrédients :

2.1 Compacité asymptotique

Soit $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, et notons $w(\tau) = S(\tau)w_0$ la solution de (13) pour la donnée initiale w_0. Alors la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau\ge 0}$ est non seulement bornée, mais encore *relativement compacte* dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Cette propriété remarquable est la justification principale, dans le présent contexte, de l'utilisation des variables autosimilaires. Remarquons au passage que les solutions $\{\omega(\cdot,t)\}_{t\ge 0}$ de (2) données par le théorème 1.1 ne sont jamais relativement compactes dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ (si leur circulation n'est pas nulle), car le théorème 1.2 montre précisément qu'elles sont "évanescentes" lorsque $t \to \infty$. La compacité des trajectoires de (13) résulte de deux effets distincts :

• *L'effet régularisant.* Si $\omega(x,t)$ est la solution de (2) donnée par le théorème 1.1, alors $\|\nabla\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C_1 t^{-3/2}$ pour tout $t > 0$, où $C_1 > 0$ ne dépend que de $\|\omega_0\|_{L^1}$ [16]. Traduite dans les variables autosimilaires, cette propriété implique pour la solution de (13) :

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^2} |\nabla w(\xi,\tau)| \;\le\; \frac{C_1}{a(\tau)^{3/2}}\;, \qquad \tau > 0\;, \tag{14}$$

où $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$.

• *Le confinement asymptotique.* Si $\omega(x,t)$ est comme ci-dessus, alors pour tout $\beta \in (0,1)$ on a

$$|\omega(x,t)| \le C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \exp\Bigl(-\beta\frac{|x-y|^2}{4t}\Bigr)|\omega_0(y)|\,\mathrm{d}y\;, \quad x\in\mathbb{R}^2\;, \quad t > 0\;.$$

où $C_2 > 0$ ne dépend que de β et de $\|\omega_0\|_{L^1}$. Cette estimation, due à E. Carlen et M. Loss [4], dit essentiellement que les solutions de l'équation pour le tourbillon avec viscosité 1 ne diffusent pas plus vite que celles de l'équation de la chaleur avec viscosité $1/\beta > 1$. Traduit dans les variables autosimilaires, ce résultat devient

$$|w(\xi,\tau)| \le C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a(\tau)} \exp\Bigl(-\beta\frac{|\xi - ye^{-\tau/2}|^2}{4a(\tau)}\Bigr)|w_0(y)|\,\mathrm{d}y\;, \quad \xi\in\mathbb{R}^2\;, \quad \tau > 0\;. \tag{15}$$

La forme du second membre suggère que les solutions de (13) sont asymptotiquement confinées, de façon gaussienne, lorsque $\tau \to \infty$.

En combinant (14), (15) et en utilisant le critère de compacité de Riesz, on montre sans peine que $\{w(\tau)\}_{\tau\ge 1}$ est relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, ce qui est le résultat cherché.

2.2 Ensemble ω-limite

Soit $w(\tau) = S(\tau)w_0$ comme ci-dessus, et soit Ω l'ensemble ω-limite de la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau\ge 0}$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\Omega \;=\; \bigcap_{T\ge 0}\overline{\bigcup_{\tau\ge T}\{w(\tau)\}} \;=\; \Bigl\{\bar w \in L^1(\mathbb{R}^2)\,\Big|\,\exists \tau_n \to \infty \text{ t.q. } w(\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} \bar w\Bigr\}\;.$$

Alors Ω est un sous-ensemble non vide, compact et connexe de $L^1(\mathbb{R}^2)$ possédant en outre les propriétés suivantes :

- Ω est *invariant* : $S(\tau)\Omega = \Omega$ pour tout $\tau \ge 0$;
- Ω est *attractif* : $\mathrm{dist}_{L^1}(w(\tau),\Omega) \to 0$ lorsque $\tau \to \infty$.

