Optique diffractive périodique à phases courbes

Éric DUMAS

IRMAR, campus Beaulieu, Université Rennes 1, 35042 Rennes Cédex, France

Résumé

On donne des approximations BKW à trois échelles pour des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires à coefficients variables, et on montre la stabilité de ces développements asymptotiques. Les profils satisfont des équations de transport le long des rayons à l'échelle la plus lente, et de Schrödinger (à coefficients variables), traduisant la diffraction transverse, à l'échelle intermédiaire.

Periodic diffractive optics with curved phases

Abstract

We give 3-scales WKB asymptotics for nonlinear hyperbolic systems with variable coefficients. Our profiles are transported, at the slower scale, along the rays of geometric optics, and are diffracted, at the intermediate scale, according to some (variable coefficients) Schrödinger equation.

1 Introduction

On s'intéresse à un système hyperbolique quasi-linéaire,

$$L(x,u,\partial)u = \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(x,u)\partial_j u = 0, \text{ où } x=(t,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^{1+d}. \quad (1)$$

Hypothèse 1 *Les coefficients $A_j(x,u)$ sont des matrices* hermitiennes, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{2N}$. *De plus, les valeurs propres $\lambda_k(x,\xi)$ du linéarisé (en 0) $L_1(x,\xi) := \xi_0 + \sum_{j=1}^{d}\xi_j A_j(x,0)$ sont à multiplicité* constante *en x,ξ.*

Email address: `dumas@maths.univ-rennes1.fr` (Éric DUMAS).
URL: `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dumas` (Éric DUMAS).

On cherche des solutions régulières du problème de Cauchy associé à (1) *oscillantes*, à *trois échelles* (développement asymptotique dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$) :

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon \sum_{n\geq 0} \varepsilon^{n/2} u_n \left(x, \frac{\psi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\phi(x)}{\varepsilon} \right), \tag{2}$$

Les *profils* $u_n(x,\omega,\theta)$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{T}^p\times\mathbb{T}^q,\mathbb{C}^N)$, *périodiques* en ω et θ. Les *phases* rapides $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_q)$ sont régulières et $\mathbb{Q}$-indépendantes, de même que les phases lentes, $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_p)$. La présence de plusieurs phases rapides donne la possibilité d'interactions résonantes entre différentes ondes ; les phases intermédiaires régissent la *diffraction* de ces ondes, dans plusieurs directions (transverses aux rayons de l'optique géométrique) si $p>1$. L'amplitude ε correspond au régime de l'optique *faiblement non linéaire.*

Notre but est de démontrer l'existence de la (famille de) solution(s) régulière(s) u^ε sur un intervalle de temps *indépendant de* ε (bien que la famille de données initiales explose dans H^s), d'en donner une description asymptotique (2), et d'obtenir la stabilité de ces résultats par perturbation. On va montrer :

Théorème 1 *Sous les hypothèses 1 et 2, avec* $\Omega_{\underline{t}} := \overline{\Omega} \cap \{t \leq \underline{t}\}$ *:*
i) Les parties polarisées des profils (voir partie 2) étant données sur Ω_0*, on construit des profils* u_n *sur* $\Omega_{t^\star}$ *et* u^ε_{app} *satisfaisant (2), avec* $L(u^\varepsilon_{app},\partial)u^\varepsilon_{app}\sim 0$.
ii) Pour tout $f^\varepsilon\sim 0$ *dans* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$*, il existe* ε_0 *tel que la solution du problème de Cauchy* $L(u^\varepsilon,\partial)u^\varepsilon = f^\varepsilon$, $u^\varepsilon_{|t=0}(y)\sim u^\varepsilon_{app}(0,y)$ *existe sur* $\Omega_{t^\star}$*, pour* $\varepsilon\leq\varepsilon_0$*. De plus, elle admet un développement asymptotique à tout ordre :* $u^\varepsilon - u^\varepsilon_{app}\sim 0$.

Ce type de problématique apparaît par exemple lors de la perturbation de données initiales à deux échelles, si $u^\varepsilon_{|t=0} = \varepsilon h^\varepsilon(y,[\phi^0(y)+\sqrt{\varepsilon}\psi^0(y)]/\varepsilon)$, avec $h^\varepsilon(x,\theta)$ périodique en θ : on se ramène à (2) par $g^\varepsilon(y,\omega,\theta) := h^\varepsilon(y,\theta+\omega)$.

