

# Tourbillons d'Oseen et comportement asymptotique des solutions de l'équation de Navier-Stokes

Thierry Gallay  
Institut Fourier  
Université de Grenoble I  
BP 74  
F-38402 Saint-Martin d'Hères

## 1 Introduction

On s'intéresse au comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation de Navier-Stokes incompressible dans tout l'espace:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \Delta u - \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

où  $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$  est le champ de vitesse,  $p(x, t) \in \mathbb{R}$  le champ de pression,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , et  $n = 2$  ou  $3$ . A ce jour, il existe deux résultats principaux montrant l'existence de solutions globales en temps de l'équation (1). Le plus ancien, dû à Leray [14], affirme que pour toute donnée initiale  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  l'équation (1) possède une solution *faible* globale  $u \in C_w([0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0, +\infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$ , qui vérifie en outre l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

L'*unicité* de cette solution n'est connue que si  $n = 2$ , ou si l'on sait a priori que  $u(t)$  est plus régulier, par exemple borné dans  $H^1$  pour tout  $t \geq 0$ . Mais la propagation de la régularité n'a pas été démontrée lorsque  $n = 3$ .

Le second résultat, dû à Kato [12], établit que le problème de Cauchy pour l'équation (1) est *localement* bien posé dans l'espace  $L^n(\mathbb{R}^n)$ . En outre, si la donnée initiale est suffisamment petite dans cet espace, la solution est globale et reste pour tout temps dans un voisinage de l'origine. Il convient de noter que la norme de l'espace  $L^n(\mathbb{R}^n)$  est invariante sous le changement d'échelle

$$u(x, t) \mapsto \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad p(x, t) \mapsto \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

qui laisse l'équation inchangée. En fait, il suffit pour assurer la globalité de la solution que la donnée initiale soit petite dans un sens plus faible, par exemple dans l'espace de Besov  $\dot{B}_3^{0, \infty}$  qui est également invariant par changement d'échelle [5].

Les approches de Leray et de Kato donnent des résultats identiques lorsque  $n = 2$ . En dimension trois, si l'on s'intéresse au comportement asymptotique en temps des solutions,

on peut sans perte de généralité se restreindre aux petites solutions de Kato. En effet, en utilisant l'inégalité d'énergie (2) et un argument d'unicité "fort-faible", on montre que toute solution faible de Leray coïncide, à partir d'un certain temps, avec une petite solution dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$ . En outre, il a été établi récemment que toute solution globale de (1) dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  converge vers zéro dans cet espace [6].

Dans le cadre des solutions faibles, une question importante laissée ouverte par Leray est celle de la décroissance temporelle de l'énergie. En vertu de (2), l'énergie cinétique du fluide  $\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2$  est une fonction décroissante du temps; il est donc naturel de se demander si cette quantité converge toujours vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . La réponse est affirmative, comme l'ont montré Kato [12] en dimension deux et Masuda [15] en dimension trois. L'étape suivante, qui nécessite des hypothèses supplémentaires sur la solution, consiste à étudier le taux de décroissance de  $\|u(t)\|_{L^2}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Les premiers résultats dans cette direction ont été établis par Kato [12], Schonbek [18], Kajikiya & Miyakawa [11], Beirão da Veiga [1], et Wiegner [21]. Citons le dernier d'entre eux, qui nous paraît particulièrement significatif:

**Proposition 1.1 [21]** *Soit  $u$  une solution faible globale de (1) dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , vérifiant l'inégalité d'énergie (2). Si la donnée initiale  $u_0 = u(0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  vérifie*

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^2} \leq \frac{C}{(1+t)^\alpha} \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors la solution  $u$  vérifie

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \frac{C'}{(1+t)^\beta} \quad \forall t \geq 0, \quad (5)$$

où  $\beta = \min(\alpha, (n+2)/4)$ .

Ce résultat signifie que les solutions faibles de (1), mesurées en norme d'énergie, décroissent au moins aussi vite que les solutions de l'équation de la chaleur avec les mêmes données initiales, pour autant que cette décroissance ne soit pas plus rapide que  $t^{-(n+2)/4}$ .

Cette limitation apparente de la décroissance *temporelle* des solutions est intimement liée aux restrictions imposées à la localisation *spatiale* des solutions par la contrainte d'incompressibilité  $\operatorname{div} u = 0$ . Pour éclaircir ce point, éliminons la pression  $p$  dans (1) en projetant l'équation sur les champs de vecteurs à divergence nulle. On obtient ainsi l'équation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbb{P}(u \cdot \nabla)u = \Delta u, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (6)$$

où  $\mathbb{P} = \mathbf{1} - \nabla(\Delta^{-1})\operatorname{div}$  est le projecteur de Leray-Hopf. Il est clair que  $\mathbb{P}$  est un multiplicateur de Fourier homogène de degré zéro, de classe  $C^\infty$  en dehors de l'origine, mais qui présente une discontinuité en  $\xi = 0$ . Cette singularité empêche les solutions de (6) de décroître arbitrairement vite lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . Par exemple, si  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifie  $\operatorname{div} u = 0$ , un calcul direct en variables de Fourier montre que  $|x|^{n+1}\mathbb{P}(u \cdot \nabla)u$  est une fonction bornée, et que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{n+1}|(\mathbb{P}(u \cdot \nabla)u)(x)| = 0$$

si et seulement si il existe une constante  $c \geq 0$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_i(x)u_j(x) dx = c\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Or, l'évolution définie par (6) ne préserve pas les conditions (7), sauf lorsque ces dernières sont satisfaites pour des raisons de symétrie (ce point est discuté en détail dans la thèse de L. Brandolese [3]). En conséquence, même si l'on impose à la donnée initiale d'être régulière et à support compact, la solution  $u(x, t)$  de (6) décroîtra en général comme  $|x|^{-n-1}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , et ce pour des temps arbitrairement petits. Ces considérations peuvent se résumer ainsi: "En l'absence de symétries, les solutions de (6) décroissent au mieux comme  $|x|^{-n-1}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ ".

Le lien annoncé avec le résultat de Wiegner est l'observation que, si  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  est à divergence nulle et si  $|x|^{n+1}u_0(x)$  est borné sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $u_0$  vérifie (4) précisément pour tout  $\alpha < (n+2)/4$  (on utilise ici le fait que  $u_0$  est à moyenne nulle, à cause de la condition d'incompressibilité). En d'autres termes, la valeur critique  $(n+2)/4$  peut être interprétée comme le taux de décroissance en temps des solutions de l'équation de la chaleur pour des données initiales qui décroissent en espace aussi vite que le permet l'équation de Navier-Stokes en l'absence de symétries. Remarquons au passage que la condition (4) peut très bien être remplie, pour un  $\alpha > 0$  arbitraire, sans que  $u_0$  ne possède de décroissance particulière à l'infini. Il suffit en effet que la transformée de Fourier  $\hat{u}_0(\xi)$  s'annule suffisamment vite lorsque  $|\xi| \rightarrow 0$ , mais une condition de ce genre n'est pas préservée non plus par l'équation de Navier-Stokes.