Si $\bar w \in \Omega$, alors $\bar w$ est une fonction régulière qui vérifie $\int_{\mathbb{R}^2}\bar w\,\mathrm{d}\xi = \alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} w_0\,\mathrm{d}\xi$. En outre, il suit immédiatement de (15) que

$$|\bar w(\xi)| \;\le\; C_3(\beta, \|w_0\|_{L^1})\, e^{-\beta|\xi|^2/4}\;, \quad \xi \in \mathbb{R}^2\;.$$

On a des bornes similaires pour toutes les dérivées de $\bar w$, donc Ω est un sous-ensemble borné de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Le but est de montrer que $\Omega = \{\alpha G\}$.

2.3 Fonctions de Liapunov

Pour tout $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on note

$$\Phi(w) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} |w(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\;. \tag{16}$$

On définit également

$$\Sigma \;=\; \left\{ w \in L^1(\mathbb{R}^2) \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}^2} |w(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \Big| \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big| \right\}\;.$$

En d'autres termes, une fonction $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ appartient à Σ si et seulement si elle est (presque partout) de signe constant. L'ensemble Σ est positivement invariant sous l'évolution définie par (13) : $S(\tau)\Sigma \subset \Sigma$ pour tout $\tau \ge 0$.

Si $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $w(\tau) = S(\tau)w_0$, il suit du principe du maximum que $\Phi(w(\tau)) \le \Phi(w_0)$ pour tout $\tau \ge 0$. En outre, $\Phi(w(\tau)) = \Phi(w_0)$ pour tout $\tau \ge 0$ si et seulement si $w_0 \in \Sigma$. Par le principe d'invariance de LaSalle, on en déduit que l'ensemble ω-limite de la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau\ge 0}$ est inclus dans Σ.

En particulier, si $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w_0\,\mathrm{d}\xi = 0$, alors Ω est constitué de fonctions de signe constant et de moyenne nulle, donc $\Omega = \{0\}$, ce qui est le résultat cherché. On peut donc supposer désormais que $\alpha \ne 0$ et même, quitte à remplacer $w(\xi_1,\xi_2,\tau)$ par $-w(\xi_2,\xi_1,\tau)$, que $\alpha > 0$. Dans ce cas, Ω est constitué de fonctions strictement positives, et même minorées par une gaussienne.

Pour tout $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tel que $w \ge 0$, on définit à présent

$$H(w) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) \log\Big(\frac{w(\xi)}{G(\xi)}\Big)\,\mathrm{d}\xi\;. \tag{17}$$

En théorie cinétique, H représente *l'entropie relative* de la distribution w par rapport à la gaussienne G. Son utilisation dans le présent contexte est motivée par une analogie formelle entre l'équation (13) et certains modèles cinétiques simples comme l'équation de Vlasov-Fokker-Planck.

Soit $w_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ positif et non identiquement nul. Si $w(\tau) = S(\tau)w_0$, il n'est pas difficile de montrer que $\tau \mapsto H(w(\tau))$ est différentiable et que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H(w(\tau)) \;=\; -\int_{\mathbb{R}^2} w(\xi,\tau) \Big| \nabla \log\Big(\frac{w(\xi,\tau)}{G(\xi)}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}\xi \;\le\; 0\;. \tag{18}$$

Au moins formellement, on a en effet :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H(w(\tau)) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \Big(1 + \log\frac{w}{G}\Big)\partial_\tau w\,\mathrm{d}\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \Big(1 + \log\frac{w}{G}\Big)(\mathcal{L}w - v\cdot\nabla w)\,\mathrm{d}\xi\;.$$

En utilisant l'identité $\mathcal{L}w = \mathrm{div}(G\nabla(\frac{w}{G}))$ et en intégrant par parties, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(1 + \log\frac{w}{G}\Big)(\mathcal{L}w)\,\mathrm{d}\xi \;=\; -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla\Big(\log\frac{w}{G}\Big)\cdot \frac{G}{w}\nabla\Big(\frac{w}{G}\Big) w\,\mathrm{d}\xi \;=\; -\int_{\mathbb{R}^2} w \Big|\nabla\Big(\log\frac{w}{G}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}\xi\;.$$

