

## ESTIMATIONS PSEUDO-SPECTRALES ET STABILITÉ DES TOURBILLONS PLANS

[d'après Te Li, Dongyi Wei, et Zhifei Zhang]

par **Thierry Gallay**

### INTRODUCTION

L'étude mathématique de la stabilité des écoulements hydrodynamiques, qui a débuté vers le milieu du dix-neuvième siècle, connaît actuellement une activité foisonnante en lien avec les développements récents de la théorie spectrale et de l'analyse des opérateurs. En raison de la structure même des équations de la mécanique des fluides, où les phénomènes de transport jouent un rôle essentiel, les opérateurs linéaires rencontrés dans ce cadre ne sont jamais auto-adjoints. Il ne suffit donc pas de déterminer leur spectre pour connaître leurs propriétés principales, et ce constat a précisément motivé l'introduction de la notion de *pseudo-spectre* (TREFETHEN et EMBREE, 2005). Dans cet exposé, on considère des situations relativement simples, mais pertinentes pour de nombreuses applications, où l'opérateur linéarisé se décompose en une partie auto-adjointe négative, qui provient de la diffusion, et une partie antisymétrique due au transport. On introduit dans ce contexte les notions naturelles de *dissipation accélérée* et de *seuil de stabilité*, qui font l'objet de plusieurs travaux récents (BEDROSSIAN et COTI ZELATI, 2017; BEDROSSIAN, MASMOUDI et VICOL, 2016; BEDROSSIAN, VICOL et WANG, 2018; COTI ZELATI, ELGINDI et WIDMAYER, 2019; MASMOUDI et ZHAO, 2019; WEI, ZHANG et ZHAO, 2017). On étudie ensuite le cas particulier des tourbillons plans, où les premiers résultats de stabilité non linéaire exploitant l'effet de la rotation ont été obtenus tout dernièrement grâce aux estimations pseudo-spectrales très précises établies à cette fin par LI, WEI et ZHANG (2017).

### 1. TRANSPORT ET DIFFUSION

Le but de cette section est d'introduire, dans un cadre un peu général, les notions de « dissipation accélérée » et de « seuil de stabilité », ou seuil de transition, qui apparaissent naturellement dans l'étude de la stabilité de nombreux écoulements visqueux. Pour fixer les idées, on commence par présenter un exemple particulièrement simple.

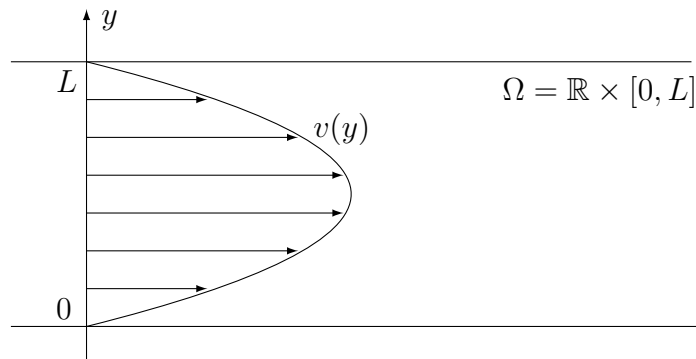
*Exemple 1.1* (Scalaire passif). — On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans un canal bidimensionnel représenté par le domaine  $\Omega = \mathbb{R} \times [0, L]$ . On suppose que la vitesse  $V$  du fluide est parallèle aux parois et ne dépend que de la variable transverse :

$$(1) \quad V(x, y) = \begin{pmatrix} v(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Un tel écoulement est solution des équations d'Euler quel que soit le profil de vitesse  $v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , et des équations de Navier–Stokes dans le cas particulier du profil de Poiseuille  $v(y) = y(L - y)$ . Supposons à présent que l'on insère dans le fluide une goutte de colorant ou une pincée de particules très légères, qui ne perturbent pas sensiblement l'écoulement initial. Ces particules sont alors entraînées par le courant, et subissent en outre des collisions fréquentes avec les molécules du fluide qui produisent un mouvement désordonné de type brownien. Il s'ensuit que la densité  $f(x, y, t)$  des particules convoyées par le fluide est solution de l'équation de transport-diffusion

$$(2) \quad \partial_t f(x, y, t) + v(y)\partial_x f(x, y, t) = \varepsilon \Delta f(x, y, t),$$

où  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  est l'opérateur de Laplace et  $\varepsilon > 0$  est une constante de diffusion, que l'on supposera petite dans la suite. Il convient de compléter l'équation (2) par des conditions au bord, et on supposera ici pour simplifier que  $f(x, 0, t) = f(x, L, t) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \geq 0$ .



Considérons isolément, l'opérateur de transport  $v(y)\partial_x$  dans l'équation (2) ne fait que redistribuer les valeurs de la solution  $f(x, y, t)$  ; mais combiné avec la diffusion, il influence fortement le comportement du système pour les grands temps. En effet, si le profil de vitesse n'est pas constant, le transport le long des caractéristiques crée de forts gradients dans la direction transverse à l'écoulement, associés à une « filamentation » du support de la distribution des particules, et ceci renforce considérablement l'action de la diffusion, tout particulièrement lorsque la constante  $\varepsilon$  est petite. Cette interaction entre transport et diffusion est déjà mentionnée et étudiée dans les travaux historiques de RAYLEIGH (1879/80), KELVIN (1887), et ORR (1907).

On introduit à présent un problème abstrait dont la structure est directement inspirée par l'exemple 1.1, voir aussi CONSTANTIN, KISELEV, RYZHIK et ZLATOŠ (2008). Dans

un espace de Hilbert  $H$ , on considère l'équation d'évolution

$$(3) \quad \partial_t f + \Lambda f = \varepsilon Lf + N(f),$$

où  $L, \Lambda$  sont des opérateurs linéaires (non bornés),  $N$  est une application non linéaire, et  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre. Nos hypothèses principales sont les suivantes :

- $L : D(L) \rightarrow H$  est auto-adjoint et négatif :  $L = L^* \leq 0$  ;
- $\Lambda : D(\Lambda) \rightarrow H$  est antisymétrique, et relativement borné par rapport à  $L$  ;
- l'application  $f \mapsto N(f)$  est quadratique au voisinage de l'origine.

On rappelle que l'opérateur  $\Lambda$  est relativement borné par rapport à  $L$  si son domaine de définition  $D(\Lambda)$  contient celui de  $L$ , et si  $\|\Lambda f\| \leq C(\|Lf\| + \|f\|)$  pour tout  $f \in D(L)$ . Notre but est de montrer que, pour toute donnée initiale  $f_0 \in H$  suffisamment petite, l'équation (3) possède une solution globale unique qui reste dans un voisinage de l'origine pour tous les temps et converge vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ . On cherche notamment à quantifier la taille du bassin d'attraction de l'origine ainsi que le taux de décroissance des solutions en fonction du paramètre de diffusion  $\varepsilon$ , dans la limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Remarque 1.2.* — Bien évidemment, l'exemple 1.1 entre dans le cadre ci-dessus si on prend  $H = L^2(\Omega)$ ,  $L = \Delta$ ,  $\Lambda = v(y)\partial_x$ , et  $N = 0$ . Plus généralement, si on perturbe l'écoulement (1) en tant que solution stationnaire des équations de Navier–Stokes dans un domaine sans bord, on obtient une équation d'évolution de la forme (3), où  $\varepsilon > 0$  est la viscosité cinématique du fluide et où l'opérateur  $\Lambda$  est à présent non local, en raison de la pression. Un exemple célèbre est le flot de Kolmogorov sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , présenté dans l'exemple 1.3 ci-dessous. Le cadre (3) s'applique également à l'étude de la stabilité des tourbillons de Lamb–Oseen, qui sera discutée en détail à la section 2. A contrario, lorsqu'on perturbe l'écoulement de Poiseuille dans le domaine  $\Omega = \mathbb{R} \times [0, L]$  en supposant, comme il se doit, que la vitesse du fluide s'annule sur les parois, on génère des instabilités hydrodynamiques dans la limite où le nombre de Reynolds  $\text{Re} = 1/\varepsilon$  tend vers l'infini (GRENIER, GUO et NGUYEN, 2016a,b). De telles instabilités n'apparaissent pas dans le modèle (3), quels que soient les choix des opérateurs  $L$  et  $\Lambda$ , et doivent donc être étudiées par d'autres approches.

*Exemple 1.3* (Flot de Kolmogorov). — On considère les équations de Navier–Stokes incompressibles sur le tore  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$  :

$$(4) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p + F, \quad \text{div } u = 0,$$

où  $u : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est le champ de vitesse du fluide,  $p : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression, et  $F$  est une force extérieure. La densité du fluide étant supposée égale à 1, l'unique paramètre est la viscosité cinématique  $\nu > 0$ , que l'on supposera petite. Le système (4) admet une solution stationnaire de la forme

$$\bar{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2,$$

pour autant que le terme de force soit donné par  $F = \nu \bar{u}$ . Pour étudier la stabilité de cet écoulement, on pose  $u = \bar{u} + \tilde{u}$  et on observe que la perturbation  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  vérifie l'équation

$$(5) \quad \partial_t \tilde{u} + \sin y \partial_x \tilde{u} + \cos y \tilde{u}_2 e_x + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} = \nu \Delta \tilde{u} - \nabla p, \quad \operatorname{div} \tilde{u} = 0,$$

où  $e_x = (1, 0)$ . Afin de se ramener à un système de la forme (3), il convient d'éliminer la pression dans (5), laquelle sert à garantir la condition d'incompressibilité. En l'absence de bords, une approche efficace consiste à étudier le *tourbillon* du fluide défini par  $\tilde{\omega} = \partial_x \tilde{u}_2 - \partial_y \tilde{u}_1$ . Cette quantité vérifie l'équation scalaire

$$\partial_t \tilde{\omega} + \sin y (\partial_x \tilde{\omega} + \tilde{u}_2) + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\omega} = \nu \Delta \tilde{\omega},$$

où le champ de vitesse  $\tilde{u}$  doit être exprimé en termes du tourbillon en résolvant le système elliptique  $\partial_x \tilde{u}_1 + \partial_y \tilde{u}_2 = 0$ ,  $\partial_x \tilde{u}_2 - \partial_y \tilde{u}_1 = \tilde{\omega}$ . Si on suppose que le champ de vitesse est à moyenne nulle sur  $\mathbb{T}^2$ , une condition préservée par l'équation (5), on trouve que  $\tilde{u} = \nabla^\perp \tilde{\psi} := (-\partial_y \tilde{\psi}, \partial_x \tilde{\psi})$  où  $\Delta \tilde{\psi} = \tilde{\omega}$ . On obtient ainsi l'équation d'évolution

$$\partial_t \tilde{\omega} + \sin y \partial_x (1 + \Delta^{-1}) \tilde{\omega} + (\nabla^\perp \Delta^{-1} \tilde{\omega}) \cdot \nabla \tilde{\omega} = \nu \Delta \tilde{\omega},$$

qui est de la forme (3) avec  $\varepsilon = \nu$  et

$$L = \Delta, \quad \Lambda = \sin y \partial_x (1 + \Delta^{-1}), \quad N(\tilde{\omega}) = -(\nabla^\perp \Delta^{-1} \tilde{\omega}) \cdot \nabla \tilde{\omega}.$$

Dans l'espace  $H$  des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{T}^2$  à moyenne nulle, l'opérateur  $L$  est clairement auto-adjoint et négatif, mais  $\Lambda$  n'est pas antisymétrique en raison du terme non local  $1 + \Delta^{-1}$ , qui ne commute pas avec  $\sin y$ . On remarque toutefois que l'opérateur  $\Lambda$  possède un noyau de dimension infinie, constitué de toutes les fonctions indépendantes de  $x$  d'une part, et du sous-espace engendré par  $\{\sin x, \cos x\}$  d'autre part. Comme l'effet du transport est évidemment nul sur  $\ker(\Lambda)$ , il est naturel pour l'étude du problème linéarisé de se restreindre au sous-espace invariant  $H_\perp = \ker(\Lambda)^\perp$ . Muni du produit scalaire non local

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \omega_1 (1 + \Delta^{-1}) \overline{\omega_2} \, dx \, dy,$$

ce sous-espace  $H_\perp$  devient un espace de Hilbert où l'opérateur  $L$  est encore auto-adjoint, et  $\Lambda$  est à présent antisymétrique.