A la lecture du résultat de Wiegner, il est naturel de se demander s'il existe des solutions (non triviales) de l'équation de Navier-Stokes qui vérifient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(n+2)/4} \|u(t)\|_{L^2} = 0. \quad (8)$$

Comme nous le verrons plus loin, la réponse est affirmative, en toute dimension d'espace. De plus, il est relativement aisé de construire des exemples de données initiales "symétriques" pour lesquelles la solution vérifie (8). Ceci est connu depuis longtemps en dimension deux, mais n'a été observé en dimension trois que très récemment [4], [3].

La question ci-dessus, ou celle apparentée des "bornes inférieures", a été étudiée en détail par M. Schonbek dans une série de travaux [19], [20]. Ses résultats ne sont malheureusement pas tous corrects, et contredisent parfois les énoncés ci-dessous. Il convient néanmoins de citer un travail récent, en collaboration avec T. Miyakawa, dans lequel est établie la proposition suivante:

**Proposition 1.2 [16]** *Soit  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\operatorname{div} u_0 = 0$  et  $(1 + |x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $u$  une solution faible globale de (1) de donnée initiale  $u_0$ , vérifiant l'inégalité d'énergie (2). Pour  $k, \ell = 1, \dots, n$ , définissons les coefficients*

$$b_{k\ell} = \int_{\mathbb{R}^n} x_\ell (u_0)_k(x) dx, \quad c_{k\ell} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_k(x, t)u_\ell(x, t) dx dt.$$

Alors la solution  $u$  vérifie (8) si et seulement si il existe  $c \geq 0$  tel que

$$b_{k\ell} = 0 \quad \text{et} \quad c_{k\ell} = c\delta_{k\ell}, \quad k, \ell = 1, \dots, n. \quad (9)$$

On notera l'analogie entre les conditions (7) et (9). Remarquons aussi que les coefficients  $c_{k\ell}$  sont bien définis, car la solution  $u$  vérifie  $\|u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-(n+2)/4}$  en vertu du résultat de Wiegner.

La proposition ci-dessus donne, à première vue, une caractérisation des solutions de (1) qui vérifient (8). En fait, il faut prendre garde à l'hypothèse cruciale  $(1+|x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , qui permet entre autres de définir les moments  $b_{k\ell}$ . Ainsi que nous l'avons vu plus haut, cette propriété *n'est pas préservée* par l'équation de Navier-Stokes. Il s'ensuit en particulier que, si  $u(x, t)$  est une solution vérifiant les conclusions de la proposition, la caractérisation (9) ne peut pas, en général, être appliquée à une solution translatée  $u(x, t+T)$ , alors que cette dernière vérifie évidemment (8)! En d'autres termes, le résultat de Miyakawa et Schonbek est une caractérisation des solutions de (1) qui vérifient (8) *et* dont la donnée initiale se trouve dans le sous-espace  $L^1(\mathbb{R}^n, (1+|x|) dx)$ , qui n'est pas invariant sous l'évolution. Comme nous le verrons plus loin, il est possible de décrire l'ensemble des solutions vérifiant (8) si l'on travaille dans un espace fonctionnel approprié.

Le reste de ce texte est une présentation de différents résultats obtenus en collaboration avec C.E. Wayne [7], [8], [9]. Le but de notre travail était de calculer explicitement un développement asymptotique des solutions de (1) en puissances inverses de  $t$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Cet objectif est difficile à atteindre si l'on travaille directement avec le champ de vitesse  $u(x, t)$ , en raison de la mauvaise décroissance spatiale de celui-ci. Pour l'équation linéarisée (équation de Stokes, ou de la chaleur), un calcul direct montre que, si la donnée initiale  $u_0$  décroît suffisamment vite à l'infini, alors

$$u(x, t) = (e^{t\Delta} u_0)(x) = \frac{1}{t^{n/2}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) dy + \frac{1}{t^{(n+1)/2}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2\sqrt{t}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_{\mathbb{R}^n} y_i u_0(y) dy + o(t^{-(n+1)/2}),$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ , où  $G(y) = (4\pi)^{-n/2} e^{-|y|^2/4}$ . Le premier terme du membre de droite est toujours nul, car  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\operatorname{div} u_0 = 0$  impliquent  $\int u_0 dx = 0$ . Il est donc nécessaire, pour extraire le premier terme non nul du développement asymptotique, de supposer que  $(1+|x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Mais, comme nous l'avons vu, cette propriété n'est malheureusement pas préservée par l'équation de Navier-Stokes. Il s'ensuit que cette approche naïve ne permet pas de calculer un seul terme de ce développement dans le cas non linéaire, et ce en aucune dimension d'espace. En résumé: "Pour les solutions de l'équation de Navier-Stokes, le taux de décroissance en temps ne se lit pas sur le comportement à l'infini du champ de vitesse, car celui-ci est déterminé essentiellement par la contrainte d'incompressibilité".

Une façon naturelle de contourner cette difficulté est d'étudier d'abord l'équation vérifiée par la *vorticité* (ou le tourbillon) associée à l'écoulement, puis de remonter au champ de vitesse par la formule de Biot-Savart. L'intérêt de cette approche détournée est que la décroissance à l'infini de la vorticité n'est pas limitée par la contrainte d'incompressibilité, à l'inverse de ce qui se produit pour le champ de vitesse. Si l'on suppose que la vorticité est bien localisée en espace, ce qui est vérifié dans de nombreux écoulements physiques, on donc peut étudier son comportement asymptotique en temps par les méthodes habituelles, inspirées du développement ci-dessus pour l'équation de la chaleur. Cependant, comme la vorticité est un scalaire en dimension deux et un champ de vecteurs

à divergence nulle en dimension trois, il est préférable (ne serait-ce que pour des raisons de notations) de traiter les deux situations séparément. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur le cas de la dimension deux, qui est le plus intéressant du point de vue du comportement asymptotique. Nous renvoyons le lecteur à notre article [8] pour une présentation des résultats correspondants en dimension trois.