D'autre part, comme $v \cdot \nabla w = \operatorname{div}(vw)$, une autre intégration par parties montre que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \Big(1 + \log \frac{w}{G}\Big)(v \cdot \nabla w) \,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \log(4\pi w))(v \cdot \nabla w) \,\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^2}{4}(v \cdot \nabla w) \,\mathrm{d}\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\xi \cdot v) w \,\mathrm{d}\xi \;.
\end{aligned}
$$

Or, les deux dernières intégrales sont nulles. C'est évident pour la première, puisque $v \cdot \nabla w = \operatorname{div}(vw)$. En ce qui concerne la seconde, en utilisant la loi de Biot-Savart (3) et le théorème de Fubini, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (\xi \cdot v(\xi)) w(\xi) \,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \xi \cdot \frac{(\xi - \eta)^\perp}{|\xi - \eta|^2} w(\eta) w(\xi) \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} (\xi - \eta) \cdot \frac{(\xi - \eta)^\perp}{|\xi - \eta|^2} w(\eta) w(\xi) \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi = 0 \;,
\end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration de (18).

Comme $w(\xi, \tau) > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ et tout $\tau > 0$, il suit immédiatement de (18) que $H(w(\tau)) \le H(w_0)$ pour tout $\tau \ge 0$, et que $H(w(\tau)) = H(w_0)$ pour tout $\tau \ge 0$ si et seulement si $w_0 = \alpha G$ pour un $\alpha > 0$. Par le principe de LaSalle, on en déduit que l'ensemble ω-limite de la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau \ge 0}$ vérifie $\Omega = \{\alpha G\}$ où $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w_0 \,\mathrm{d}\xi$.

2.4 Un lemme de rigidité

Les fonctions de Liapunov du paragraphe précédent permettent de démontrer le résultat suivant, qui caractérise les trajectoires *complètes* relativement compactes de (13).

Proposition 2.1 *Soit $\{w(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ une trajectoire de (13) relativement compacte dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Alors $w(\tau) = \alpha G$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, où $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi, \tau) \,\mathrm{d}\xi$.*

Remarques. On a observé ci-dessus que toutes les trajectoires positives $\{w(\tau)\}_{\tau \ge 0}$ de (13) dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ sont relativement compactes. Il n'en va pas de même des trajectoires négatives, pour lesquelles la compacité est une hypothèse très restrictive. La quantité α intervenant dans l'énoncé de la proposition est bien entendu indépendante de τ.

Démonstration. Comme la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ est relativement compacte dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$, elle converge lorsque $\tau \to +\infty$ vers son ensemble ω-limite Ω et lorsque $\tau \to -\infty$ vers son ensemble α-limite $\mathcal{A}$. En utilisant la première fonction de Liapunov Φ et le principe de LaSalle, on trouve que $\Omega \subset \Sigma$ et $\mathcal{A} \subset \Sigma$, de sorte que $\Phi|_\Omega = \Phi|_\mathcal{A} = |\alpha|$. Comme Φ est décroissante le long des trajectoires, il s'ensuit que $\Phi(w(\tau)) = |\alpha|$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que $w(\tau) \in \Sigma$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha = 0$, alors $w(\tau) \equiv 0$, ce qui est le résultat cherché. Si $\alpha \neq 0$, quitte à remplacer $w(\xi_1, \xi_2, \tau)$ par $-w(\xi_2, \xi_1, \tau)$, on peut supposer que $\alpha > 0$. Dans ce cas, la fonction $w(\xi, \tau)$ est strictement positive (et même minorée par une gaussienne), et la borne (15) implique que $w(\xi, \tau) \le C_3(\beta, \alpha)\, e^{-\beta|\xi|^2/4}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Des estimations analogues pour les dérivées permettent de conclure que la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ est bornée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. En utilisant la seconde fonction de Liapunov et le principe de LaSalle, on obtient alors $\Omega = \mathcal{A} = \{\alpha G\}$, de sorte que $H|_\Omega = H|_\mathcal{A} = \alpha \log(\alpha)$. Comme H est décroissante le long des trajectoires, il s'ensuit que $H(w(\tau)) = \alpha \log(\alpha)$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que $w(\tau) = \alpha G$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. □