*Remarque 1.4.* — Le terme de force  $F = \nu \bar{u}$  qui stabilise le flot de Kolmogorov est tout à fait artificiel. Si  $F = 0$ , la solution de (5) avec donnée initiale  $\bar{u}$  est donnée par  $u(x, y, t) = (\sin y, 0) e^{-\nu t}$ , et dépend donc (lentement) du temps ce qui complique l'étude de sa stabilité (BECK et WAYNE, 2013; IBRAHIM, MAEKAWA et MASMOUDI, 2017; WEI et ZHANG, 2019; WEI, ZHANG et ZHAO, 2017).

### 1.1. Estimations linéaires

Étudions pour commencer les propriétés du système (3) lorsque  $N = 0$ . Par le théorème de Hille–Yosida (PAZY, 1983), l’opérateur auto-adjoint  $L : D(L) \rightarrow H$  est le générateur d’un semi-groupe  $C_0$  d’opérateurs linéaires bornés dans  $H$ , vérifiant la propriété de contraction

$$\|e^{\tau L} f_0\| \leq \|f_0\|, \quad \text{pour tout } \tau \geq 0.$$

De même, si on suppose que l’opérateur  $\Lambda : D(\Lambda) \rightarrow H$  est anti-adjoint, le théorème de Stone (REED et SIMON, 1972) affirme que cet opérateur engendre un groupe unitaire dans  $H$  :

$$\|e^{t\Lambda} f_0\| = \|f_0\|, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas très particulier où les opérateurs  $L$  et  $\Lambda$  commutent, la solution de (3) avec  $N = 0$  est donnée par la formule explicite

$$f(t) = e^{-t\Lambda} e^{\varepsilon t L} f_0 = e^{\varepsilon t L} e^{-t\Lambda} f_0, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

où  $f_0 \in H$  est la donnée initiale. En particulier l’égalité  $\|f(t)\| = \|e^{\varepsilon t L} f_0\|$  montre que le transport n’a ici aucune influence sur la norme de la solution, laquelle évolue sur une échelle de temps diffusive proportionnelle à  $1/\varepsilon$ .

*Remarque 1.5.* — Lorsque  $L$  et  $\Lambda$  commutent, le transport peut néanmoins influencer le comportement de la solution de (3), mesurée dans d’autres normes, en raison des propriétés *dispersives* du groupe unitaire  $e^{t\Lambda}$ . Ces propriétés jouent évidemment un rôle essentiel dans l’étude du cas non visqueux où  $\varepsilon = 0$ . Pour certains écoulements simples, comme les perturbations du flot de Couette, elles permettent même d’obtenir un résultat de stabilité non linéaire dans des espaces de fonctions très régulières (BEDROSSIAN et MASMOUDI, 2015). Un exemple où apparaît naturellement un opérateur antisymétrique qui commute avec la diffusion, au moins dans des situations géométriques simples, est celui des fluides géophysiques (CHEMIN, DESJARDINS, GALLAGHER et GRENIER, 2006). Ici l’opérateur  $\Lambda$  représente la force de Coriolis due à la rotation de la Terre, et le paramètre  $\varepsilon$  est le nombre de Rossby, inversement proportionnel à la fréquence de rotation. Dans ce contexte, il est naturel de poser  $\tau = \varepsilon t$  et de remarquer que la quantité  $g(\tau) = \varepsilon^{-1} f(\tau/\varepsilon)$  vérifie l’équation mise à l’échelle

$$(6) \quad \partial_\tau g + \frac{1}{\varepsilon} \Lambda g = Lg + N_\varepsilon(g), \quad \text{où } N_\varepsilon(g) = \varepsilon^{-2} N(\varepsilon g),$$

qui met clairement en évidence l’importance du terme de rotation dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On se place désormais dans le cas général où les opérateurs  $L$  et  $\Lambda$  ne commutent pas. On remarque que l’opérateur  $\varepsilon L - \Lambda : D(L) \rightarrow H$  est dissipatif, car

$$\operatorname{Re}\langle (\varepsilon L - \Lambda)f, f \rangle = \varepsilon \operatorname{Re}\langle Lf, f \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } f \in D(L).$$

On suppose que  $\varepsilon L - \Lambda$  est également  $m$ -dissipatif, c’est-à-dire que  $\lambda - \varepsilon L + \Lambda$  est inversible pour un (et donc pour tout)  $\lambda > 0$ . Cette condition est automatiquement remplie si, par exemple,  $\Lambda$  est relativement compact par rapport à  $L$ . Le théorème de

Lumer–Phillips (PAZY, 1983) affirme alors que l’opérateur  $\varepsilon L - \Lambda$  est le générateur d’un semi-groupe  $C_0$  de contractions dans  $H$ , que l’on notera  $S_\varepsilon(t)$  :

$$(7) \quad \|S_\varepsilon(t)f_0\| = \|e^{t(\varepsilon L - \Lambda)}f_0\| \leq \|f_0\|, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Cette inégalité implique en particulier que le terme de transport ne peut pas engendrer d’instabilité linéaire sous nos hypothèses.

Quoique instructive, l’estimation (7) n’est souvent pas optimale. En effet, dans de nombreux exemples, l’interaction entre la diffusion  $L$  et le transport  $\Lambda$  induit une *dissipation accélérée*, qui se traduit par une estimation améliorée de la forme

$$(8) \quad \|S_\varepsilon(t)f_0\| = \|e^{t(\varepsilon L - \Lambda)}f_0\| \leq C_\varepsilon e^{-\gamma_\varepsilon t} \|f_0\|, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

où  $\gamma_\varepsilon > 0$  et  $C_\varepsilon \geq 1$ . La valeur des constantes  $\gamma_\varepsilon$  et  $C_\varepsilon$  varie d’un exemple à l’autre, mais dans les applications à la mécanique des fluides on a souvent  $\gamma_\varepsilon \approx \varepsilon^\alpha$  et  $C_\varepsilon \approx \varepsilon^{-\beta}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , avec  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta \geq 0$ . Dans ce cas, l’estimation (8) montre que les solutions sont atténuées par l’évolution linéaire en un temps  $t_\varepsilon \approx \varepsilon^{-\alpha}$ , beaucoup plus court que le temps diffusif qui est, lui, proportionnel à  $\varepsilon^{-1}$ .

*Exemple 1.6.* — Supposons que  $H = L^2(\mathbb{R})$ ,  $L = \partial_x^2$ , et  $\Lambda = iX$  où  $X$  désigne l’opérateur de multiplication :  $(Xf)(x) = xf(x)$ . En appliquant à l’équation d’évolution  $\partial_t f + \Lambda f = \varepsilon Lf$  la transformation de Fourier définie par

$$\hat{f}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R},$$

on obtient l’équation plus simple  $\partial_t \hat{f} - \partial_k \hat{f} = -\varepsilon k^2 \hat{f}$ , qui se résout explicitement :

$$\hat{f}(k, t) = \hat{f}_0(k + t) \exp\left(-\varepsilon \int_0^t (k + s)^2 ds\right), \quad t \geq 0.$$

Comme  $\int_0^t (k + s)^2 ds = k^2 t + kt^2 + t^3/3 \geq t^3/12$ , on voit en particulier que

$$(9) \quad \|f(t)\| = \|e^{t(\varepsilon L - \Lambda)}f_0\| \leq e^{-\varepsilon t^3/12} \|f_0\|, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

ce qui implique l’estimation (8) avec, par exemple,  $\gamma_\varepsilon = \varepsilon^{1/3}/3$  et  $C = 2$ . L’opérateur  $\partial_x^2 - iX$  considéré ici apparaît dans l’étude de la stabilité de l’écoulement de Couette (BEDROSSIAN, MASMOUDI et VICOL, 2016). Son spectre est vide, comme le montre la décroissance exceptionnellement rapide du membre de droite de (9) lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Noter que, dans cet exemple tout à fait particulier, l’opérateur  $\Lambda$  n’est pas relativement borné par rapport à  $L$ .

## 1.2. Estimations non linéaires et bassin d’attraction

Examinons à présent les conséquences des estimations (7), (8) sur les solutions de l’équation non linéaire (3), dans un voisinage de l’origine. On suppose ici, pour simplifier, que la non-linéarité  $N$  dans (3), définie sur  $H$  tout entier, est localement lipschitzienne et vérifie l’estimation quadratique

$$(10) \quad \|N(f)\| \leq C_N \|f\|^2, \quad \text{pour tout } f \in H.$$

Une telle hypothèse n'est pas réaliste en vue des applications à la mécanique des fluides, où les termes non linéaires contiennent des dérivées, mais cette simplification n'altère pas les phénomènes que nous voulons mettre en évidence.

**PROPOSITION 1.7** (Stabilité locale). — *On suppose que le semi-groupe  $e^{t(\varepsilon L - \Lambda)}$  vérifie les bornes (7), (8) et la non-linéarité  $N$  l'estimation (10). Alors il existe une constante  $K > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et pour toute donnée initiale  $f_0 \in H$  telle que*

$$(11) \quad \|f_0\| \leq \frac{K\gamma_\varepsilon}{1 + \ln C_\varepsilon},$$

*l'équation (3) possède une solution globale unique  $f$  dans  $C^0([0, +\infty[, H)$  et qui vérifie  $f(0) = f_0$ . En outre*

$$(12) \quad \|f(t)\| \leq 6 \|f_0\| \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon t}{1 + \ln C_\varepsilon}\right), \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

*Démonstration.* — On se contente ici d'établir les inégalités (11) et (12). On rappelle tout d'abord que la solution de (3) avec donnée initiale  $f_0 \in H$  vérifie l'équation intégrale

$$f(t) = S_\varepsilon(t)f_0 + \int_0^t S_\varepsilon(t-s)N(f(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

où  $S_\varepsilon(t) = e^{t(\varepsilon L - \Lambda)}$ , voir par exemple (PAZY, 1983, Section 6.1). En combinant (7) et (8), on obtient la majoration suivante de la norme du semi-groupe  $S_\varepsilon(t)$ :

$$\|S_\varepsilon(t)\| \leq \min(1, C_\varepsilon e^{-\gamma_\varepsilon t}) \leq e^{1-\delta_\varepsilon t} =: h_\varepsilon(t), \quad \text{où } \delta_\varepsilon = \frac{\gamma_\varepsilon}{1 + \ln C_\varepsilon}.$$

En effet, si  $t \leq t_* := (\ln C_\varepsilon)/\gamma_\varepsilon$ , alors  $\min(1, C_\varepsilon e^{-\gamma_\varepsilon t}) = 1 \leq e^{1-\delta_\varepsilon t}$  car  $\delta_\varepsilon t_* \leq 1$ ; si  $t \geq t_*$ , alors

$$\min(1, C_\varepsilon e^{-\gamma_\varepsilon t}) = e^{-\gamma_\varepsilon(t-t_*)} \leq e^{-\delta_\varepsilon(t-t_*)} \leq e^{1-\delta_\varepsilon t}.$$

En appliquant ces estimations au membre de droite de l'équation intégrale, on obtient donc la majoration

$$(13) \quad \|f(t)\| \leq h_\varepsilon(t)\|f_0\| + C_N \int_0^t h_\varepsilon(t-s)\|f(s)\|^2 ds, \quad t \geq 0.$$

Soit  $T = T(\varepsilon, f_0)$  la borne supérieure de l'ensemble des temps  $t \geq 0$  pour lesquels la solution de (3) avec donnée initiale  $f_0$  vérifie  $\|f(s)\| \leq 2\|f_0\|h_\varepsilon(s)$  pour tout  $s \in [0, t]$ . Si  $t < T$ , on a par (13):

$$\|f(t)\| \leq h_\varepsilon(t)\|f_0\| + 4C_N\|f_0\|^2 \int_0^t h_\varepsilon(t-s)h_\varepsilon(s)^2 ds \leq h_\varepsilon(t)\|f_0\| \left(1 + \frac{\|f_0\|}{K\delta_\varepsilon}\right),$$

où  $K^{-1} = 4C_N \exp(2)$ . Ainsi, si  $\|f_0\| \leq K\delta_\varepsilon$ , ce qui est l'hypothèse (11), on a  $T = +\infty$  et la solution de (3) vérifie donc  $\|f(t)\| \leq 2\|f_0\|h_\varepsilon(t)$  pour tout  $t \geq 0$ , ce qui implique (12) au vu de la définition de  $h_\varepsilon(t)$ .  $\square$

La proposition 1.7 met clairement en évidence les phénomènes importants que l'on peut observer sur l'équation non linéaire (3), et qui découlent de l'estimation de dissipation accélérée (8). D'une part, dans un voisinage de l'origine, les solutions sont atténuées sur une échelle de temps de l'ordre de  $1/\gamma_\varepsilon$  (à une perte logarithmique près), c'est-à-dire bien avant le temps diffusif proportionnel à  $1/\varepsilon$ . D'autre part, la taille du « bassin d'attraction de l'origine », c'est-à-dire du domaine où l'on peut contrôler les solutions à l'aide de la décroissance de l'évolution linéarisée, est proportionnelle à  $\gamma_\varepsilon$  (à une perte logarithmique près), et tend donc vers zéro beaucoup moins vite que la taille du bassin d'attraction en l'absence de transport, qui est au mieux proportionnelle à  $\varepsilon$ .