## 2 Variables d'échelle et propriétés spectrales

On suppose désormais que  $n = 2$ , et on considère la vorticité  $\omega(x, t) \in \mathbb{R}$  définie à partir du champ de vitesse  $u(x, t)$  par la relation  $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ . L'équation d'évolution pour  $\omega$  s'écrit

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = \Delta \omega, \quad (10)$$

où le champ de vitesse  $u$  est donné par la formule de Biot-Savart

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (11)$$

Ici et dans la suite, on note  $(x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$ . Le problème de Cauchy pour l'équation (10) est globalement bien posé dans l'espace  $L^1(\mathbb{R}^2)$  [2], [13]. En outre, il n'est pas difficile de montrer que si la donnée initiale  $\omega_0$  est à décroissance rapide, il en va de même de la solution  $\omega(x, t)$  pour tout  $t > 0$ . Dans ce cas, la décroissance à l'infini du champ de vitesse  $u$  est directement reliée au nombre de moments nuls de la vorticité  $\omega$ . Plus précisément, supposons que  $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  et définissons les moments

$$M = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x) dx, \quad M_i = \int_{\mathbb{R}^2} x_i \omega(x) dx, \quad M_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} x_i x_j \omega(x) dx,$$

où  $i, j = 1, 2$ . Si  $u$  est le champ de vitesse défini par (11), on a les résultats suivants:

- Si  $M \neq 0$ , alors  $|u(x)| \sim |x|^{-1}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ ; en particulier,  $u \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ .
- Si  $M = 0$  mais  $M_1 \neq 0$  ou  $M_2 \neq 0$ , alors  $|u(x)| \sim |x|^{-2}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ ; en particulier,  $u \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ .
- Si  $M = M_1 = M_2 = 0$  mais  $M_{11} \neq M_{22}$  ou  $M_{12} \neq 0$ , alors  $|u(x)| \sim |x|^{-3}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ ; en particulier,  $u \notin L^1(\mathbb{R}^2, (1+|x|)dx)$ .

D'autre part, il est facile de vérifier que la moyenne  $M$  et les premiers moments  $M_1, M_2$  de  $\omega$  sont préservés par l'évolution (10), mais qu'il n'en va pas de même de  $M_{11} - M_{22}$  ni de  $M_{12}$ . Ces moments d'ordre deux ne seront donc généralement pas nuls pour  $t > 0$  même si on choisit la donnée initiale de façon qu'il s'annulent au temps  $t = 0$ . En conséquence, pour  $t > 0$ , le champ de vitesse décroîtra comme  $|x|^{-3}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , en accord avec les résultats énoncés dans l'introduction.

Pour étudier le comportement asymptotique en temps des solutions de (10), on introduit les "variables d'échelle" ou "variables autosimilaires"

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}}, \quad \tau = \log(1+t).$$

Si  $\omega(x, t)$  est une solution de (10) et si  $u(x, t)$  est le champ de vitesse associé, on définit de nouvelles fonctions  $w(\xi, \tau)$  et  $v(\xi, \tau)$  par

$$\omega(x, t) = \frac{1}{1+t} w\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right), \quad (12)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right). \quad (13)$$

La vorticité transformée d'échelle  $w(\xi, \tau)$  vérifie alors l'équation

$$\partial_\tau w + (v \cdot \nabla_\xi)w = \mathcal{L}w, \quad (14)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur (de Fokker-Planck) défini par

$$\mathcal{L}w = \Delta_\xi w + \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla_\xi)w + w. \quad (15)$$

Le champ de vecteurs  $v(\xi, \tau)$  n'est autre que le champ de vitesse associé à  $w(\xi, \tau)$  par la loi de Biot-Savart. De façon remarquable, l'équation (14) est encore autonome, alors que le changement de variables (12) "mélange" le temps et l'espace. Ceci résulte évidemment de l'invariance d'échelle (3).

Un cadre fonctionnel approprié à l'étude des solutions de (14) est l'espace  $L^2(m)$  défini pour  $m \geq 0$  par

$$L^2(m) = \{w \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \|w\|_m < \infty\}, \quad \text{où} \quad \|w\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |w(\xi)|^2 d\xi.$$

On notera que  $L^2(m)$  n'est autre que la transformée de Fourier de l'espace de Sobolev  $H^m(\mathbb{R}^2)$ . Le paramètre  $m$  permet d'ajuster la décroissance à l'infini de la vorticité. Si  $w \in L^2(m)$  pour un  $m > 1$ , alors  $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , et le champ de vitesse associé  $v$  est de carré intégrable si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) d\xi = 0$ . Notre premier résultat montre que le problème de Cauchy pour (14) est globalement bien posé dans  $L^2(m)$  si  $m > 1$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $m > 1$ . Pour toute donnée initiale  $w_0 \in L^2(m)$ , l'équation (14) possède une unique solution globale  $w \in C^0([0, \infty), L^2(m))$  vérifiant  $w(0) = w_0$ . En outre,*

- 1)  $\|w(\tau)\|_m \leq K(\|w_0\|_m)$  pour tout  $\tau \geq 0$ , où  $K(r) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\int_{\mathbb{R}^2} w(\xi, \tau) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} w_0(\xi) d\xi$  pour tout  $\tau \geq 0$ ;
- 3) si  $\int_{\mathbb{R}^2} w_0(\xi) d\xi = 0$ , alors  $\|w(\tau)\|_m \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .

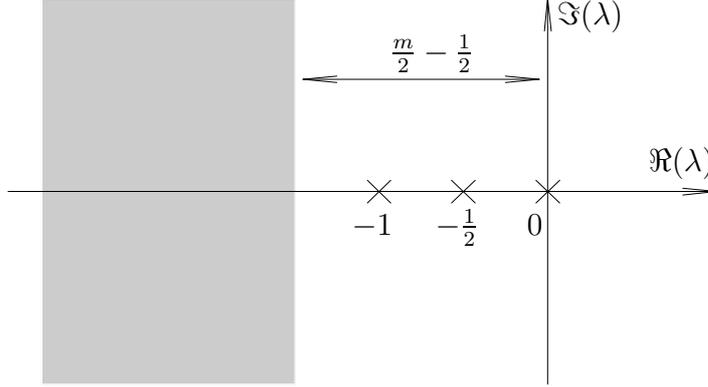
La démonstration est tout à fait classique: on montre d'abord l'existence locale par un argument de point fixe sur l'équation intégrale associée à (14), puis on vérifie à l'aide d'estimations d'énergie que les solutions restent bornées. Le point 3) concerne les solutions *d'énergie finie*, c'est-à-dire telles que le champ de vitesse  $v$  soit de carré intégrable. On sait dans ce cas que  $\|v(\tau)\|_{L^2} \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , et on en déduit que  $\|w(\tau)\|_m \rightarrow 0$ .