L'Ansatz (2) a été proposé par J.K. Hunter ([5]) pour l'étude (formelle) de frontières ombre/lumière, avec d'autres dépendances des profils en la variable intermédiaire ω. Cette étude est effectuée rigoureusement dans [2], et généralise les résultats en temps long de [1], [7], qui ne concernent que des phases planes ($\phi=\beta.x$), et donc des systèmes, ou équations, à coefficients constants.

La difficulté réside dans la présence de coefficients variables, qui peuvent faire obstacle à l'intégrabilité des systèmes déterminant les profils (voir 2), ainsi que dans le caractère multiphase. En effet, en dimension d'espace $d>1$, Joly, Métivier et Rauch ont montré ([6]) que pour éviter les phénomènes de focalisation, les phases considérées doivent vérifier une propriété de *cohérence* :

Hypothèse 2 *La somme* $\Phi+\Psi$ *des espaces vectoriels (réels) engendrés par les* ϕ_ν *et les* ψ_μ*, est* L_1*-cohérente : il existe e elliptique et p indépendant de x, symboles homogènes tels que* $\det L_1(d(\gamma.\psi+\alpha.\phi)) = p(\gamma,\alpha)e(x,\gamma,\alpha)$.

2 Développements formels Brillouin-Kramers-Wentzels

Afin de construire u^ε_{app}, solution approchée de (1) admettant le développement asymptotique (2), on annule le développement de Lu^ε_{app}. La cohérence permet une analyse de Fourier mode par mode de chacun des termes : pour chaque profil, $u_n(x,\omega,\theta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^q} u_n^\alpha(x,\omega)e^{i\alpha.\theta} = \sum_{(\alpha,\gamma)\in\mathbb{Z}^q\times\mathbb{Z}^p} u_n^{\alpha,\gamma}(x)e^{i(\alpha.\theta+\gamma.\omega)}$. On est alors confronté à des équations matricielles du type $L_1(d(\alpha.\phi))u^\alpha = f^\alpha$.

Définition 1 *Si $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_r) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, le projecteur spectral π^φ_β sur $\ker L_1(d(\beta.\varphi))$ est régulier en x (hypothèse 1), et on note $\mathcal{C}^\varphi_x$ l'ensemble caractéristique $\{\beta\in\mathbb{R}^r\setminus\{0\} \ / \ \det L_1(d(\beta.\varphi) = 0\}$.*
On définit le projecteur $\mathbb{E}^\varphi_{L_1}$ par $\mathbb{E}^\varphi_{L_1}\left(\sum u^\beta e^{i\beta.\theta}\right) := \sum_{\beta\in\mathcal{C}^\varphi_x\cup\{0\}} \pi^\varphi_\beta u^\beta e^{i\beta.\theta}$.

L'analyse fait apparaître l'opérateur $\pi^\varphi_\beta L_1(\partial_x)\pi^\varphi_\beta$, habituel en optique géométrique, et un opérateur d'ordre deux, propre au cas diffractif ; ils sont scalaires :

Proposition 1 *i) Sous l'hypothèse 2, $\mathcal{C}^\phi$ et $\mathcal{C}^\psi$ sont indépendants de $x\in\overline{\Omega}$.*
*ii) Sous l'hypothèse 1, si $\alpha\in\mathcal{C}^\phi$, $\partial_t(\alpha.\phi)+\lambda(\partial_y(\alpha.\phi)) = 0$ (*équation eikonale*).*
Alors, $\pi^\phi_\alpha L_1(\partial_x)\pi^\phi_\alpha = (\partial_t+\partial_\eta\lambda(\partial_y(\alpha.\phi)).\partial_y)\pi^\phi_\alpha$, transport *noté $V^\phi_\alpha(\partial_x)\pi^\phi_\alpha$, et on note $D^\phi_\alpha(x,\partial_\omega) := \frac{1}{2}\partial^2_\eta\lambda(\partial_y(\alpha.\phi)).(\partial\psi.\partial_\omega,\partial\psi.\partial_\omega)$.*
On définit $\mathbf{V}(\partial_x)u := \sum_{\alpha\in\mathcal{C}^\phi} V^\phi_\alpha(\partial_x)u^\alpha e^{i\alpha.\theta}$, $\mathbf{D}(\partial_\omega)u := \sum_{\alpha\in\mathcal{C}^\phi} D^\phi_\alpha(\partial_\omega)u^\alpha e^{i\alpha.\theta}$.
iii) Sous l'hypothèse 2, Ψ est $\mathbf{V}$-cohérent (et $V^\phi_\alpha(\partial_x)\varphi = 0$ signifie : φ constante le long des $(\alpha.\phi)$-rayons).