*Remarque 1.8.* — Les considérations ci-dessus sont pertinentes pour autant que  $\gamma_\varepsilon \gg \varepsilon$  et  $\ln C_\varepsilon \ll \gamma_\varepsilon/\varepsilon$ . Une estimation linéaire de la forme (8) où l'on ne disposerait pas d'une estimation explicite sur la constante  $C_\varepsilon$  ne serait pas exploitable dans le cadre non linéaire, car on ne pourrait alors exclure que  $\ln C_\varepsilon$  soit comparable ou supérieur à  $\gamma_\varepsilon/\varepsilon$ , ce qui détruirait tout l'intérêt de la proposition 1.7 au vu de (11), (12).

### 1.3. Obtention des estimations linéaires

On donne dans cette section un aperçu des méthodes qui permettent, au moins dans certains cas, d'établir une estimation de dissipation accélérée de la forme (8). Pour simplifier, on se place dans le cadre de l'exemple 1.1 ci-dessus. L'équation linéaire (2) étant invariante par translation dans la direction de l'écoulement, on applique une transformation de Fourier partielle en définissant

$$\hat{f}(k, y, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, t) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R}, y \in [0, L], t \geq 0.$$

Il est également commode d'éliminer la diffusion dans la direction de l'écoulement en posant

$$\hat{f}(k, y, t) = e^{-\varepsilon k^2 t} g(k, y, t), \quad k \in \mathbb{R}, y \in [0, L], t \geq 0.$$

La nouvelle fonction  $g(k, y, t)$  vérifie alors l'équation d'évolution à une dimension

$$(14) \quad \partial_t g(k, y, t) + ikv(y)g(k, y, t) = \varepsilon \partial_y^2 g(k, y, t), \quad y \in [0, L],$$

ainsi que les conditions de Dirichlet homogènes  $g(k, 0, t) = g(k, L, t) = 0$ . Dans l'équation (14), le nombre d'onde  $k \in \mathbb{R}$  est fixé, et il faut évidemment le supposer non nul pour observer l'effet du transport sur le comportement des solutions. Deux approches principales ont été développées à cette fin, et sont brièvement présentées dans les paragraphes suivants.

**1.3.1. Estimations pseudo-spectrales.** — L'idée est d'estimer la *résolvante* de l'opérateur  $P_{\varepsilon, k} = \varepsilon \partial_y^2 - ikv(y)$  sur l'axe imaginaire. En notant  $z = -ik\lambda$  le paramètre spectral, avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$P_{\varepsilon, k} - z = \varepsilon \partial_y^2 + ik(\lambda - v(y)).$$



Notons  $I = \{v(y) \mid y \in [0, L]\} \subset \mathbb{R}$  l'image de  $v$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus I$ , la fonction  $\lambda - v$  ne s'annule pas et on en déduit aisément l'estimation

$$(15) \quad \|(P_{\varepsilon,k} - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|k| \operatorname{dist}(\lambda, I)}.$$

Si  $\lambda \in I$ , il existe  $\bar{y} \in [0, L]$  tel que  $v(\bar{y}) = \lambda$ , et l'estimation de la résolvante dépend alors de l'ordre d'annulation de la différence  $v(y) - \lambda$  au point  $\bar{y}$ . On a le résultat ci-dessous, qui s'établit en utilisant les estimations sous-elliptiques développées par HÖRMANDER (2009, chapitre 27). Dans le contexte de l'analyse spectrale, on trouvera un énoncé beaucoup plus général dans l'article de DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004); voir aussi GALLAGHER, GALLAY et NIER (2009).

PROPOSITION 1.9. — *On suppose que  $v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière, et qu'il existe un entier minimal  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que les  $m$  dérivées  $v', v'', \dots, v^{(m)}$  ne s'annulent pas simultanément sur  $[0, L]$ . Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et tout  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $|k| \geq \varepsilon$ , on a l'estimation*

$$(16) \quad \sup_{z \in i\mathbb{R}} \|(P_{\varepsilon,k} - z)^{-1}\| \leq \frac{C}{\varepsilon^\alpha |k|^{1-\alpha}}, \quad \text{où } \alpha = \frac{m}{m+2}.$$

*Esquisse de démonstration.* — Indiquons comment on peut obtenir l'estimation (16) dans le cas particulier où la fonction  $v$  est strictement monotone, avec (par exemple)  $v'(y) > 0$  pour tout  $y \in [0, L]$ . Dans cette situation, on a  $m = 1$ , et donc  $\alpha = 1/3$ . Pour tout  $\lambda \in I$ , on souhaite estimer l'inverse de l'opérateur  $P_{\varepsilon,k} - z$  où  $z = -ik\lambda$ . Notons pour simplifier

$$H_\varepsilon = z - P_{\varepsilon,k} = -\varepsilon \partial_y^2 + ih(y), \quad \text{où } h(y) = k(v(y) - \lambda).$$

Par hypothèse, il existe un unique  $\bar{y} \in [0, L]$  tel que  $h(\bar{y}) = 0$ , et si on suppose (sans perte de généralité) que  $k > 0$  on a  $A := h'(\bar{y}) = kv'(\bar{y}) > 0$ . Pour fixer les idées, on se concentre ici sur le cas « générique » où  $\bar{y} \in ]0, L[$ , mais des arguments similaires permettent de traiter également le cas où  $h$  s'annule sur le bord de l'intervalle  $[0, L]$ .

Si  $g \in D(H_\varepsilon)$ , on a une première estimation évidente :

$$(17) \quad \varepsilon \|g'\|^2 = \operatorname{Re} \langle H_\varepsilon g, g \rangle \leq \|H_\varepsilon g\| \|g\|.$$

D'autre part, on définit  $\delta = (\varepsilon/A)^{1/3}$ , et on suppose que  $\varepsilon$  est suffisamment petit pour que  $[\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta] \subset ]0, L[$  et  $|h(y)| \geq A\delta/2$  lorsque  $|y - \bar{y}| \geq \delta$ . On introduit aussi la « fonction signe régularisée » à l'échelle  $\delta$  :

$$\chi_\delta(y) = \chi\left(\frac{y - \bar{y}}{\delta}\right),$$

où  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$  est une fonction impaire, croissante, telle que  $\chi(x) = 1$  pour  $x \geq 1$ . Comme  $\operatorname{Im} \langle H_\varepsilon g, g \chi_\delta \rangle = \varepsilon \operatorname{Im} \langle g', g \chi'_\delta \rangle + \langle gh, g \chi_\delta \rangle$  et  $|\langle g', g \chi'_\delta \rangle| \leq C\delta^{-1} \|g'\| \|g\|$  où  $C = \|\chi'\|_{L^\infty}$ , on a également

$$(18) \quad \langle gh \chi_\delta, g \rangle \leq \operatorname{Im} \langle H_\varepsilon g, g \chi_\delta \rangle + \frac{C\varepsilon}{\delta} \|g'\| \|g\| \leq \|H_\varepsilon g\| \|g\| + \frac{C\varepsilon}{\delta} \|g'\| \|g\|.$$

Il suffit à présent de combiner convenablement les bornes (17), (18) pour obtenir l'estimation désirée. Par construction, la fonction  $h_{\chi_\delta}$  est positive, et supérieure à  $A\delta/2$  lorsque  $|y - \bar{y}| \geq \delta$ . Ainsi, on déduit de (18) et de l'inégalité de Young que

$$\begin{aligned}
 \int_{|y-\bar{y}| \geq \delta} |g(y)|^2 dy &\leq \frac{2}{A\delta} \|H_\varepsilon g\| \|g\| + \frac{2C\varepsilon}{A\delta^2} \|g'\| \|g\| \\
 (19) \qquad \qquad \qquad &\leq \frac{2}{A\delta} \|H_\varepsilon g\| \|g\| + \frac{3C^2\varepsilon^2}{A^2\delta^4} \|g'\|^2 + \frac{1}{3} \|g\|^2 \\
 &\leq \frac{2+3C^2}{A\delta} \|H_\varepsilon g\| \|g\| + \frac{1}{3} \|g\|^2,
 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant (17) et la définition de  $\delta$ . D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \int_{|y-\bar{y}| \leq \delta} |g(y)|^2 dy &\leq 2\delta \|g\|_{L^\infty}^2 \leq 2\delta \|g'\| \|g\| \leq 3\delta^2 \|g'\|^2 + \frac{1}{3} \|g\|^2 \\
 (20) \qquad \qquad \qquad &\leq \frac{3\delta^2}{\varepsilon} \|H_\varepsilon g\| \|g\| + \frac{1}{3} \|g\|^2 = \frac{3}{A\delta} \|H_\varepsilon g\| \|g\| + \frac{1}{3} \|g\|^2.
 \end{aligned}$$

En additionnant (19) et (20), on obtient la minoration

$$\|(P_{\varepsilon,k} - z)g\| = \|H_\varepsilon g\| \geq \frac{A\delta}{c} \|g\|, \quad \text{pour tout } g \in D(P_{\varepsilon,k}),$$

où  $c = 15 + 9C^2$ , laquelle implique l'estimation résolvante (16) avec  $\alpha = 1/3$ .  $\square$

*Remarque 1.10.* — Lorsque la fonction  $v(y) - \lambda$  possède un zéro d'ordre  $m \geq 2$  au point  $\bar{y}$ , on procède de façon similaire en posant  $\delta = (\varepsilon/A)^{1-\alpha}$ , où  $A = |k| |v^{(m)}(\bar{y})|$  et  $\alpha$  est défini dans (16). On obtient une minoration de la forme  $\|(P_{\varepsilon,k} - z)g\| \geq c\varepsilon^\alpha A^{1-\alpha} \|g\|$ , qui donne le résultat voulu. Dans le cas général où la fonction  $v(y) - \lambda$  possède plusieurs zéros dans l'intervalle  $[0, L]$ , on se ramène au cas d'un zéro unique à l'aide d'une partition de l'unité, voir par exemple GALLAGHER, GALLAY et NIER (2009).