L'unique effet du changement de variables (12) sur l'équation (10) est de remplacer le laplacien par l'opérateur (15), apparemment plus compliqué. Mais ce dernier possède des propriétés spectrales remarquables qui clarifient le comportement asymptotique des solutions.

**Proposition 2.2** Soit  $m \geq 0$ . Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}$  dans  $L^2(m)$  (défini sur son domaine maximal) est l'ensemble

$$\sigma_m(\mathcal{L}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) \leq \frac{1-m}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

En outre, si  $k \in \mathbb{N}$  vérifie  $k+1 < m$ , alors  $-k/2$  est une valeur propre isolée de  $\mathcal{L}$  de multiplicité  $k+1$ .



**Fig. 1.** Le spectre de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  dans  $L^2(m)$  lorsque  $m = 4$ .

La démonstration de ce résultat repose sur les idées suivantes:

(1) L'opérateur  $\mathcal{L}$  est formellement conjugué au hamiltonien de l'oscillateur harmonique:

$$e^{|\xi|^2/8} \mathcal{L} e^{-|\xi|^2/8} = \Delta + \frac{1}{2} - \frac{|\xi|^2}{16},$$

dont le spectre est bien connu. On en déduit que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $-k/2$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}$  de multiplicité au moins  $k+1$ . Les fonctions propres associées (fonctions de Hermite) sont à décroissance rapide, et appartiennent donc à  $L^2(m)$  pour tout  $m \geq 0$ . Les premières d'entre elles joueront un rôle important dans la section suivante. Il n'est donc pas inutile de les énumérer ici, ainsi que que les champs de vitesse et les projecteurs spectraux correspondants:

- $\lambda = 0$  (valeur propre simple, si  $m > 1$ ).  
 Fonction propre:  $G(\xi) = (4\pi)^{-1} e^{-|\xi|^2/4}$   
 Champ de vitesse:  $v^G(\xi) = (2\pi|\xi|^2)^{-1} (1 - e^{-|\xi|^2/4}) \xi^\perp$  ( $\sim |\xi|^{-1}$  lorsque  $|\xi| \rightarrow \infty$ )  
 Projection spectrale:  $w \mapsto G \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) d\xi$
- $\lambda = -1/2$  (valeur propre double, si  $m > 2$ ).  
 Fonctions propres:  $F_i(\xi) = \partial_i G(\xi) = -\frac{\xi_i}{2} G(\xi)$ ,  $i = 1, 2$   
 Champs de vitesse:  $v^{F_i}(\xi) = \partial_i v^G(\xi)$  ( $\sim |\xi|^{-2}$  lorsque  $|\xi| \rightarrow \infty$ )  
 Projections spectrales:  $w \mapsto F_i \int_{\mathbb{R}^2} (-\xi_i) w(\xi) d\xi$ ,  $i = 1, 2$

- $\lambda = -1$  (valeur propre triple, si  $m > 3$ ).

Fonctions propres:  $H_1(\xi) = \Delta G(\xi)$ ,  $H_2(\xi) = (\partial_1^2 - \partial_2^2)G(\xi)$ ,  $H_3(\xi) = \partial_1 \partial_2 G(\xi)$

Champs de vitesse:  $v^{H_1}(\xi) = \Delta \mathbf{v}^G(\xi) = -\frac{1}{2}G(\xi)\xi^\perp$  (gaussien)

$v^{H_2}(\xi) = (\partial_1^2 - \partial_2^2)\mathbf{v}^G(\xi)$ ,  $v^{H_3}(\xi) = \partial_1 \partial_2 \mathbf{v}^G(\xi)$  ( $\sim |\xi|^{-3}$  lorsque  $|\xi| \rightarrow \infty$ )

Projections spectrales:  $w \mapsto H_j \int_{\mathbb{R}^2} p_j(\xi)w(\xi) d\xi$ ,  $j = 1, 2, 3$ , où

$p_1(\xi) = \frac{1}{4}(|\xi|^2 - 4)$ ,  $p_2(\xi) = \frac{1}{4}(\xi_1^2 - \xi_2^2)$ ,  $p_3(\xi) = \xi_1 \xi_2$ .

(2) Dans l'espace de Fourier,  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel d'ordre un:

$$(\widehat{\mathcal{L}w})(k) = -(|k|^2 + \frac{1}{2}k \cdot \nabla_k)\widehat{w}(k), \quad k \in \mathbb{R}^2.$$

Fixons  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(\lambda) < 1/2$ , et définissons  $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$  par sa transformée de Fourier  $\widehat{w}(k) = |k|^{-2\lambda} e^{-|k|^2}$ . Alors il est facile de vérifier que  $\mathcal{L}w = \lambda w$ , et que  $w \in L^2(m)$  si  $\Re(\lambda) < (1-m)/2$ . Ainsi, chaque point du demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < (1-m)/2\}$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}$  (en fait, de multiplicité infinie).

(3) L'opérateur  $\mathcal{L}$  est le générateur d'un semi-groupe fortement continu dans  $L^2(m)$ , donné par les formules explicites:

$$\begin{aligned} (\widehat{e^{\tau\mathcal{L}}w})(k) &= e^{-a(\tau)|k|^2} \widehat{w}(k e^{-\tau/2}), \quad \text{ou} \\ (e^{\tau\mathcal{L}}w)(\xi) &= \frac{e^{\frac{N\tau}{2}}}{(4\pi a(\tau))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|\xi - \xi'|^2}{4a(\tau)}\right) w(\xi' e^{\tau/2}) d\xi', \end{aligned}$$

où  $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$ . Fixons  $k \in \mathbb{N}$ , et supposons que  $m > k+1$ . Notons  $P_k : L^2(m) \rightarrow L^2(m)$  le projecteur spectral sur le sous-espace engendré par les fonctions propres de  $\mathcal{L}$  relatives aux valeurs propres  $0, -1/2, \dots, -k/2$ , et définissons  $Q_k = \mathbf{1} - P_k$ . Si  $k < 0$ , on posera  $P_k = 0$ ,  $Q_k = \mathbf{1}$ . Comme le suggèrent les expressions ci-dessus, une fonction  $w \in L^2(m)$  vérifie  $P_k w = 0$  si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}^2} \xi^\alpha w(\xi) d\xi = 0$  pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq k$ . Le résultat suivant se montre par calcul direct:

**Lemme 2.3** *Soit  $m \geq 0$ , et soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $k+1 < m \leq k+2$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $w \in L^2(m)$ ,*

$$\|e^{\tau\mathcal{L}}Q_k w\|_m \leq C e^{\frac{\tau}{2}(1-m+\epsilon)} \|w\|_m, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (16)$$

En d'autres termes, la restriction du semi-groupe  $e^{\tau\mathcal{L}}$  au sous-espace invariant  $Q_k L^2(m)$  (où les valeurs propres isolées  $0, -1/2, \dots, -k/2$  ont été éliminées) décroît essentiellement comme  $e^{\frac{\tau}{2}(1-m)}$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Ceci implique, par le théorème de Hille-Yosida, que le générateur  $\mathcal{L}$  ne possède pas de spectre dans le demi-plan  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) > \frac{1-m}{2}\}$ , à l'exception des valeurs propres sus-mentionnées. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.2.