3 Démonstration des principaux résultats

Démonstration du théorème 1.2. Soit $\omega \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2))$ la solution de l'équation (2) avec donnée initiale ω_0, et notons $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2}\omega_0 \,\mathrm{d}x$. Si $w(\xi,\tau) = e^\tau \omega(\xi\, e^{\tau/2}, e^\tau{-}1)$, alors $w \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2))$ est la solution de l'équation (13) pour la donnée initiale $w_0 = \omega_0$. Soit $\Omega \subset L^1(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble ω-limite de la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau\ge 0}$. Alors Ω est non vide, compact, invariant sous l'évolution définie par (13), et Ω attire $w(\tau)$ lorsque $\tau \to +\infty$. En particulier, pour tout $\bar w \in \Omega$, il existe une trajectoire complète $\{\bar w(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ de (13) dans Ω telle que $\bar w(0) = \bar w$. Par la proposition 2.1, $\bar w(\tau) = \alpha G$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $\Omega = \{\alpha G\}$. Ainsi, $w(\tau) \to \alpha G$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ lorsque $\tau \to +\infty$. En revenant à la fonction originale $\omega(x,t)$, on trouve donc

$$\lim_{t\to\infty} \Big\|\omega(x,t) - \frac{\alpha}{t{+}1} G\Big(\frac{x}{\sqrt{t{+}1}}\Big)\Big\|_{L^1_x} \;=\; 0 \;,$$

ce qui équivaut à (8) avec $p = 1$. D'autre part, en interpolant entre (8) avec $p = 1$ et (6) avec $p = \infty$, on obtient (8) pour tout $p \in (1,\infty)$. En utilisant alors l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev si $2 < q < \infty$ ou le lemme 2.1(b) dans [8] si $q = \infty$, on en déduit (9). Enfin, en utilisant les résultats précédents ainsi que l'équation intégrale vérifiée par $\omega(x,t)$, on montre sans peine que (8) est également valable pour $p = \infty$. □

Démonstration du théorème 1.3. Au vu du théorème 1.2, on peut supposer sans perte de généralité que $T = \infty$. La solution $\omega(x,t)$ de (2) possède la représentation suivante :

$$\omega(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_u(x,t;y,s)\omega(y,s)\,\mathrm{d}y \;, \quad x \in \mathbb{R}^2 \;, \quad t > s > 0 \;,$$

où Γ_u est la solution fondamentale de l'opérateur linéaire dépendant du temps $\partial_t{-}\Delta{+}u{\cdot}\nabla$, et $u(x,t)$ est le champ de vitesse correspondant à $\omega(x,t)$ par la loi de Biot-Savart (3). Par hypothèse, il existe $K > 0$ tel que $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^1} \le K$ pour tout $t > 0$. L'estimation de E. Carlen et M. Loss utilisée dans le paragraphe 2.1 implique que, pour tout $\beta \in (0,1)$, il existe une constante $C_2 > 0$ (dépendant de K) telle que

$$|\Gamma_u(x,t;y,s)| \;\le\; \frac{C_2}{t-s}\,\exp\Big(-\beta\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\Big) \;, \tag{19}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > s > 0$. D'autre part, un résultat de H. Osada [18] (voir aussi le théorème 3.1 dans l'article [14]) établit que Γ_u est une fonction höldérienne de ses arguments. Plus précisément, il existe une constante $\gamma \in (0,1)$ (qui dépend seulement de K) et, pour tout $\tau > 0$, une constante $C_4 > 0$ (qui dépend seulement de K et τ) telle que

$$|\Gamma_u(x,t;y,s) - \Gamma_u(x,t;y',s')| \;\le\; C_4\Big(|y-y'|^\gamma + |s-s'|^{\gamma/2}\Big) \;, \tag{20}$$

pour tous les $x, y, y' \in \mathbb{R}^2$ et tous les $t, s, s' > 0$ tels que $t - s \ge \tau$ et $t - s' \ge \tau$. En particulier, étant donnés $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$, la fonction $s \mapsto \Gamma_u(x,t;y,s)$ se prolonge par continuité en $s = 0$, et ce prolongement (encore noté Γ_u) vérifie les estimations (19), (20) avec $s = 0$.