Une fois que l'on a obtenu pour la résolvante une borne de la forme

$$(21) \qquad \sup_{z \in i\mathbb{R}} \|(P_{\varepsilon,k} - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{2\gamma_\varepsilon}, \quad \text{avec } \gamma_\varepsilon \approx \varepsilon^\alpha |k|^{1-\alpha},$$

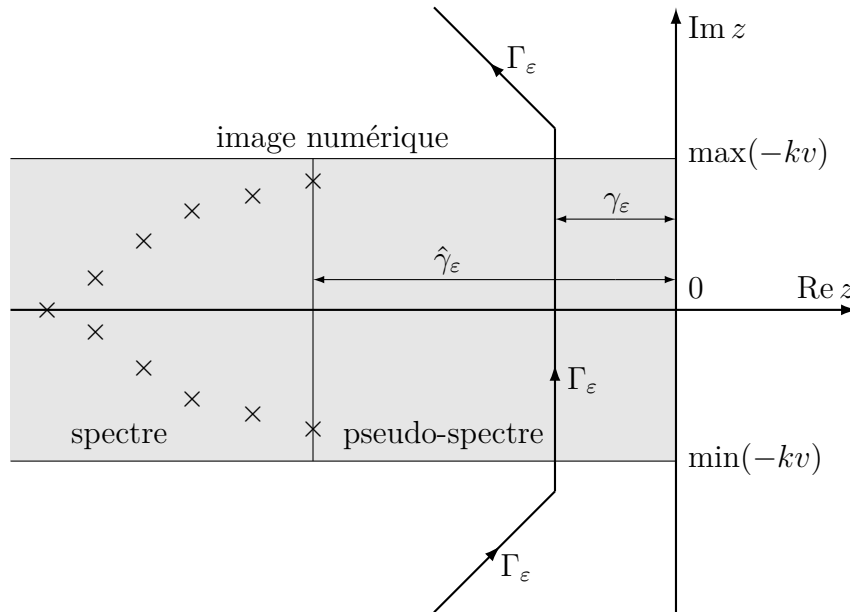
on en déduit une estimation sur le semi-groupe  $e^{tP_{\varepsilon,k}}$  grâce à la formule de Dunford

$$(22) \qquad e^{tP_{\varepsilon,k}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} (z - P_{\varepsilon,k})^{-1} e^{zt} dz, \quad t > 0,$$

où  $\Gamma_\varepsilon$  est le contour d'intégration représenté ci-dessous. Sur le segment vertical du contour  $\Gamma_\varepsilon$ , on a  $\operatorname{Re} z = -\gamma_\varepsilon$ , de sorte que  $\|(P_{\varepsilon,k} - z)^{-1}\| \leq \gamma_\varepsilon^{-1}$  au vu de (21). Sur les deux segments obliques de  $\Gamma_\varepsilon$ , on a  $\operatorname{Re} z \leq -\gamma_\varepsilon$  et la résolvante peut être aisément contrôlée en utilisant (15). On en déduit une estimation de la forme

$$\|e^{tP_{\varepsilon,k}}\| \leq C \left(1 + \frac{|k|}{\gamma_\varepsilon}\right) e^{-\gamma_\varepsilon t} \leq C \frac{|k|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} e^{-\gamma_\varepsilon t}, \quad t > 0,$$

valable si  $0 < \varepsilon \leq \min(1, |k|)$  et  $|k|t \geq 1$ ; voir GALLAY (2018) pour une analyse détaillée.



La région ombrée représente l'image numérique de l'opérateur  $P_{\varepsilon,k}$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\{(P_{\varepsilon,k}g, g) \in \mathbb{C} \mid g \in D(P_{\varepsilon,k}), \|g\| = 1\}$ . Celle-ci contient le spectre de  $P_{\varepsilon,k}$ , qui est purement discret car  $P_{\varepsilon,k}^{-1}$  est un opérateur compact. Les valeurs propres de  $P_{\varepsilon,k}$  sont représentées ici, de façon approximative, par des croix. Entre le spectre et l'axe imaginaire, la résolvante de  $P_{\varepsilon,k}$  est bien définie, mais sa norme peut croître très rapidement lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (pseudo-spectre semi-classique). Le contour d'intégration  $\Gamma_\varepsilon$  doit entourer le spectre, et éviter aussi le pseudo-spectre si l'on souhaite obtenir un contrôle explicite de la norme du semi-groupe  $e^{tP_{\varepsilon,k}}$ .

*Remarque 1.11.* — L'estimation (21) ne fournit aucun contrôle sur la résolvante dans le demi-plan  $\{\operatorname{Re} z \leq -2\gamma_\varepsilon\}$ , et on s'attend donc à trouver du spectre dans cette région. Toutefois, si on suppose que le profil de vitesse  $v$  est analytique, on peut montrer dans cet exemple que le spectre de l'opérateur  $P_{\varepsilon,k}$  se situe en fait plus loin à gauche dans le plan complexe, c'est-à-dire dans un demi-plan de la forme  $\{\operatorname{Re} z \leq -\hat{\gamma}_\varepsilon\}$  où  $\hat{\gamma}_\varepsilon \approx \varepsilon^\beta$  avec  $0 < \beta < \alpha$  (GALLAGHER, GALLAY et NIER, 2009). Dans la région intermédiaire où  $-\hat{\gamma}_\varepsilon < \operatorname{Re} z < -2\gamma_\varepsilon$ , on trouve du *pseudo-spectre semi-classique* (DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI, 2004), ce qui signifie que l'opérateur  $P_{\varepsilon,k} - z$  est inversible mais que la norme de son inverse croît plus vite que toute puissance de  $1/\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . L'absence de spectre dans cette région permet en particulier de décaler vers la gauche le contour d'intégration  $\Gamma_\varepsilon$  de façon à obtenir une estimation de la forme  $\|e^{tP_{\varepsilon,k}}\| \leq \hat{C}_\varepsilon e^{-\hat{\gamma}_\varepsilon t}$ , manifestement meilleure que la précédente lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . La rançon de cette approche est que l'on perd alors tout contrôle sur la constante  $\hat{C}_\varepsilon$ , de sorte que l'on ne peut pas utiliser la proposition 1.7 pour étudier les solutions de l'équation non linéaire au voisinage de l'origine ; voir la remarque 1.8.

**1.3.2. Hypocoercivité.** — Une autre approche permettant d’obtenir une estimation de dissipation accélérée pour une équation de la forme (14) a été proposée par VILLANI (2009). On remarque que  $-P_{\varepsilon,k} = \varepsilon\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{A} = \partial_y$  et  $\mathcal{B} = ikv(y)$ , et on définit l’opérateur auto-adjoint

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,k} = \varepsilon\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \varepsilon^{-1}\mathcal{C}^*\mathcal{C} = -\varepsilon\partial_y^2 + \frac{k^2}{\varepsilon}v'(y)^2,$$

où  $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = ikv'(y)$ . Sans entrer dans les détails, l’approche de Villani consiste à comparer les décroissances temporelles des semi-groupes  $e^{tP_{\varepsilon,k}}$  et  $e^{-t\mathcal{H}_{\varepsilon,k}}$ , sachant que pour étudier le second on peut utiliser les méthodes puissantes développées pour l’analyse des opérateurs auto-adjoints.

Plus précisément, étant donné une solution de l’équation  $\partial_t g = P_{\varepsilon,k}g$ , l’idée est d’étudier l’évolution temporelle d’une quantité quadratique de la forme

$$\Phi = \|g\|^2 + \|a\mathcal{A}g\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle b\mathcal{A}g, \mathcal{C}g \rangle + \|c\mathcal{C}g\|^2,$$

où  $a, b, c$  sont des constantes (ou des fonctions) réelles à choisir soigneusement. On suppose que  $a > 0$ ,  $c > 0$  et  $4b^2 \leq ac$ , de sorte que la quantité  $\Phi$  est positive et équivalente, dans le cas de l’équation (14), à la norme  $\|g\|_{H^1}^2$ . La pertinence de la définition ci-dessus apparaît lorsqu’on calcule la dérivée temporelle : alors que l’évolution de la norme  $\|g\|^2$  ne dépend que de la partie symétrique de l’opérateur  $P_{\varepsilon,k}$ , le terme croisé  $\operatorname{Re}\langle b\mathcal{A}g, \mathcal{C}g \rangle$  est sensible à l’opérateur de transport  $\mathcal{B}$ , et sa dérivée temporelle produit des termes négatifs que l’on peut exploiter pour obtenir une inégalité différentielle de la forme

$$(23) \quad \frac{d}{dt}\Phi \leq -C\varepsilon^\alpha\Phi,$$

où  $C > 0$  et  $\alpha > 0$ . C’est dans ce calcul qu’apparaît la forme quadratique associée à l’opérateur « symétrisé »  $\mathcal{H}_{\varepsilon,k}$  (VILLANI, 2009). En utilisant enfin les propriétés régularisantes de l’équation (14), on déduit aisément de l’inégalité (23) une estimation de dissipation accélérée de la forme (8) avec  $\gamma_\varepsilon \approx \varepsilon^\alpha$  ; voir GALLAGHER, GALLAY et NIER (2009, Section 3) pour une étude de différents problèmes modèles.

*Remarque 1.12.* — Dans un cas simple comme celui de l’équation (14), l’approche ci-dessus est un peu plus difficile à mettre en œuvre que la méthode directe basée sur les estimations de la résolvante, et elle fournit des résultats un peu moins précis. Mais la méthode d’hypocoercivité est par ailleurs très robuste, et peut facilement s’adapter, par exemple, à l’étude de la stabilité d’une solution qui dépend lentement du temps (WEI et ZHANG, 2019) ; voir aussi la remarque 1.4. Elle est également très efficace pour étudier directement des problèmes non linéaires, sans avoir à passer par l’équation intégrale (COTI ZELATI, ELGINDI et WIDMAYER, 2019).

**1.3.3. Remarques bibliographiques.** — L’étude mathématique de l’influence du transport dans les écoulements parallèles en dimension deux et trois, ainsi que dans les tourbillons plans, a connu un essor rapide suite aux travaux remarquables de BEDROSSIAN et MASMOUDI (2015) sur la stabilité du flot de Couette, eux-mêmes inspirés du célèbre

article de MOUHOT et VILLANI (2011) sur l'équation de Vlasov–Poisson. À l'exception de ceux qui concernent les fluides parfaits ou la stabilité des couches limites, les travaux dans cette mouvance s'inscrivent souvent dans le cadre général de l'équation (3), pour un choix convenable des opérateurs  $L$  et  $\Lambda$ . D'un point de vue conceptuel, l'obtention d'une estimation de dissipation accélérée de la forme (8) pour l'équation linéarisée  $\partial_t f + \Lambda f = \varepsilon Lf$  repose sur des hypothèses spectrales sur l'opérateur  $\Lambda$ , et notamment sur l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre continu (CONSTANTIN, KISELEV, RYZHIK et ZLATOŠ, 2008). Une telle propriété peut être établie, dans un cadre assez général, par la méthode de l'opérateur conjugué introduite par MOURRE (1981) ; voir GRENIER, NGUYEN, ROUSSET et SOFFER (2018) pour une application à la stabilité de certains  $K$ -flots. Il est également possible, dans certains cas, de construire un opérateur d'onde (au sens de la théorie de la diffusion) qui permet, par conjugaison, d'éliminer la partie non locale de l'opérateur  $\Lambda$  et de se ramener ainsi à un modèle plus simple. Un exemple de tel opérateur sera présenté au paragraphe 2.5.

En ce qui concerne les différents profils de vitesse, l'exemple le mieux compris est le flot de Couette, où le semi-groupe linéarisé peut être calculé explicitement (BEDROSSIAN, MASMOUDI et VICOL, 2016 ; MASMOUDI et ZHAO, 2019). Le cas d'un scalaire passif présenté dans l'exemple 1.1 est étudié en détail dans BEDROSSIAN et COTI ZELATI (2017), par la méthode d'hypocoercivité. Parmi les écoulements pour lesquels l'opérateur linéarisé contient un terme de transport non local, le flot de Kolmogorov (voir l'exemple 1.3) est abordé dans BECK et WAYNE (2013), et complètement traité dans IBRAHIM, MAEKAWA et MASMOUDI (2017) par une approche abstraite, dans WEI, ZHANG et ZHAO (2017) par la construction d'un opérateur d'onde, et dans WEI et ZHANG (2019) par la méthode d'hypocoercivité. Enfin, le flot de Poiseuille dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  tout entier est étudié dans COTI ZELATI, ELGINDI et WIDMAYER (2019).

## 2. STABILITÉ DES TOURBILLONS PLANS

Dans cette seconde partie, on étudie en détail un exemple important qui s'inscrit parfaitement dans le cadre défini à la section précédente, mais dont l'analyse présente des difficultés qui n'ont été surmontées que tout récemment. Il s'agit de la stabilité d'une famille d'écoulements plans auto-similaires à symétrie radiale, connus sous le nom de tourbillons de Lamb–Oseen (GALLAY et WAYNE, 2005).