La proposition 2.2 joue un rôle central dans l'étude du comportement asymptotique des solutions de (14), en particulier pour les solutions d'énergie finie, qui convergent vers zéro lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ . Elle implique en effet que, si  $m \geq 0$  est choisi suffisamment grand, la partie "principale" du spectre de  $\mathcal{L}$  (celle qui détermine le comportement asymptotique

en temps) est *discrète*. Par des méthodes standard, inspirées de la théorie des systèmes dynamiques de dimension finie, on peut donc calculer un développement asymptotique de ces solutions lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , à un ordre arbitrairement élevé. Ce programme sera esquissé dans la section suivante, où nous calculerons le premier terme non nul de ce développement dans deux situations différentes.

On peut aussi exploiter la discrétisation spectrale de façon plus fondamentale en construisant des *variétés invariantes* locales qui donnent une vision géométrique du portrait de phase de l'équation (14) au voisinage de l'origine. Nous ne développerons pas ces idées ici, mais nous renvoyons le lecteur intéressé à notre article [7] où cette approche a été détaillée. Nous rencontrerons toutefois un exemple de variété stable dans la section suivante, et nous étudierons également dans la dernière section la variété centrale de l'origine, qui coïncide en fait avec le sous-espace  $\{\alpha G \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

### 3 Etude asymptotique des solutions d'énergie finie

Dans cette section, on suppose que la donnée initiale  $w_0$  appartient à  $L^2(m)$  pour un  $m$  suffisamment grand (par exemple,  $m \geq 4$ ), et que  $w_0$  est à *moyenne nulle*. En vertu de la proposition 2.1, l'équation (14) possède une unique solution globale  $w \in C^0([0, \infty), L^2(m))$  qui vérifie  $w(0) = w_0$  et  $\|w(\tau)\|_m \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Comme nous l'avons déjà observé, le champ de vitesse associé est d'énergie finie et vérifie  $\|v(\tau)\|_{L^2} \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Décomposons  $w(\xi, \tau)$  et  $v(\xi, \tau)$  de la la façon suivante:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^2 \beta_i(\tau) F_i(\xi) + \sum_{j=1}^3 \gamma_j(\tau) H_j(\xi) + R(\xi, \tau), \quad (17)$$

$$v(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^2 \beta_i(\tau) v^{F_i}(\xi) + \sum_{j=1}^3 \gamma_j(\tau) v^{H_j}(\xi) + v^R(\xi, \tau), \quad (18)$$

où  $F_i, H_j$  sont les fonctions de propres de  $\mathcal{L}$  introduites dans la section précédente, et les coefficients  $\beta_i, \gamma_j$  sont définis par

$$\begin{aligned} \beta_i(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^2} (-\xi_i) w(\xi, \tau) \, d\xi, \quad i = 1, 2, \\ \gamma_j(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^2} p_j(\xi) w(\xi, \tau) \, d\xi, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Par construction, le reste  $R(\xi, \tau)$  appartient au sous-espace  $Q_2 L^2(m)$  constitué des fonctions dont les premiers moments (jusqu'à l'ordre deux inclus) sont identiquement nuls. En vertu de la proposition 2.2, le spectre de  $\mathcal{L}$  restreint à ce sous-espace est compris dans le demi-plan  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) \leq -3/2\}$ .

En remplaçant le développement (17) dans l'équation (14), on trouve que les coefficients  $\beta_i$  vérifient l'équation linéaire

$$\dot{\beta}_i = -\frac{1}{2} \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

(Cette relation équivaut à la conservation des moments d'ordre un de la vorticité  $\omega$  dans les variables originales.) L'évolution des coefficients  $\gamma_j$  est régie par le système non linéaire

$$\dot{\gamma}_1 = -\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 = -\gamma_2 - \int_{\mathbb{R}^2} v_1 v_2 \, d\xi, \quad \dot{\gamma}_3 = -\gamma_3 + \int_{\mathbb{R}^2} (v_1^2 - v_2^2) \, d\xi, \quad (19)$$

où  $v$  doit être remplacé par son expression (18) en fonction de  $\beta$ ,  $\gamma$ , et  $R$ . Enfin, le reste  $R$  vérifie une équation de la forme

$$R_\tau = \mathcal{L}R + \mathcal{N}(\beta, \gamma, R), \quad (20)$$

où  $\mathcal{N}$  est une fonction quadratique de  $\beta, \gamma, R$ .

Il est évident que  $\beta_i(\tau) = e^{-\tau/2} b_i$  pour  $i = 1, 2$ , où  $b_i = \beta_i(0)$ . En insérant ce résultat dans les équations pour  $\gamma$  et  $R$ , et en utilisant le fait que toutes ces quantités convergent vers zéro, on montre facilement que  $|\gamma(\tau)| + \|R(\tau)\|_m = \mathcal{O}(\tau e^{-\tau})$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Il s'ensuit que

$$\left\| w(\tau) - \sum_{i=1}^2 b_i e^{-\tau/2} F_i \right\|_m = \mathcal{O}(\tau e^{-\tau}), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

(Le préfacteur  $\tau$  dans le terme de reste s'explique par le fait que les équations pour  $\gamma_2, \gamma_3$  contiennent des termes quadratiques en  $\beta$  qui entrent en "résonance" avec la valeur propre  $-1$  de l'opérateur linéaire.) Pour exprimer ce résultat dans les variables originales, notons

$$\omega_{\text{app}}(x, t) = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i}{t^{3/2}} F_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad u_{\text{app}}(x, t) = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i}{t} v^{F_i}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (21)$$

On a alors l'énoncé suivant:

**Proposition 3.1** *Soit  $m > 3$ , et soit  $\omega_0 \in L^2(m)$  tel que  $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \, dx = 0$ . Si  $\omega(x, t)$  est la solution de (10) de donnée initiale  $\omega_0$ , et si  $u(x, t)$  est le champ de vitesse qui lui est associé, alors pour tout  $p \in [1, +\infty]$  on a*

$$\|\omega(t) - \omega_{\text{app}}(t)\|_{L^p} = \mathcal{O}\left(\frac{\log t}{t^{2-\frac{1}{p}}}\right), \quad \|u(t) - u_{\text{app}}(t)\|_{L^p} = \mathcal{O}\left(\frac{\log t}{t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}}\right),$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ , où  $\omega_{\text{app}}, u_{\text{app}}$  sont donnés par (21) avec  $b_i = -\int_{\mathbb{R}^2} x_i \omega_0(x) \, dx$ .