Fixons à présent $x \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$. Pour tout $s \in (0,t)$ on a

$$\begin{aligned} \omega(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_u(x,t;y,0)\omega(y,s)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\Gamma_u(x,t;y,s) - \Gamma_u(x,t;y,0))\omega(y,s)\,\mathrm{d}y\ . \end{aligned}$$

Au vu de (20), la seconde intégrale dans le membre de droite converge vers 0 lorsque $s \to 0+$, car $\|\omega(\cdot,s)\|_{L^1} \le K$ pour tout $s > 0$. D'autre part, comme $y \mapsto \Gamma_u(x,t;y,0)$ est une fonction continue qui tend vers zéro à l'infini, et comme par hypothèse $\omega(\cdot,s)$ converge faiblement vers $\alpha\delta_0$ lorsque $s \to 0+$, la première intégrale converge vers $\alpha\Gamma_u(x,t;0,0)$. Ainsi,

$$|\omega(x,t)| = |\alpha||\Gamma_u(x,t;0,0)| \le \frac{C_2|\alpha|}{t}\, e^{-\beta|x|^2/(4t)}\ , \quad x \in \mathbb{R}^2\ , \quad t > 0\ .$$

Posons $w(\xi,\tau) = e^\tau\omega(\xi e^{\tau/2}, e^\tau)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$. Alors $w \in C^0(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^2))$ est une solution de (13) qui vérifie $|w(\xi,\tau)| \le C_2|\alpha|\, e^{-\beta|\xi|^2/4}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$. On a une borne similaire pour la dérivée $\nabla w(\xi,\tau)$, ce qui implique que la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ est relativement compacte dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Par la proposition 2.1, $w(\xi,\tau) = \alpha' G(\xi)$ pour un $\alpha' \in \mathbb{R}$, de sorte que $\omega(x,t) = (\alpha'/t)G(x/\sqrt{t})$. Comme $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ lorsque $t \to 0+$, il est clair que $\alpha' = \alpha$, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque. Il est frappant de constater que les théorèmes 1.2 et 1.3, qui concernent des aspects a priori très différents de l'équation (2), découlent tous deux directement de la même proposition 2.1, qui décrit la structure des trajectoires complètes relativement compactes dans les variables autosimilaires. Ce lien profond est dû à l'invariance d'échelle de l'équation (2), qui permet d'écrire ce système comme une équation *autonome* dans les variables $x/\sqrt{t}$, $\log(t)$. La démarche ci-dessus, qui relie les théorèmes 1.2 et 1.3 à la proposition 2.1, est une formulation "moderne" de l'argument de renormalisation présenté dans l'introduction.

Esquisse de la démonstration du théorème 1.4. L'existence de la solution est démontrée dans [6], [14], [16], et son comportement asymptotique est décrit par le théorème 1.2. La seule affirmation nouvelle est donc l'unicité.

Soient $T, K > 0$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, et soit $\omega \in C^0((0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ une solution de (2) vérifiant $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^1} \le K$ pour tout $t > 0$ et $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \mu$ lorsque $t \to 0+$. En procédant comme dans la démonstration du théorème 1.3, on obtient la représentation

$$\omega(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_u(x,t;y,0)\,\mathrm{d}\mu(y)\ , \quad x \in \mathbb{R}^2\ , \quad 0 < t < T\ , \tag{21}$$

où Γ_u est la solution fondamentale de l'opérateur linéaire dépendant du temps $\partial_t - \Delta + u\cdot\nabla$, et $u(x,t)$ est le champ de vitesse correspondant à $\omega(x,t)$ par la loi de Biot-Savart (3). On rappelle que Γ_u vérifie les bornes (19), (20).