On considère les équations de Navier–Stokes incompressibles dans le plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$(24) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

où les inconnues sont le champ de vitesse  $u = (u_1, u_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  et la pression  $p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Comme dans l'exemple 1.3, la densité du fluide est supposée égale à 1, et l'unique paramètre du système est donc la viscosité cinématique  $\nu > 0$ . Le système (24) étant considéré dans tout le plan, on peut à nouveau éliminer la pression

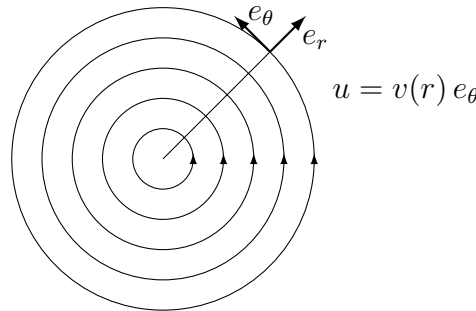
en considérant le tourbillon  $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ , qui vérifie l'équation scalaire

$$(25) \quad \partial_t \omega(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla \omega(x, t) = \nu \Delta \omega(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

Comme nous l'avons déjà observé, le champ de vitesse  $u(x, t)$  figurant dans (25) peut, à chaque instant  $t$ , être exprimé en fonction du tourbillon  $\omega(x, t)$  en résolvant le système elliptique  $\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0$ ,  $\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = \omega$ . Sous des hypothèses assez faibles d'intégrabilité et de décroissance à l'infini, on obtient dans le cas présent la formule de Biot–Savart

$$(26) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{|x - y|^2} \omega(y, t) dy,$$

où on a noté  $x^\perp = (-x_2, x_1)$  si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On écrira dans la suite  $u = K_{BS} * \omega$  lorsque  $u$  s'exprime en termes de  $\omega$  par la formule (26).



De façon générale, un tourbillon plan est un écoulement à symétrie radiale dans  $\mathbb{R}^2$  défini en coordonnées polaires par une expression de la forme

$$(27) \quad u(r, \theta) = v(r) e_\theta, \quad r > 0, \quad \theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),$$

où  $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est le profil de vitesse et  $e_\theta$  est le vecteur unité dans la direction azimutale. On relèvera la similitude évidente avec l'écoulement parallèle (1), où le champ de vitesse s'écrit  $u(x, y) = v(y) e_x$ . Il est facile de vérifier que tout champ de vitesse de la forme (27) est une solution stationnaire des équations d'Euler, c'est-à-dire du système (24) avec  $\nu = 0$ , pour autant que la pression vérifie  $rp'(r) = v(r)^2$ . En revanche, aucun tourbillon localisé de la forme (27) ne peut être solution des équations de Navier–Stokes, car il n'y a aucun mécanisme pour compenser la diffusion spatiale due à la viscosité. De fait, pour des solutions à symétrie radiale, l'équation du tourbillon (25) se réduit à l'équation de la chaleur  $\partial_t \omega = \nu \Delta \omega$ , laquelle n'admet pas de solution stationnaire non triviale qui s'annule à l'infini.

Les tourbillons de Lamb–Oseen sont des solutions auto-similaires de l'équation (25), et donc des équations de Navier–Stokes, définies par

$$(28) \quad \omega(x, t) = \frac{\Gamma}{\nu t} G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right), \quad u(x, t) = \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} v^G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right),$$

où les profils de vorticité et de vitesse sont donnés par les formules explicites

$$(29) \quad G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-|\xi|^2/4}, \quad v^G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2} \left(1 - e^{-|\xi|^2/4}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

On peut vérifier que  $v^G = K_{BS} * G$ , ce qui signifie que le champ de vitesse  $u(x, t)$  dans (28) s'obtient à partir du tourbillon  $\omega(x, t)$  par la loi de Biot–Savart (26).

Les formules (28) définissent une famille de solutions indexée par un paramètre  $\Gamma \in \mathbb{R}$ , appelé *circulation totale* du tourbillon en vertu de la relation  $\Gamma = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x, t) dx$ . Sa dimension physique est celle d'un coefficient de diffusion, ce qui permet de définir le *nombre de Reynolds de circulation*  $\text{Re} = |\Gamma|/\nu$ . Le régime le plus intéressant pour les applications est celui où  $\text{Re} \gg 1$ , inégalité qui peut s'interpréter de la façon suivante : dans l'approximation non visqueuse, une particule fluide située à distance  $R > 0$  de l'origine effectue une rotation complète autour de ce point en un temps  $T_0 \approx 4\pi^2 R^2/|\Gamma|$ , comme on le voit en prenant la limite  $\nu \rightarrow 0$  dans l'expression (28) du champ de vitesse. Par ailleurs, à cette même distance de l'origine, le profil de vitesse évolue sous l'effet de la viscosité sur une échelle de temps de l'ordre de  $T_1 \approx R^2/\nu$ . On a donc  $T_1 \gg T_0$  lorsque  $\text{Re} \gg 1$ , et la séparation de ces deux échelles de temps signifie que le tourbillon de Lamb–Oseen est « presque stationnaire » dans la limite des grands nombres de Reynolds.

## 2.1. Variables auto-similaires

Quelque lente qu'elle soit, la variation temporelle des tourbillons de Lamb–Oseen complique l'étude de leur stabilité, car une approche directe par linéarisation conduirait à une équation dépendant explicitement du temps. Il est évidemment possible de stabiliser ces écoulements en introduisant un terme de force extérieure comme dans l'exemple 1.3, mais cet expédient est dépourvu de toute justification physique. Une solution bien plus élégante pour éliminer la dépendance temporelle consiste à introduire des *variables auto-similaires* adimensionnées de la forme

$$(30) \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\nu t}} \in \mathbb{R}^2, \quad \tau = \log \frac{t}{T} \in \mathbb{R},$$

où  $T > 0$  est une échelle de temps arbitraire. En s'inspirant de (28), on cherche donc des solutions de (25) sous la forme

$$(31) \quad \omega(x, t) = \frac{1}{t} w\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}, \log \frac{t}{T}\right), \quad u(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}, \log \frac{t}{T}\right),$$

où les quantités adimensionnées  $w, v$  représentent, respectivement, le tourbillon et le champ de vitesse dans les nouvelles variables. Leur évolution temporelle est régie par l'équation

$$(32) \quad \partial_\tau w + v \cdot \nabla_\xi w = \Delta_\xi w + \frac{1}{2} \xi \cdot \nabla_\xi w + w,$$

qui a la même forme que (25) si ce n'est que le laplacien au membre de droite est remplacé par l'opérateur de Fokker–Planck

$$(33) \quad L = \Delta + \frac{1}{2} \xi \cdot \nabla + 1.$$

La loi de Biot–Savart est préservée par la transformation (31), de sorte que l’on a encore la relation  $v = K_{BS} * w$ .

Par construction, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l’équation (32) possède une solution stationnaire de la forme  $w = \alpha G$ ,  $v = \alpha v^G$ , qui correspond dans les variables originales au tourbillon de Lamb–Oseen de circulation  $\Gamma = \alpha\nu$ . On sait d’ailleurs qu’il s’agit là des seules solutions stationnaires du système pour lesquelles le tourbillon  $w$  est intégrable (GALLAY et WAYNE, 2005). Pour étudier leur stabilité, on cherche des solutions de (32) sous la forme

$$w = \alpha G + \tilde{w}, \quad v = \alpha v^G + \tilde{v},$$

où  $\tilde{v} = K_{BS} * \tilde{w}$ . En remplaçant dans (32), on obtient l’équation d’évolution

$$(34) \quad \partial_\tau \tilde{w} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{w} = (L - \alpha \Lambda) \tilde{w},$$

où  $L$  est donné par (33) et  $\Lambda$  est l’opérateur linéaire résultant de la linéarisation au point  $w = \alpha G$  du terme quadratique  $v \cdot \nabla w = (K_{BS} * w) \cdot \nabla w$  dans (32) :

$$(35) \quad \Lambda w = v^G \cdot \nabla w + (K_{BS} * w) \cdot \nabla G =: \hat{\Lambda}_1 w + \hat{\Lambda}_2 w.$$

Le but de cette section est d’étudier les propriétés des solutions de l’équation (34) au voisinage de l’origine, dans le régime où le paramètre de circulation  $\alpha$  est grand. Pour cela, on observe que ce problème s’inscrit dans le cadre général (3) considéré ci-dessus.

## 2.2. Propriétés des opérateurs $L$ et $\Lambda$

Introduisons en effet l’espace de Hilbert  $X = L^2(\mathbb{R}^2, G^{-1} d\xi)$  muni du produit scalaire

$$(36) \quad \langle w_1, w_2 \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^2} G(\xi)^{-1} w_1(\xi) \overline{w_2(\xi)} d\xi,$$

et de la norme associée  $\|w\| = \langle w, w \rangle^{1/2}$ . Les éléments de  $X$  sont localement de carré intégrable et décroissent rapidement à l’infini, car  $w \in X$  si et seulement si  $G^{-1/2} w \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Ceci montre en particulier que  $X \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $p \in [1, 2]$ . Pour référence ultérieure, on définit aussi le sous-espace fermé

$$(37) \quad X_0 = \left\{ w \in X \mid \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) d\xi = 0 \right\}.$$

L’opérateur de diffusion  $L : D(L) \rightarrow X$ , défini sur son domaine maximal, est auto-adjoint dans  $X$ , à résolvante compacte, et son spectre couvre les demi-entiers négatifs :

$$\sigma(L) = \left\{ -\frac{n}{2} \mid n = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

voir par exemple GALLAY et WAYNE (2002). Ces propriétés s’établissent facilement en remarquant que  $L$  est formellement conjugué à l’oscillateur harmonique quantique dans le plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$G^{-1/2} L G^{1/2} = \Delta - \frac{|\xi|^2}{16} + \frac{1}{2}.$$

On en déduit aussi la forme des fonctions propres de  $L$ , qui sont des fonctions de Hermite. En particulier, la valeur propre 0 est simple avec  $LG = 0$ , la valeur propre  $-1/2$  est double avec  $L\partial_1 G = L\partial_2 G = 0$ , et ainsi de suite.



De façon tout à fait remarquable, l'opérateur de « transport »  $\Lambda$  se trouve être antisymétrique (ou anti-hermitien) précisément dans l'espace  $X$  où  $L$  est auto-adjoint :

LEMME 2.1. — Si  $w_1, w_2 \in D(L)$ , alors  $\langle \Lambda w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, \Lambda w_2 \rangle = 0$ .

*Démonstration.* — On suppose sans perte de généralité que  $w_1, w_2$  sont à valeurs réelles, et on utilise la décomposition  $\Lambda = \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2$  introduite dans (35). Comme le champ de vecteurs  $G^{-1}v^G$  est à divergence nulle, on a tout d'abord

$$\langle \hat{\Lambda}_1 w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, \hat{\Lambda}_1 w_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} G^{-1}v^G \cdot \nabla(w_1 w_2) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(G^{-1}v^G w_1 w_2) \, d\xi = 0.$$

D'autre part, notons  $v_1 = K_{BS} * w_1$  et  $v_2 = K_{BS} * w_2$ . Comme  $\nabla G = -\frac{1}{2}\xi G$ , on trouve en utilisant l'expression du noyau de Biot–Savart :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Lambda}_2 w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, \hat{\Lambda}_2 w_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( (\xi \cdot v_1) w_2 + (\xi \cdot v_2) w_1 \right) \, d\xi \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \xi \cdot \frac{(\xi - \eta)^\perp}{|\xi - \eta|^2} + \eta \cdot \frac{(\eta - \xi)^\perp}{|\eta - \xi|^2} \right\} w_1(\eta) w_2(\xi) \, d\eta \, d\xi = 0, \end{aligned}$$

car le terme entre accolades est identiquement nul. Ainsi  $\langle \Lambda w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, \Lambda w_2 \rangle = 0$ .  $\square$

En fait, on peut également montrer (MAEKAWA, 2011) que l'opérateur  $\Lambda$ , défini sur son domaine maximal  $D(\Lambda) \supset D(L)$ , est anti-adjoint :  $\Lambda^* = -\Lambda$ . Par ailleurs, il n'est pas difficile de vérifier que  $\Lambda$  est relativement compact par rapport à  $L$ . Enfin, on a la caractérisation suivante du noyau de  $\Lambda$  :

$$(38) \quad \ker(\Lambda) = Y_0 \oplus \left\{ \beta_1 \partial_1 G + \beta_2 \partial_2 G \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

où  $Y_0 \subset X$  désigne le sous-espace constitué de toutes les fonctions à symétrie radiale.

En conclusion, on observe donc que l'équation (34) qui régit l'évolution temporelle des perturbations du tourbillon de Lamb–Oseen de circulation  $\Gamma = \alpha\nu$  est de la forme (3), ou plus précisément (6), avec  $\varepsilon = 1/|\alpha|$  et  $N_\varepsilon(g) = -(K_{BS} * g) \cdot \nabla g$ . En suivant l'approche présentée à la section 1, on cherche à étudier le comportement des solutions de ce système au voisinage de l'origine, dans le régime asymptotique où  $|\alpha| \gg 1$ .