Dans le reste de cette section, on suppose en outre que  $b_i = 0$  pour  $i = 1, 2$ , c'est-à-dire que les moments d'ordre un de la donnée initiale  $w_0$  sont tous deux nuls. En d'autres termes, on se place dans le sous-espace invariant  $Q_1 L^2(m)$ , qui est de codimension trois dans  $L^2(m)$ . Au vu de (19), (20), il est clair que  $\|w(\tau)\|_m = \mathcal{O}(e^{-\tau})$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , ce qui implique que  $\|v(\tau)\|_{L^2} = \mathcal{O}(e^{-\tau})$ . En intégrant (19), on trouve donc

$$\gamma_1(\tau) = c_1 e^{-\tau}, \quad \gamma_2(\tau) = c_2 e^{-\tau} + \mathcal{O}(e^{-2\tau}), \quad \gamma_3(\tau) = c_3 e^{-\tau} + \mathcal{O}(e^{-2\tau}),$$

lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , où  $c_1 = \gamma_1(0)$  et

$$\begin{aligned} c_2 &= \gamma_2(0) - \int_0^\infty e^s \left( \int_{\mathbb{R}^2} v_1(\xi, s) v_2(\xi, s) \, d\xi \right) ds, \\ c_3 &= \gamma_3(0) + \int_0^\infty e^s \left( \int_{\mathbb{R}^2} (v_1(\xi, s)^2 - v_2(\xi, s)^2) \, d\xi \right) ds. \end{aligned}$$

En outre,  $\|R(\tau)\|_m = \mathcal{O}(e^{-3\tau/2})$  au vu de (20). Il s'ensuit immédiatement que

$$\left\| w(\tau) - \sum_{j=1}^3 c_j e^{-\tau} H_j \right\|_m = \mathcal{O}(e^{-3\tau/2}), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (22)$$

Pour traduire ce résultat dans les variables originales, on note

$$\bar{\omega}_{\text{app}}(x, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{t^2} H_j\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad \bar{u}_{\text{app}}(x, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{t^{3/2}} v^{H_j}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (23)$$

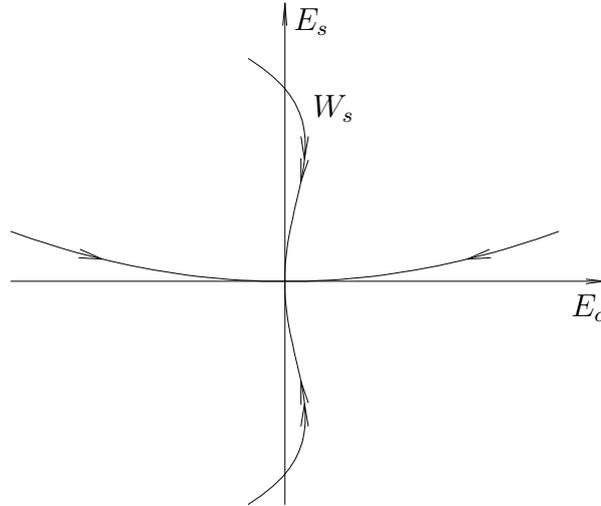
et on obtient un énoncé très semblable à celui de la proposition 3.1:

**Proposition 3.2**

Soit  $m > 4$ , et soit  $\omega_0 \in L^2(m)$  tel que  $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx = 0$  et  $\int_{\mathbb{R}^2} x_i \omega_0(x) dx = 0$  pour  $i = 1, 2$ . Si  $\omega(x, t)$  est la solution de (10) de donnée initiale  $\omega_0$ , et si  $u(x, t)$  est le champ de vitesse qui lui est associé, alors il existe  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $p \in [1, \infty]$ ,

$$\|\omega(t) - \bar{\omega}_{\text{app}}(t)\|_{L^p} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{5}{2} - \frac{1}{p}}}\right), \quad \|u(t) - \bar{u}_{\text{app}}(t)\|_{L^p} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2 - \frac{1}{p}}}\right),$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ , où  $\bar{\omega}_{\text{app}}, \bar{u}_{\text{app}}$  sont donnés par (23).



**Fig. 2.** Une esquisse du portrait de phase de l'équation (14) dans  $Q_1 L^2(m)$ . La variété fortement stable  $W_s$  est constituée des solutions qui convergent vers zéro plus vite que  $e^{-\tau}$ . L'intersection  $W_s \cap E_s$ , représentée ici par deux points, contient en fait un sous-espace vectoriel de dimension infinie.

On sait que  $Q_1 L^2(m) = E_s \oplus E_c$ , où  $E_s = Q_2 L^2(m)$  et  $E_c$  est le sous-espace engendré par les fonctions propres  $H_1, H_2, H_3$ . Introduisons à présent la *variété fortement stable* (de l'origine) définie par

$$W_s = \{w_0 \in Q_1 L^2(m) \mid \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \|w(\tau)\|_m = 0\},$$

où  $w(\tau)$  désigne la solution de (14) de donnée initiale  $w_0$ . La théorie des variétés invariantes permet de montrer qu'au voisinage de zéro l'ensemble  $W_s \subset Q_1L^2(m)$  est une sous-variété régulière de codimension trois, tangente à l'origine au sous-espace  $E_s$ . En outre, comme toutes les solutions dans  $Q_1L^2(m)$  convergent vers zéro lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , on peut également démontrer que  $W_s$  tout entier est une sous-variété régulière de  $Q_1L^2(m)$ . Enfin, il suit de (22) que les solutions sur  $W_s$  sont exactement celles qui vérifient  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , et la proposition 3.2 montre que ces solutions sont aussi celles pour lesquelles  $t\|u(t)\|_{L^2} \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Nous voyons donc que, si l'on se place dans un espace où la vorticité décroît suffisamment vite à l'infini, alors les solutions de l'équation de Navier-Stokes qui vérifient (8) (pour  $n = 2$ ) forment une *sous-variété* régulière de codimension finie.