Comme $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est une mesure finie, l'ensemble $E_{\mathrm{pp}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mu(\{x\}) \neq 0\}$ des atomes de μ est au plus dénombrable, et l'on a

$$\|\mu\|_{\mathrm{pp}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{x\in E_{\mathrm{pp}}} |\mu(\{x\})| \le \|\mu\| < \infty\ .$$

Par conséquent, étant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et des points $z_1, \ldots, z_N \in E_{\rm pp}$ deux à deux distincts tels que la mesure μ admette la décomposition

$$\mu \;=\; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{z_i} + \mu_0 \;, \tag{22}$$

où $\alpha_i = \mu(\{z_i\}) \neq 0$ et $\|\mu_0\|_{\rm pp} \le \epsilon$. Evidemment, dans le cas général où l'ensemble $E_{\rm pp}$ est infini, on a $N \to \infty$ lorsque $\epsilon \to 0$. Dans la suite, $\epsilon > 0$ est fixé et sera choisi suffisamment petit à la fin de l'argument.

En remplaçant (22) dans (21), on obtient la décomposition suivante de la solution :

$$\omega(x,t) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \omega_i(x,t) + \tilde\omega_0(x,t) \;, \quad x \in \mathbb{R}^2 \;, \quad t \in (0,T) \;,$$

où

$$\omega_i(x,t) \;=\; \alpha_i \Gamma_u(x,t;z_i,0) \;, \quad \tilde\omega_0(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_u(x,t;y,0)\,\mathrm{d}\mu_0(y) \;.$$

Par construction, $\tilde\omega_0 \in C^0((0,T), L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ est une solution de l'équation

$$\frac{\partial \tilde\omega_0}{\partial t} + u \cdot \nabla \tilde\omega_0 \;=\; \Delta \tilde\omega_0 \;, \tag{23}$$

qui vérifie $\|\tilde\omega_0(\cdot,t)\|_{L^1} \le K + \|\mu\|_{\rm pp}$ pour tout $t \in (0,T)$ et $\tilde\omega_0(\cdot,t) \rightharpoonup \mu_0$ lorsque $t \to 0+$. En particulier, comme $\|\mu_0\|_{\rm pp} \le \epsilon$, on montre que, pour tout $p \in (1,+\infty]$,

$$\limsup_{t \to 0+} t^{1-\frac{1}{p}} \|\tilde\omega_0(\cdot,t)\|_{L^p} \;\le\; K'\epsilon \;, \tag{24}$$

où K' ne dépend que de K et de p. D'autre part, pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$, la fonction $\omega_i(x,t)$ est une solution de la même équation (23) qui vérifie $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_i(x,t)\,\mathrm{d}x = \alpha_i$ pour tout $t \in (0,T)$ et $\omega_i(\cdot,t) \rightharpoonup \alpha_i \delta_{z_i}$ lorsque $t \to 0+$. Au vu du théorème 1.3, il est raisonnable de penser que $\omega_i(x,t)$ est proche d'un tourbillon d'Oseen lorsque t est suffisamment petit. Il est donc naturel de décomposer encore, pour $i \in \{1,\ldots,N\}$,

$$\omega_i(x,t) \;=\; \frac{\alpha_i}{t} G\Big(\frac{x - z_i}{\sqrt{t}}\Big) + \alpha_i \tilde\omega_i(x,t) \;, \quad x \in \mathbb{R}^2 \;, \quad t \in (0,T) \;.$$

Si l'on pose $\omega_i(x,t) = t^{-1} w_i((x-z_i)/\sqrt{t}, \log(t))$, on obtient pour $w_i(\xi,\tau)$ une équation d'évolution non autonome qui se réduit à (13) lorsque $\tau \to -\infty$. En utilisant cette observation ainsi que la proposition 2.1, on montre que $w_i(\cdot,\tau) \to \alpha_i G$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ lorsque $\tau \to -\infty$. En revenant aux variables originales, on trouve que, pour tout $p \in [1,+\infty]$,

$$\lim_{t \to 0+} t^{1-\frac{1}{p}} \|\tilde\omega_i(\cdot,t)\|_{L^p} \;=\; 0 \;, \quad i \in \{1,\ldots,N\} \;. \tag{25}$$