### 2.3. Estimations pseudo-spectrales

Lorsqu'on étudie les solutions de l'équation (34) dans  $X$ , on peut se restreindre sans perte de généralité au sous-espace  $X_0$  défini par (37), qui est invariant sous l'évolution. Dans ce sous-espace l'opérateur  $L - \alpha\Lambda + \frac{1}{2}$  est  $m$ -dissipatif, et il s'ensuit que le semi-groupe linéarisé satisfait à l'estimation

$$\|e^{\tau(L-\alpha\Lambda)}\|_{X_0 \rightarrow X_0} \leq e^{-\tau/2}, \quad \text{pour tout } \tau \geq 0,$$

qui est indépendante de  $\alpha$ . On en déduit assez aisément qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et pour toute donnée initiale  $\tilde{w}_0 \in X_0$  vérifiant  $\|\tilde{w}_0\| \leq \varepsilon_0$ , l'équation (34) possède une solution globale unique  $\tilde{w} \in C^0([0, +\infty[, X_0)$ , qui reste dans un voisinage de l'origine pour tout  $\tau \geq 0$  et converge exponentiellement vers zéro lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$  (GALLAY et WAYNE, 2005). En d'autres termes, le tourbillon de Lamb–Oseen  $\alpha G$  est une

solution asymptotiquement stable de l'équation (32), pour des perturbations dans  $X_0$ , et la taille de son bassin d'attraction local est minorée par une constante indépendante du paramètre de circulation  $\alpha$ .

Les difficultés sérieuses commencent lorsqu'on cherche à améliorer le résultat évoqué ci-dessus dans le régime où  $|\alpha| \gg 1$ , en quantifiant l'effet stabilisateur dû à l'opérateur de « transport »  $\Lambda$  dans (34). Au niveau de l'opérateur linéarisé, il convient alors de se restreindre au sous-espace  $X_\perp = \ker(\Lambda)^\perp$ , c'est-à-dire au complément orthogonal du noyau de  $\Lambda$  dans  $X$ . Cette question a été abordée dans l'article GALLAGHER, GALLAY et NIER (2009), où des modèles unidimensionnels ont été introduits et étudiés. Des estimations pseudo-spectrales ont ensuite été obtenues par DENG (2013b) pour l'opérateur simplifié  $L - \alpha\hat{\Lambda}_1$ , et par DENG (2013a) pour l'opérateur complet  $L - \alpha\hat{\Lambda}$  restreint à un sous-espace de codimension infinie. Le problème a enfin été complètement résolu par LI, WEI et ZHANG (2017), qui ont obtenu les estimations pseudo-spectrales optimales suivantes :

**PROPOSITION 2.2.** — *Il existe des constantes strictement positives  $c_1, c_2$  telles que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on ait l'estimation*

$$(39) \quad c_1(1 + |\alpha|)^{-1/3} \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(L - \alpha\Lambda - i\lambda)^{-1}\|_{X_\perp \rightarrow X_\perp} \leq c_2(1 + |\alpha|)^{-1/3},$$

où  $X_\perp = \ker(\Lambda)^\perp \subset X$ .

Un tel résultat est relativement facile à obtenir pour l'opérateur simplifié  $L - \alpha\hat{\Lambda}_1$  qui peut être étudié, après quelques étapes préparatoires, par les techniques présentées dans la démonstration de la proposition 1.9. La difficulté réelle vient de l'opérateur non local  $\hat{\Lambda}_2$ , auquel on ne peut associer un symbole régulier au sens de l'analyse semi-classique. Il ne semble donc pas possible d'invoquer ici des résultats généraux de théorie spectrale comme ceux établis par DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004). Il n'est pas évident non plus de mettre en œuvre la méthode d'hypocoercivité de C. Villani, car le commutateur de  $\hat{\Lambda}_2$  avec la « racine carrée » de l'opérateur  $-L$  n'admet pas d'expression simple qui puisse être exploitée. On donnera dans les paragraphes 2.4 et suivants un aperçu des techniques remarquables développées par LI, WEI et ZHANG (2017) pour démontrer la proposition 2.2.

*Remarque 2.3.* — Une estimation pseudo-spectrale de la forme (39) a également été obtenue par IBRAHIM, MAEKAWA et MASMOUDI (2017) pour l'opérateur linéarisé autour du flot de Kolmogorov, lequel contient un terme non local semblable à l'opérateur  $\hat{\Lambda}_2$ . Les techniques utilisées semblent toutefois assez différentes dans les deux cas.

Mentionnons pour terminer ce paragraphe quelques conséquences assez immédiates de la proposition 2.2. Tout d'abord, en utilisant la formule de Dunford et un contour d'intégration approprié, comme au paragraphe 1.3, on peut obtenir l'estimation suivante de dissipation accélérée pour le semi-groupe linéarisé (GALLAY, 2018) :

COROLLAIRE 2.4. — *Il existe des constantes strictement positives  $c_3, c_4$  telles que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $|\alpha| \geq 1$ , on ait l'estimation*

$$(40) \quad \|e^{\tau(L-\alpha\Lambda)}\|_{X_\perp \rightarrow X_\perp} \leq \min\left(e^{-\tau}, c_3|\alpha|^{2/3} e^{-c_4|\alpha|^{1/3}\tau}\right), \quad \text{pour tout } \tau \geq 0.$$

On peut ensuite, comme au paragraphe 1.2, utiliser l'estimation (40) pour contrôler les solutions de l'équation non linéaire (34), et minorer en particulier la taille du bassin d'attraction de l'origine  $\tilde{w} = 0$ . Quelques précautions sont ici nécessaires, car la dissipation accélérée établie au corollaire 2.4 n'agit évidemment que dans le sous-espace  $X_\perp = \ker(\Lambda)^\perp$ . Si  $\tilde{w} \in \ker(\Lambda) \cap X_0$ , on doit se contenter de l'estimation dissipative

$$\|e^{\tau(L-\alpha\Lambda)}\tilde{w}\| = \|e^{\tau L}\tilde{w}\| \leq e^{-\tau/2}\|\tilde{w}\|, \quad \tau \geq 0.$$

Or les sous-espaces  $\ker(\Lambda)$  et  $X_\perp$  ne sont pas invariants sous l'évolution définie par l'équation non linéaire (34). Néanmoins, en exploitant la structure particulière de la non-linéarité, on peut obtenir le résultat suivant (GALLAY, 2018) :

PROPOSITION 2.5. — *Il existe des constantes strictement positives  $c_5, c_6$  et  $\kappa$  telles que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $|\alpha| \geq 2$  et pour toute donnée initiale  $\tilde{w}_0 \in X_0$  telle que*

$$(41) \quad \|\tilde{w}_0\| \leq \frac{c_5 |\alpha|^{1/6}}{\log |\alpha|},$$

*l'équation (34) possède une solution globale unique  $\tilde{w} \in C^0([0, +\infty, X_0])$ , qui vérifie pour tout  $\tau \geq 0$  les estimations*

$$(42) \quad \|\tilde{w}(\cdot, \tau)\|_X \leq c_6 e^{-\tau/2} \|\tilde{w}_0\|_X,$$

$$(43) \quad \|P_\perp \tilde{w}(\cdot, \tau)\|_X \leq c_6 \|\tilde{w}_0\|_X \exp\left(-\frac{\kappa |\alpha|^{1/3} \tau}{\log |\alpha|}\right),$$

*où  $P_\perp$  désigne le projecteur orthogonal dans  $X_0$  sur le sous-espace  $X_\perp = \ker(\Lambda)^\perp$ .*

Au vu de (41), la taille du bassin d'attraction de l'origine croît au moins comme  $|\alpha|^{1/6}$  (avec une perte logarithmique) lorsque  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Cette estimation n'est sans doute pas optimale, mais elle améliore déjà sensiblement ce que l'on pouvait obtenir en négligeant l'action de l'opérateur antisymétrique  $\Lambda$ . Pour des données initiales vérifiant (41), les solutions sont projetées sur le noyau de  $\Lambda$  en un temps très court, proportionnel à  $|\alpha|^{-1/3}$  (avec à nouveau une perte logarithmique). Enfin, la composante de la solution dans  $\ker(\Lambda)$  converge vers zéro diffusivement lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ . Comme le noyau de  $\Lambda$  est, d'après (38), essentiellement composé de fonctions à symétrie radiale, la proposition 2.5 signifie que les perturbations d'un tourbillon de Lamb–Oseen à grand nombre de Reynolds sont rapidement « symétrisées » par la rotation différentielle du tourbillon, un phénomène bien observé expérimentalement (BAJER, BASSOM et GILBERT, 2001).

*Remarque 2.6.* — Les conclusions de la proposition 2.5 peuvent être comparées à celles de la proposition 1.7, en prenant garde au fait que les deux résultats sont exprimés dans des variables différentes. Ainsi l'estimation (43), une fois transposée à l'équation (3) avec  $\varepsilon = |\alpha|^{-1}$ , donne une estimation de dissipation accélérée de la forme (8) où  $\gamma_\varepsilon \approx \varepsilon^{2/3}$ . On

remarque que la proposition 1.9 fournit un taux de décroissance bien supérieur, de l'ordre de  $\varepsilon^{1/3}$ , pour un écoulement parallèle avec profil de vitesse monotone, mais la différence s'explique par le fait que, dans le cas du tourbillon de Lamb–Oseen, la dérivée du profil de vitesse s'annule à l'origine et tend vers zéro à l'infini. D'autre part, l'estimation (41) correspond pour l'équation (3) à un bassin d'attraction de taille  $\varepsilon^{5/6}$ , bien plus petit que celui donné par la proposition 1.7 lorsque  $\gamma_\varepsilon = \varepsilon^{2/3}$ . Ici la différence s'explique par le fait que les termes non linéaires des équations de Navier–Stokes contiennent des dérivées du champ de vitesse, et ne satisfont donc pas à l'estimation (10).

## 2.4. Décomposition de Fourier angulaire

Ce paragraphe et le suivant ont pour but de donner un aperçu de la démonstration de la proposition 2.2. Une première étape, élémentaire mais essentielle, consiste à exploiter l'invariance par rotation des deux opérateurs linéaires  $L$  et  $\Lambda$ , dont les coefficients ne dépendent que de la distance à l'origine, en développant le tourbillon  $w \in X$  en série de Fourier par rapport à la variable angulaire  $\theta \in \mathbb{T}$ . On décompose ainsi l'espace  $X$  en une somme directe :

$$X = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Y_n,$$

où  $Y_n = \{w \in X \mid e^{-in\theta}w \in Y_0\}$  et  $Y_0$  désigne, comme dans (38), le sous-espace de  $X$  constitué de toutes les fonctions à symétrie radiale. Le point crucial est que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , le sous-espace  $Y_n$  est invariant sous l'action des deux opérateurs  $L$  et  $\Lambda$ . La restriction de  $L$  à  $Y_n$ , notée  $L_n$ , est un opérateur différentiel à une dimension :

$$L_n = \partial_r^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{r}\right)\partial_r + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right),$$

défini sur la demi-droite  $\mathbb{R}_+$  avec, à l'origine, des conditions homogènes de Dirichlet si  $n = 0$  ou  $|n| \geq 2$ , et de Neumann si  $|n| = 1$ . D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier que la restriction de  $\Lambda$  à  $Y_n$ , notée  $\Lambda_n$ , est donnée par  $\Lambda_0 = 0$  et

$$\Lambda_n w = \frac{in}{8\pi}(\sigma w - g\Omega_n[w]), \quad \text{pour } n \neq 0,$$

où  $\sigma, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  sont les fonctions définies par

$$(44) \quad \sigma(r) = \frac{1 - e^{-r^2/4}}{r^2/4}, \quad g(r) = e^{-r^2/4}, \quad r > 0,$$

et  $\Omega_n[w]$  est l'unique solution de l'équation différentielle  $-\Omega_n'' - \frac{1}{r}\Omega_n' + \frac{n^2}{r^2}\Omega_n = w$  sur  $\mathbb{R}_+$  qui soit régulière à l'origine et décroissante à l'infini. On a la formule explicite

$$(45) \quad \Omega_n[w](r) = \frac{1}{2|n|} \int_0^\infty \min\left(\frac{r}{s}, \frac{s}{r}\right)^{|n|} w(s)s \, ds, \quad r > 0.$$