Comme nous l'avons mentionn e dans l'introduction, la proposition 1.2 donne une caractérisation des solutions sur la variété fortement stable pour lesquelles le champ de vitesse initial vérifie  $(1+|x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Cette dernière condition entraîne que les quantités  $\gamma_j(\tau)$  définies plus haut vérifient  $\gamma_2(0) = \gamma_3(0) = 0$ . Comme on a également  $\gamma_1(0) = c_1 = 0$  sur la variété, on voit que la proposition 1.2 caractérise en fait l'intersection  $W_s \cap E_s$ . Cette dernière n'est pas vide, car elle contient en particulier toutes les fonctions  $w \in E_s$  à symétrie radiale (cette symétrie définit un sous-espace invariant dans lequel l'équation (10) se réduit à l'équation de la chaleur). En revanche, on montre facilement que  $W_s \not\subset E_s$ , ce qui équivaut à dire que le sous-espace  $E_s$  n'est pas invariant sous l'évolution. Restreintes au sous-espace  $E_s$ , les conditions  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  qui définissent  $W_s$  se réduisent à (9).

## 4 Stabilité des tourbillons d'Oseen

Dans cette dernière partie, on étudie à nouveau l'équation (14) dans l'espace  $L^2(m)$  avec  $m > 1$ , mais on ne suppose plus que la vorticité  $w$  est de moyenne nulle. Les solutions de l'équation de Navier-Stokes ainsi obtenues seront donc en général d'énergie infinie, c'est-à-dire que le champ de vitesse  $v$  ne sera pas de carré intégrable.

Ainsi que nous l'avons déjà observ e, l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par (15) possède une valeur propre simple  $\lambda = 0$ , dont la fonction propre et le champ de vitesse correspondant sont donn es par

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-|\xi|^2/4}, \quad v^G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2} (1 - e^{-|\xi|^2/4}).$$

La symétrie radiale de  $G$  implique que  $v^G \cdot \nabla G \equiv 0$ . Il s'ensuit que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $w = \alpha G$  est une solution stationnaire de l'équation (14). La droite  $W_c = \{\alpha G \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ , constituée de points d'équilibre, n'est autre que la *variété centrale* de l'origine [7]. En termes des variables originales, l'observation ci-dessus signifie que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'équation de Navier-Stokes possède une solution autosimilaire exacte donnée par

$$\omega(x, t) = \frac{\alpha}{4\pi t} e^{-|x|^2/(4t)}, \quad u(x, t) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} (1 - e^{-|x|^2/(4t)}).$$

Ces solutions autosimilaires portent le nom de *tourbillons d'Oseen*. Le paramètre  $\alpha$ , qui représente la circulation du champ de vitesse à l'infini, est appel e *nombre de Reynolds de circulation*.

Le théorème de la variété centrale affirme que la famille des tourbillons d'Oseen est asymptotiquement stable pour les petits nombres de Reynolds [10], [7]. Plus précisément, si  $w \in C^0([0, \infty), L^2(m))$  est une solution de (14) qui reste dans un petit voisinage de l'origine pour tous les temps, alors  $w(\tau)$  converge exponentiellement vers  $\alpha G$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , où  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi, 0) d\xi$ . En fait, la condition de petitesse sur  $w$  peut être totalement relaxée:

**Proposition 4.1** [9] *Soit  $w_0 \in L^2(m)$ , où  $m > 1$ , et soit  $w \in C^0([0, \infty), L^2(m))$  la solution de (14) de donnée initiale  $w_0$ . Alors*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|w(\tau) - \alpha G\|_m = 0 ,$$

où  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w_0(\xi) d\xi$ .

La preuve de ce résultat fait intervenir plusieurs idées nouvelles. On montre d'abord que la trajectoire  $\{w(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  est *relativement compacte* dans  $L^2(m)$ . Il suffit donc de vérifier que son ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega(w)$ , qui est constitué de fonctions régulières et à décroissance rapide, est en fait réduit au seul point d'équilibre  $\alpha G$ . Pour ce faire, on considère une première fonction de Lyapunov:

$$\Lambda_1(w) = \int_{\mathbb{R}^2} |w(\xi)| d\xi , \quad w \in L^2(m) .$$

A l'aide du principe du maximum, on vérifie aisément que  $\Lambda_1$  est strictement décroissante sous l'évolution définie par (14), sauf sur les solutions de signe constant. Par le principe de LaSalle, ceci implique que  $\Omega(w)$  est constitué de fonctions de signe constant. On peut donc, sans perte de généralité, se restreindre au cône invariant  $L^2(m)_+ = \{w \in L^2(m) \mid w \geq 0 \text{ p.p.}\}$ . On utilise alors une seconde fonction de Lyapunov

$$\Lambda_2(w) = \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) \log\left(\frac{w(\xi)}{G(\xi)}\right) d\xi , \quad w \in L^2(m)_+ , \quad m > 3 .$$

Cette quantité, bien connue en théorie cinétique, s'appelle *l'entropie relative* de la distribution  $w$  par rapport à la gaussienne  $G$ .<sup>1</sup> On vérifie que  $\Lambda_2$  est strictement décroissante sous l'évolution définie par (14), sauf sur la variété centrale  $W_c$ . Par le principe de LaSalle, il s'ensuit que  $\Omega(w) \subset W_c$ . Enfin, la conservation de la masse implique que  $\Omega(w) = \{\alpha G\}$ .

La proposition 4.1 montre en particulier que les tourbillons d'Oseen sont stables pour toutes les valeurs du nombre de Reynolds de circulation. Contrairement à ce qui se passe dans de nombreux écoulements, l'augmentation du nombre du Reynolds a un effet *stabilisateur* sur le tourbillon. Pour mettre cet effet en évidence, étudions l'équation (14) linéarisée autour du tourbillon  $\alpha G$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est fixé. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \mathcal{L}w - \alpha \Lambda w ,$$

où  $\mathcal{L}$  est donné par (15) et  $\Lambda$  est l'opérateur différentiel non local défini par

$$\Lambda w = v^G \cdot \nabla w + v \cdot \nabla G ,$$

---

<sup>1</sup>Je remercie J. Dolbeault et C. Villani de m'avoir suggéré d'utiliser cette fonctionnelle pour démontrer la proposition 4.1.