Intuitivement, ce résultat signifie que, lorsqu'on soustrait de la solution $\omega(x,t)$ le tourbillon d'Oseen $(\alpha_i/t)G((x-z_i)/\sqrt{t})$, on élimine totalement la contribution de la masse de Dirac $\alpha_i \delta_{z_i}$, dans la mesure où le reste $\tilde\omega_i(x,t)$ se comporte comme une solution de l'équation (2) dont la mesure initiale ne comporterait pas d'atomes.

La fin de la démonstration, dont on trouvera les détails dans [7], consiste à écrire les équations intégrales vérifiées par les restes $\tilde{\omega}_i(x,t)$, $i = 0,\dots,N$, et à leur appliquer un argument de Gronwall classique montrant l'unicité de la solution. La condition de petitesse nécessaire à cet argument est fournie par les relations (24) et (25), où l'on rappelle que $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. La difficulté principale de cette approche est que les équations pour les restes contiennent des termes de transport dus aux tourbillons d'Oseen, et que les estimations de tous ces termes doivent être indépendantes de N, puisque (en général) $N \to \infty$ lorsque $\epsilon \to 0$.

References

[1] M. Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **128**, 329–358, 1994.

[2] H. Brezis. Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi: "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations". *Arch. Rational Mech. Anal.*, **128**, 359–360, 1994.

[3] M. Cannone et F. Planchon. Self-similar solutions for Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Commun. Partial Differ. Equations*, **21**, 179–193, 1996.

[4] E. A. Carlen et M. Loss. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation. *Duke Math. J.*, **81**, 135–157 (1996), 1995.

[5] A. Carpio. Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three. *Comm. Partial Differential Equations*, **19**, 827–872, 1994.

[6] G.-H. Cottet. Équations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **303**, 105–108, 1986.

[7] I. Gallagher et Th. Gallay. Uniqueness of the solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^2$ with measure-valued initial vorticity. Article en préparation, 2004.

[8] Th. Gallay et C. E. Wayne. Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **163**, 209–258, 2002.

[9] Th. Gallay et C. E. Wayne. Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^3$. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **360**, 2155–2188, 2002. Recent developments in the mathematical theory of water waves (Oberwolfach, 2001).

[10] Th. Gallay. Tourbillon d'Oseen et comportement asymptotique des solutions de l'équation de Navier-Stokes. Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique 2001-2002, exposé n°V.

[11] Th. Gallay et C.E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. Prépublication de l'Institut Fourier (2003), disponible sur `http://arXiv.org/abs/math/0402449`.

[12] M.-H. Giga et Y. Giga. *Nonlinear partial differential equations : asymptotic behaviour of solutions and self-similar solutions*. Ouvrage publié en japonais en 1999, traduction anglaise en préparation, 2004.

[13] Y. Giga et T. Kambe. Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation. *Comm. Math. Phys.*, **117**, 549–568, 1988.

[14] Y. Giga, T. Miyakawa, et H. Osada. Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **104**, 223–250, 1988.

[15] S. Kamin (Kamenomostskaya). The asymptotic behavior of the solution of the filtration equation. *Israel J. Math.*, **14**, 76–87, 1973.

[16] T. Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity. *Differential Integral Equations*, **7**, 949–966, 1994.

[17] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures. Appl.*, **12**, 1–82, 1933.

[18] H. Osada. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. *J. Math. Kyoto Univ.*, **27**, 597–619, 1987.

[19] A. Prochazka et D. I. Pullin. On the two-dimensional stability of the axisymmetric Burgers vortex. *Phys. Fluids*, **7**, 1788–1790, 1995.

[20] L. Rossi et J. Graham-Eagle. On the existence of two-dimensional, localized, rotating, self-similar vortical structures. *SIAM J. Appl. Math.*, **62**, 2114–2128, 2002.