Grâce à cette décomposition, il suffit donc d'étudier la famille d'opérateurs à une dimension

$$(46) \quad H_{n,\beta} = -L_n + \alpha\Lambda_n \equiv -L_n + i\beta M_n, \quad n \in \mathbb{Z}^*,$$

où

$$\beta = \frac{n\alpha}{8\pi} \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad M_n w = \sigma w - g\Omega_n[w].$$

Lorsque  $|n| \geq 2$ , ces opérateurs agissent dans l'espace de Hilbert  $Z = L^2(\mathbb{R}_+, g^{-1}r \, dr)$ , muni du produit scalaire

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \int_0^\infty w_1(r) \overline{w_2(r)} g(r)^{-1} r \, dr.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que  $L_n$ , défini sur son domaine maximal, est auto-adjoint dans  $Z$ , et que  $M_n$  est un opérateur borné hermitien dans ce même espace. Dans le cas particulier où  $|n| = 1$ , l'opérateur  $M_n$  a un noyau de dimension un engendré par la fonction  $rg$ , car on peut vérifier que  $\Omega_n[rg] = r\sigma$  quand  $|n| = 1$ . Pour obtenir une estimation de dissipation accélérée, il faut alors se restreindre au complément orthogonal du noyau de  $M_n$ , c'est-à-dire à l'hyperplan

$$(47) \quad Z_0 = \left\{ w \in Z \mid \int_0^\infty r^2 w(r) \, dr = 0 \right\}.$$

La proposition 2.2 est une conséquence directe de l'estimation pseudo-spectrale suivante, formulée pour la famille d'opérateurs  $H_{n,\beta}$  avec  $|n| \geq 1$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 2.7.** — *Il existe des constantes strictement positives  $c_1, c_2$  telles que, pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$  avec  $|n| \geq 2$ , on ait l'estimation*

$$(48) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(H_{n,\beta} - i\lambda)^{-1}\|_{Z \rightarrow Z} \leq c_2(1 + |\beta|)^{-1/3}.$$

*En outre, si  $n = \pm 1$ , on a une estimation similaire dans le sous-espace  $Z_0$  :*

$$(49) \quad c_1(1 + |\beta|)^{-1/3} \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(H_{n,\beta} - i\lambda)^{-1}\|_{Z_0 \rightarrow Z_0} \leq c_2(1 + |\beta|)^{-1/3}.$$

*Remarque 2.8.* — On a également une minoration de la forme  $c(1 + |\beta|)^{-1/3}$  pour le membre de gauche de (48), mais la constante  $c > 0$  dépend alors de  $n$ .

## 2.5. Points-clés de la démonstration de la proposition 2.7

Comme indiqué ci-dessus, les difficultés essentielles que l'on rencontre dans l'étude de l'opérateur  $H_{n,\beta}$  défini par (46) proviennent du terme non local  $g\Omega_n[\cdot]$  dans l'opérateur  $M_n$ . La stratégie adoptée par Li, Wei et Zhang pour contrôler ce terme est fort astucieuse, et repose sur les observations (non triviales !) suivantes :

**2.5.1. Hautes fréquences angulaires.** — L'opérateur hermitien  $g\Omega_n[\cdot]$  est toujours positif et inférieur à l'opérateur de multiplication par  $\sigma$ , au sens des formes quadratiques sur l'espace de Hilbert  $Z$ . En outre  $g\Omega_n[\cdot]$  est petit devant  $\sigma$  lorsque  $|n|$  est grand :

LEMME 2.9. — Pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$  on a  $0 \leq g\Omega_n[\cdot] \leq \frac{1}{|n|}\sigma$ .

*Démonstration.* — Soit  $w \in Z$ . En utilisant l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $\Omega_n = \Omega_n[w]$ , on montre que

$$\langle g\Omega_n[w], w \rangle = \int_0^\infty \Omega_n[w] \bar{w} r \, dr = \int_0^\infty \left( |\partial_r \Omega_n|^2 + \frac{n^2}{r^2} |\Omega_n|^2 \right) r \, dr \geq 0.$$

Par ailleurs, la représentation intégrale (45) permet d'obtenir la borne suivante

$$\int_0^\infty \Omega_n[w] \bar{w} r \, dr \leq \frac{1}{2|n|} \int_0^\infty \int_0^\infty \min\left(\frac{r}{s}, \frac{s}{r}\right)^{|n|} |w(r)||w(s)| r s \, dr \, ds.$$

On majore encore le membre de droite en remplaçant l'exposant  $|n|$  par 1, et en appliquant l'inégalité de Young sous la forme suivante

$$|w(r)||w(s)| \leq \frac{|w(r)|^2}{2rg(r)} sg(s) + \frac{|w(s)|^2}{2sg(s)} rg(r).$$

En observant que

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \min\left(\frac{r}{s}, \frac{s}{r}\right) g(s) s^2 \, ds = \Omega_1[rg](r) = r\sigma(r),$$

on arrive ainsi à la majoration

$$\int_0^\infty \Omega_n[w] \bar{w} r \, dr \leq \frac{1}{|n|} \int_0^\infty \Omega_1[rg] \frac{|w|^2}{rg} r \, dr = \frac{1}{|n|} \int_0^\infty \sigma |w|^2 g^{-1} r \, dr.$$

En définitive, on a bien  $0 \leq \langle g\Omega_n[w], w \rangle \leq \frac{1}{|n|} \langle \sigma w, w \rangle$  pour tout  $w \in Z$ . □

Le lemme 2.9 suggère que l'opérateur non local  $g\Omega_n[\cdot]$  est négligeable devant le terme de transport  $\sigma$  lorsque le paramètre de Fourier  $|n|$  est suffisamment grand. Cette idée a été transposée en une preuve rigoureuse par DENG (2013a), qui a établi l'estimation pseudo-spectrale (48) pour  $|n| \geq n_0$ , avec  $n_0 \approx 80$ . Au prix de nombreuses complications techniques, Li, Wei et Zhang sont parvenus à montrer la même estimation pour  $|n| \geq 2$ , ce qui est le résultat optimal.

Dans les deux cas, l'approche repose sur la méthode des multiplicateurs, qui a été utilisée dans la démonstration de la proposition 1.9. On souhaite estimer l'inverse de l'opérateur  $H_{n,\beta} - z$  pour tout  $z \in i\mathbb{R}$ . En notant  $z = i\beta\lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on observe que

$$H_{n,\beta} - z = -L_n + i\beta(M_n - \lambda) = -L_n + i\beta\left((\sigma - \lambda) - g\Omega_n[\cdot]\right) =: H_{n,\beta,\lambda}.$$

Pour toute fonction régulière  $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1, 1]$ , on a l'estimation évidente

$$(50) \quad |\langle H_{n,\beta,\lambda} w, \chi w \rangle| \leq \|H_{n,\beta,\lambda} w\| \|w\|, \quad \text{pour tout } w \in D(L_n).$$

Le but est de choisir judicieusement la fonction  $\chi$  de façon à pouvoir minorer le membre de gauche, idéalement par une expression de la forme  $C|\beta|^{1/3} \|w\|^2$  pour une certaine constante  $C > 0$ . Lorsque cela est possible, on déduit immédiatement de (50) l'estimation

$\|H_{n,\beta,\lambda}^{-1}\| \leq C^{-1}|\beta|^{-1/3}$  qui conduit à (48) en prenant le supremum sur toutes les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Lorsque  $\lambda \notin ]0, 1[$ , la fonction  $\sigma(r) - \lambda$  ne s'annule pas et on peut obtenir les estimations voulues en prenant  $\chi \equiv 1$  et en utilisant le lemme 2.9 pour contrôler le terme non local. En revanche, si  $0 < \lambda < 1$ , il existe un (unique) point  $\bar{r} > 0$  tel que  $\sigma(\bar{r}) = \lambda$ , et il faut alors choisir une fonction  $\chi$  qui change de signe au point  $\bar{r}$ , de façon que le produit  $\chi(\sigma - \lambda)$  soit, par exemple, toujours positif. En l'absence du terme non local  $g\Omega_n[\cdot]$ , on procède exactement comme dans la démonstration de la proposition 1.9 et on obtient une estimation de la forme

$$\|H_{n,\beta,\lambda}w\| \geq C|\beta|^{2/3}|\sigma'(\bar{r})|^{2/3}\|w\|, \quad \text{pour tout } w \in D(L_n).$$

Pour un  $\lambda$  fixé dans l'intervalle  $]0, 1[$ , cette borne implique que  $\|H_{n,\beta,\lambda}^{-1}\|$  décroît comme  $|\beta|^{-2/3}$  lorsque  $|\beta| \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire plus vite que suggéré par l'estimation (48). Mais il n'y a pas d'uniformité par rapport à  $\lambda$ , car la dérivée  $\sigma'(\bar{r})$  tend vers zéro lorsque  $\bar{r} \rightarrow 0$  (c'est-à-dire  $\lambda \rightarrow 1$ ) ou  $\bar{r} \rightarrow +\infty$  (c'est-à-dire  $\lambda \rightarrow 0$ ). Si on prend en compte tous les régimes possibles, on arrive bien à une décroissance de l'ordre de  $|\beta|^{-1/3}$  pour le supremum de la résolvante de  $H_{n,\beta}$  sur l'axe imaginaire.

L'argument se complique énormément lorsqu'on inclut le terme non local. Dans ce cas, le lemme 2.9 ne suffit plus quand  $\lambda \in ]0, 1[$ , car il fournit un contrôle de l'opérateur  $g\Omega_n[\cdot]$  en termes de  $\sigma$ , et non de  $\sigma - \lambda$ . Néanmoins, Li, Wei et Zhang parviennent à établir une variante du lemme 2.9 qui permet de contrôler une « grosse partie » de l'opérateur  $g\Omega_n[\cdot]$  en termes de  $|\sigma - \lambda|$ . Le reste peut être estimé par la méthode des multiplicateurs, en choisissant très soigneusement la fonction  $\chi$ . Les détails n'ont pas leur place ici, et le lecteur intéressé trouvera une démonstration complète, et assez technique, de l'estimation (48) dans l'article original de LI, WEI et ZHANG (2017).

**2.5.2. Basses fréquences angulaires.** — L'approche évoquée ci-dessus est totalement inapplicable dans le cas où  $|n| = 1$ , car alors l'opérateur non local  $g\Omega_n[\cdot]$  n'est nullement « négligeable » devant le terme de transport  $\sigma$ . De fait, on a la relation  $\Omega_n[rg] = r\sigma$ , qui montre que le terme non local annule totalement l'effet du transport sur un sous-espace de dimension un, lequel forme le noyau de l'opérateur  $M_n = \sigma - g\Omega_n[\cdot]$ . On doit donc se restreindre au sous-espace orthogonal  $Z_0$ , et la méthode des multiplicateurs ne permet pas d'exploiter facilement cette contrainte d'orthogonalité. L'approche proposée par Li, Wei et Zhang repose ici sur une observation brillante et spectaculaire : dans le sous-espace  $Z_0$ , on peut « tout simplement » éliminer le terme non local de l'opérateur  $M_n$  par un changement de variables !

En effet, considérons l'opérateur linéaire  $T : Z \rightarrow Z$  défini par la formule

$$(51) \quad (Tw)(r) = w(r) + \frac{g(r)}{r^2\sigma'(r)} \int_0^r w(s) s^2 ds, \quad r > 0,$$

pour tout  $w \in Z$ . On vérifie que  $T$  est bien défini, borné, et que son adjoint  $T^*$  est donné par l'expression duale

$$(52) \quad (T^*w)(r) = w(r) + rg(r) \int_r^\infty \frac{w(s)}{s\sigma'(s)} ds, \quad r > 0.$$

On remarque tout d'abord que la restriction de  $T$  au sous-espace (47) est unitaire.