où  $v$  est le champ de vitesse associé à  $w$  par la loi de Biot-Savart. Le premier terme décrit le transport de la perturbation  $w$  par le champ  $v^G$ , et le second la déformation du tourbillon d'Oseen sous l'effet du champ de vitesse non symétrique créé par la perturbation. Concernant le spectre de  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$ , un résultat typique est le suivant:

**Proposition 4.2** *Soit  $m > 3$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$  dans  $L^2(m)$  vérifie*

$$\sigma_m(\mathcal{L} - \alpha\Lambda) \subset \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) \leq -1\right\}.$$

Pour montrer ce résultat, on observe d'abord que  $\Lambda$  est une perturbation relativement compacte de  $\mathcal{L}$  dans  $L^2(m)$ . Il s'ensuit que le spectre essentiel de  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$  ne dépend pas de  $\alpha$ , et coïncide donc avec le demi-plan  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) \leq \frac{1-m}{2}\}$  pour tout  $\alpha$ . Il reste à étudier les valeurs propres isolées de  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$ . Il est facile de vérifier que  $\Lambda G = 0$ , et que  $\Lambda F_i = 0$  pour  $i = 1, 2$ . Il s'ensuit que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$  admet 0 comme valeur propre simple et  $-1/2$  comme valeur propre double. Pour localiser les autres valeurs propres isolées, on se restreint au sous-espace spectral  $Q_1 L^2(m)$ . Par une étude à l'infini, on montre que les fonctions propres sont à décroissance rapide, et appartiennent à l'espace de Hilbert  $X$  défini par

$$X = \left\{w \in Q_1 L^2(m) \mid G^{-1/2}w \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\}, \quad (w_1, w_2)_X = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{G} w_1 w_2 \, d\xi.$$

Comme nous l'avons déjà observé, l'opérateur  $\mathcal{L}$  est auto-adjoint dans  $X$ , et son spectre est donné par  $\{-\frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$ . Or, un calcul direct montre que l'opérateur  $\Lambda$  est *antisymétrique* dans le même espace. Par un argument standard, basé sur le quotient de Rayleigh, on conclut que les parties réelles des valeurs propres de  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$  dans  $X$  sont contenues dans l'enveloppe convexe du spectre de  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire dans l'intervalle  $(-\infty, -1]$ .

Supposons que la vorticité initiale  $\omega_0 = w_0$  appartienne à  $L^2(m)$  pour un  $m > 2$ , et que la moyenne  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \, dx$  ne soit pas nulle. Alors, par une translation spatiale appropriée, on peut toujours annuler les moments d'ordre un  $\int_{\mathbb{R}^2} x_i \omega_0(x) \, dx$ ,  $i = 1, 2$ . Ceci revient à placer l'origine des coordonnées au centre de masse du tourbillon. Dans cette situation, il suit de la proposition 4.2 que la solution  $\omega(x, t)$  converge rapidement vers le tourbillon d'Oseen de paramètre  $\alpha$ :

**Corollaire 4.3** *Soit  $w_0 \in L^2(m)$ , où  $m > 3$ , et supposons que*

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} w_0(\xi) \, d\xi \neq 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \xi_i w_0(\xi) \, d\xi = 0, \quad i = 1, 2.$$

*Soit également  $w \in C^0([0, \infty), L^2(m))$  la solution de (14) de donnée initiale  $w_0$ . Alors  $\|w(\tau) - \alpha G\|_m = \mathcal{O}(e^{-\tau})$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .*

Sous ces hypothèses, et lorsque  $m$  est assez grand, le taux de convergence exact de la solution  $w(\tau)$  vers le vortex  $\alpha G$  est  $e^{-\mu\tau}$ , où  $-\mu$  est la plus grande des parties réelles des valeurs propres du linéarisé  $\mathcal{L} - \alpha\Lambda$  dans  $X$ . Cette quantité, qui dépend de  $\alpha$ , n'est pas connue explicitement, mais des calculs numériques suggèrent que  $\mu(\alpha)$  se comporte comme  $C\sqrt{|\alpha|}$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow \infty$  [17].

## References

- [1] H. Beirão da Veiga. Existence and asymptotic behavior for strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space. *Indiana Univ. Math. J.*, 36(1):149–166, 1987.
- [2] M. Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 128(4):329–358, 1994.
- [3] L. Brandolese. *Localisation, oscillations et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes*. Thèse de l’E.N.S. Cachan, 2001.
- [4] L. Brandolese. On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^n$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(2):125–130, 2001.
- [5] Marco Cannone. *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*. Diderot Editeur, Paris, 1995.
- [6] I. Gallagher, D. Iftimie, and F. Planchon. On stability of global solutions to the Navier-Stokes equations. Preprint, 2002.
- [7] Th. Gallay and C.E. Wayne. Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on  $\mathbb{R}^2$ . To appear in *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2002.
- [8] Th. Gallay and C.E. Wayne. Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on  $\mathbb{R}^3$ . To appear in the *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 2002.
- [9] Th. Gallay and C.E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. In preparation.
- [10] Y. Giga, T. Miyakawa, and H. Osada. Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 104(3):223–250, 1988.
- [11] R. Kajikiya and T. Miyakawa. On  $L^2$  decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^n$ . *Math. Z.*, 192(1):135–148, 1986.
- [12] T. Kato. Strong  $L^p$ -solutions of the Navier-Stokes equation in  $\mathbb{R}^m$ , with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4):471–480, 1984.
- [13] T. Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in  $\mathbb{R}^2$  with a measure as the initial vorticity. *Differential Integral Equations*, 7(3-4):949–966, 1994.
- [14] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux remplissant l’espace. *Acta Mathematica*, 63:193–248, 1934.
- [15] K. Masuda. Weak solutions of Navier-Stokes equations. *Tohoku Math. J. (2)*, 36(4):623–646, 1984.

- [16] T. Miyakawa and M. Schonbek. On optimal decay rates for weak solutions to the Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^n$ . In *Proceedings of Partial Differential Equations and Applications (Olomouc, 1999)*, volume 126, pages 443–455, 2001.
- [17] A. Prochazka and D. Pullin. On the two-dimensional stability of the axisymmetric burgers vortex. *Phys. Fluids*, 7:1788–1790, 1995.
- [18] M. Schonbek.  $L^2$  decay for weak solutions of the Navier- Stokes equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 88(3):209–222, 1985.
- [19] M. Schonbek. Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Stokes equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3):423–449, 1991.
- [20] M. Schonbek. On decay of solutions to the Navier-Stokes equations. In *Applied nonlinear analysis*, pages 505–512. Kluwer/Plenum, New York, 1999.
- [21] M. Wiegner. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on  $\mathbb{R}^n$ . *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 35:303–313, 1987.