LEMME 2.10. — *L'opérateur  $T : Z_0 \rightarrow Z$  est unitaire.*

*Démonstration.* — En utilisant l'identité

$$(53) \quad -\frac{d}{dr}(r^3\sigma'(r)) = r^3g(r),$$

qui découle immédiatement des définitions (44), on trouve que  $Tw = 0$  si  $w = rg$ . Il est facile de vérifier que l'équation  $Tw = 0$  n'a pas d'autre solution linéairement indépendante, de sorte que le noyau de  $T$  est engendré par  $rg$ . De même, on se convainc aisément que  $\ker(T^*) = \{0\}$ . Montrons à présent que la restriction de  $T$  au sous-espace  $Z_0 = \ker(T)^\perp$  est isométrique. En effet, si  $w \in Z_0$ , on a

$$Tw = w + \frac{g}{r^2\sigma'} I[w], \quad \text{où} \quad I[w](r) = \int_0^r w(s) s^2 ds,$$

de sorte que

$$\|Tw\|^2 = \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\langle w, \frac{g}{r^2\sigma'} I[w] \right\rangle + \left\| \frac{g}{r\sigma'} I[w] \right\|^2.$$

Noter que  $I[w](r) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow +\infty$  car  $w \in Z_0$ . Ainsi, en intégrant par parties et en utilisant (53), on trouve

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left\langle w, \frac{g}{r^2\sigma'} I[w] \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{r^3\sigma'(r)} \frac{d}{dr} |I[w]|^2 dr \\ &= - \int_0^\infty \frac{g}{r^3(\sigma')^2} |I[w]|^2 dr = - \left\| \frac{g}{r^2\sigma'} I[w] \right\|^2, \end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que  $\|Tw\|^2 = \|w\|^2$ . Ainsi  $T : Z_0 \rightarrow Z$  est isométrique et surjectif, car  $\ker(T^*) = \{0\}$ , donc  $T$  est unitaire.  $\square$

On conjugue à présent l'opérateur  $H_{n,\beta} = -L_n + i\beta M_n$  avec l'opérateur  $T$  introduit ci-dessus, en utilisant les propriétés « miraculeuses » suivantes, qui peuvent être vérifiées par calcul direct.

LEMME 2.11. — *Si  $|n| = 1$ , on a  $TL_nT^* = L_n - f$  et  $TM_nT^* = \sigma$ , où  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction définie par*

$$f(r) = \frac{2g(r)^2}{\sigma'(r)^2} + \frac{g(r)}{\sigma'(r)} \left( \frac{6}{r} - r \right) > 0, \quad r > 0.$$



En conséquence, pour analyser l'opérateur  $H_{n,\beta} = -L_n + i\beta M_n$  sur le sous-espace  $Z_0$ , il suffit de considérer sur  $Z$  tout entier l'opérateur conjugué

$$TH_{n,\beta}T^* = -L_n + f + i\beta\sigma,$$

qui ne contient plus aucun terme non local, et qui peut donc être étudié en utilisant les techniques évoquées dans la démonstration de la proposition 1.9. On trouve ainsi pour tout  $w \in D(H_{n,\beta}) \cap Z_0$  une estimation de la forme  $\|H_{n,\beta}w\| \geq C|\beta|^{1/3}\|w\|$ , qui implique la borne supérieure dans (49). Par un choix judicieux de la fonction  $w$ , on montre également qu'une telle borne est optimale, ce qui termine la démonstration.

*Remarque 2.12.* — La définition (51) du conjugateur  $T : Z_0 \rightarrow Z$  paraît totalement mystérieuse à ce stade, mais elle ne tombe évidemment pas du ciel. Pour expliquer son origine, on peut partir de la représentation de Dunford du groupe unitaire engendré par l'opérateur non local  $M_n$  :

$$e^{itM_n}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{it\lambda}(\lambda - M_n)^{-1}w \, d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

où  $\Gamma$  est un contour orienté dans le sens positif qui englobe le spectre de  $M_n$ , lequel coïncide avec l'intervalle  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  en vertu du lemme 2.9. En appliquant aux deux membres l'opérateur intégral (45), on trouve

$$\Omega_n[e^{itM_n}w] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{it\lambda} \Phi_n[\lambda, w] \, d\lambda, \quad \text{où } \Phi_n[\lambda, w] = \Omega_n[(\lambda - M_n)^{-1}w].$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction  $\Phi(r) = \Phi_n[\lambda, w](r)$  est solution de l'équation de Rayleigh non homogène

$$-\Phi'' - \frac{1}{r}\Phi' + \frac{n^2}{r^2}\Phi - \frac{g(r)\Phi}{\sigma(r) - \lambda} = \frac{w}{\sigma(r) - \lambda}, \quad r > 0,$$

qui est bien définie au moins lorsque  $\lambda \notin [0, 1]$ . On peut en outre établir un *principe d'absorption limite* et montrer, sous certaines hypothèses, que la quantité  $\Phi[\lambda, w]$  possède une limite lorsque  $\lambda$  tend vers le spectre de  $M_n$ . On arrive ainsi à la représentation intégrale

$$\Omega_n[e^{itM_n}w] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 e^{it\lambda} (\Phi_n[\lambda - i0, w] - \Phi_n[\lambda + i0, w]) \, d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui montre que l'évolution du terme non local  $g\Omega_n[\cdot]$  sous le flot engendré par  $M_n$  devient triviale au niveau des « données de diffusion »  $\Phi_n[\lambda - i0, w] - \Phi_n[\lambda + i0, w]$  : l'action de  $M_n$  correspond à la multiplication par  $\lambda$ . En utilisant ces observations et en prenant  $\lambda = \sigma(r)$ , LI, WEI et ZHANG (2017) parviennent à construire, dans le cas  $|n| = 1$ , un *opérateur d'onde* qui conjugue effectivement l'opérateur  $M_n = \sigma - g\Omega_n[\cdot]$  à sa partie locale, c'est-à-dire à l'opérateur de multiplication par la fonction  $\sigma$ . Une stratégie similaire a été mise en œuvre par WEI, ZHANG et ZHAO (2017) afin d'obtenir des estimations de dissipation accélérée pour l'opérateur linéarisé autour du flot de Kolmogorov.

## RÉFÉRENCES

- BAJER, Konrad, Andrew BASSOM et Andrew GILBERT (2001). « Accelerated diffusion in the centre of a vortex ». Dans : *J. Fluid Mech.* 437, p. 395–411.
- BECK, Margaret et C. Eugene WAYNE (2013). « Metastability and rapid convergence to quasi-stationary bar states for the two-dimensional Navier-Stokes equations. » Dans : *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.* 143.5, p. 905–927.
- BEDROSSIAN, Jacob et Michele COTI ZELATI (2017). « Enhanced dissipation, hypoellipticity, and anomalous small noise inviscid limits in shear flows ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 224.3, p. 1161–1204.
- BEDROSSIAN, Jacob et Nader MASMOUDI (2015). « Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations. » Dans : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 122, p. 195–300.
- BEDROSSIAN, Jacob, Nader MASMOUDI et Vlad VICOL (2016). « Enhanced dissipation and inviscid damping in the inviscid limit of the Navier-Stokes equations near the two dimensional Couette flow ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 219.3, p. 1087–1159.
- BEDROSSIAN, Jacob, Vlad VICOL et Fei WANG (2018). « The Sobolev stability threshold for 2D shear flows near Couette ». Dans : *J. Nonlinear Sci.* 28.6, p. 2051–2075.
- CHEMIN, Jean-Yves, Benoît DESJARDINS, Isabelle GALLAGHER et Emmanuel GRENIER (2006). *Mathematical geophysics. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*. T. 32. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, p. xii+250.
- CONSTANTIN, Peter, Alexander KISELEV, Leonid RYZHIK et Andrej ZLATOŠ (2008). « Diffusion and mixing in fluid flow ». Dans : *Ann. of Math. (2)* 168.2, p. 643–674.
- COTI ZELATI, Michele, Tarek ELGINDI et Klaus WIDMAYER (2019). « Enhanced dissipation in the Navier-Stokes equations near the Poiseuille flow ». eprint : [arXiv: 1901.01571](https://arxiv.org/abs/1901.01571).
- DENCKER, Nils, Johannes SJÖSTRAND et Maciej ZWORSKI (2004). « Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators ». Dans : *Comm. Pure Appl. Math.* 57.3, p. 384–415.
- DENG, Wen (2013a). « Pseudospectrum for Oseen vortices operators. » Dans : *Int. Math. Res. Not.* 2013.9, p. 1935–1999.
- (2013b). « Resolvent estimates for a two-dimensional non-self-adjoint operator. » Dans : *Commun. Pure Appl. Anal.* 12.1, p. 547–596.
- GALLAGHER, Isabelle, Thierry GALLAY et Francis NIER (2009). « Spectral asymptotics for large skew-symmetric perturbations of the harmonic oscillator ». Dans : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 12, p. 2147–2199.
- GALLAY, Thierry (2018). « Enhanced dissipation and axisymmetrization of two-dimensional viscous vortices ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 230.3, p. 939–975.

- GALLAY, Thierry et C. Eugene WAYNE (2002). « Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on  $\mathbb{R}^2$ . » Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 163.3, p. 209–258.
- (2005). « Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation ». Dans : *Comm. Math. Phys.* 255.1, p. 97–129.
- GRENIER, Emmanuel, Yan GUO et Toan NGUYEN (2016a). « Spectral instability of characteristic boundary layer flows ». Dans : *Duke Math. J.* 165.16, p. 3085–3146.
- (2016b). « Spectral instability of general symmetric shear flows in a two-dimensional channel ». Dans : *Adv. Math.* 292, p. 52–110.
- GRENIER, Emmanuel, Toan NGUYEN, Frédéric ROUSSET et Avy SOFFER (2018). « Linear inviscid damping and enhanced viscous dissipation of shear flows by using the conjugate operator method ». eprint : [arXiv:1804.08291](https://arxiv.org/abs/1804.08291).
- HÖRMANDER, Lars (2009). *The analysis of linear partial differential operators. IV. Classics in Mathematics. Fourier integral operators*, Reprint of the 1994 edition. Springer-Verlag, Berlin, p. viii+352.
- IBRAHIM, Slim, Yasunori MAEKAWA et Nader MASMOUDI (2017). « On pseudospectral bound for non-selfadjoint operators and its application to stability of Kolmogorov flows ». eprint : [arXiv:1710.05132](https://arxiv.org/abs/1710.05132).
- KELVIN, Lord (1887). « Stability of fluid motion : rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates ». Dans : *Philos. Mag* 24.5, p. 188–196.
- LI, Te, Dongyi WEI et Zhifei ZHANG (2017). « Pseudospectral and spectral bounds for the Oseen vortices operator ». eprint : [arXiv:1701.06269](https://arxiv.org/abs/1701.06269).
- MAEKAWA, Yasunori (2011). « Spectral properties of the linearization at the Burgers vortex in the high rotation limit. » Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 13.4, p. 515–532.
- MASMOUDI, Nader et Weiren ZHAO (2019). « Stability threshold of the 2D Couette flow in Sobolev spaces ». eprint : [arXiv:1908.11042](https://arxiv.org/abs/1908.11042).
- MOUHOT, Clément et Cédric VILLANI (2011). « On Landau damping. » Dans : *Acta Math.* 207.1, p. 29–201.
- MOURRE, Eric (1981). « Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. » Dans : *Commun. Math. Phys.* 78, p. 391–408.
- ORR, William (1907). « The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid. Part I : A Perfect Liquid. Part II : A Viscous Liquid ». Dans : *Proc. Roy. Irish Academy* 27, p. 9–138.
- PAZY, Amnon (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. T. 44. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, p. viii+279.
- RAYLEIGH, Lord (1879/80). « On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions ». Dans : *Proc. Lond. Math. Soc.* 11, p. 57–70.
- REED, Michael et Barry SIMON (1972). *Methods of modern mathematical physics. 1 : Functional analysis*. Academic Press, New York.

- TREFETHEN, Lloyd N. et Mark EMBREE (2005). *Spectra and pseudospectra*. The behavior of nonnormal matrices and operators. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. xviii+606.
- VILLANI, Cédric (2009). « Hypocoercivity ». Dans : *Mem. Amer. Math. Soc.* 202.950, p. iv+141.
- WEI, Dongyi et Zhifei ZHANG (2019). « Enhanced dissipation for the Kolmogorov flow via the hypocoercivity method. » Dans : *Sci. China, Math.* 62.6, p. 1219–1232.
- WEI, Dongyi, Zhifei ZHANG et Weiren ZHAO (2017). « Linear inviscid damping and enhanced dissipation for the Kolmogorov flow ». eprint : [arXiv:1711.01822](https://arxiv.org/abs/1711.01822).

Thierry Gallay  
Institut Fourier  
Université Grenoble Alpes  
100 rue des maths  
38610 Gières  
France  
*E-mail* : [Thierry.Gallay@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:Thierry.Gallay@univ-grenoble-alpes.fr)