L'annulation du développement asymptotique de Lu^ε_{app} équivaut alors aux équations de profils pour les parties *polarisées* $v_n := \mathbb{E}^\psi_{L_1}\underline{u}$ et $w_n := \mathbb{E}^\psi_{\mathbf{V}}\mathbb{E}^\phi_{L_1}u^\star$ (avec $\underline{u} = \langle u\rangle$ la moyenne de u en θ, $u^\star := u - \underline{u}$) :

$$\mathbb{E}^\psi_{L_1}\underline{v}_0 = v_0 \text{ (polarisation en } \partial_\omega) \tag{3}$$
$$\mathbb{E}^\psi_{\mathbf{V}}\mathbb{E}^\phi_{L_1}w_0^\star = w_0 \text{ (polarisation en } \partial_\omega \text{ et } \partial_\theta) \tag{4}$$
$$\mathbb{E}^\psi_{L_1}L_1(\partial_x)\mathbb{E}^\psi_{L_1}v_0 + \mathbb{E}^\psi_{L_1}\langle B(v_0+w_0,\partial_\theta)w_0\rangle = 0 \text{ (transport)} \tag{5}$$
$$\mathbb{E}^\psi_{\mathbf{V}}\mathbb{E}^\phi_{L_1}\left[\mathbf{V}(\partial_x)w_0 - i\mathbf{D}(\partial_\omega)w_0 + (B(v_0+w_0,\partial_\theta)w_0)^\star\right] = 0 \text{ (NLS)}, \tag{6}$$

où $B(u,\partial_\theta)v := \sum_{j,\nu}\partial_j\phi_\nu(x)(\partial_u A_j(x,0).u)\partial_{\theta_\nu}v$, et pour $n\geq 1$, on a des équations semblables pour v_n et w_n, mais *linéaires*, à seconds membres fonctions des profils précédents.

Les parties non polarisées des profils sont données directement par inversion elliptique ($L_1(\beta.\varphi)$ est inversible si $\beta\notin\mathcal{C}^\varphi$), et leurs valeurs initiales ne pourront être choisies librement, pour un problème de Cauchy.

3 Étapes de la preuve du théorème 1

• La cohérence des espaces de phases assure la commutation des équations (5) et (6), nécessaire à l'intégrabilité du système. Celui-ci, à coefficients variables, est résolu par estimations d'énergie sur des espaces de Sobolev *anisotropes* (pour prendre en compte les commutateurs entre $\partial_{y,\omega,\theta}$ et les équations) :

$$u \in \mathcal{E}^s(t) \text{ si } \partial^\gamma_{y,\omega,\theta} u \in \mathcal{C}([0,t], L^2), \text{ pour } [\gamma] := |\gamma_y| + (|\gamma_\omega| + |\gamma_\theta|)/2 \leq s.$$

Pour donner un sens aux équations, il faut pouvoir restreindre l'action des opérateurs $\mathbb{E}$ à $\mathcal{E}^s$. Ceci nécessite des hypothèses d'absence de «petits diviseurs», dont on prouve la généricité dans [3]. On résout le problème de Cauchy via un schéma itératif, grâce à l'estimation (héritée de l'hyperbolicité de (1)) :

Proposition 2 *Soit $v', w' \in \mathcal{E}^s(\underline{t})$, $s > \frac{2d+p+q}{4} + 1$. On note $\mathcal{L}(v', w')[v, w] = 0$ le linéarisé de (3)-(6) en (v', w'). Il existe $C(\| v', w' \|_s)$ tel que : $\forall v, w \in \mathcal{E}^s(\underline{t})$,*

$$\| v(t) \|_s^2 + \| w(t) \|_s^2 \leq e^{Ct} \left(\| v(0) \|_s^2 + \| w(0) \|_s^2 \right) + \int_0^t e^{C(t-t')} \| \mathcal{L}(t') \|_s^2 \, dt'.$$

• On obtient u^ε_{app}, solution asymptotique de (1) à tout ordre par construction, par une sommation «à la Borel», ce qui permet de construire la solution exacte du théorème 1 grâce aux méthodes de perturbation d'O. Guès ([4]).

Références

[1] Donnat P., Joly J.L., Métivier G., Rauch J. Diffractive nonlinear geometric optics I. Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, Palaiseau (1995), XVII1-XVII23.

[2] Dumas E. Nonlinear diffractive optics with curved phases: dispersion of 'ray packets' and singular rays, en préparation.

[3] Dumas E. Periodic diffractive optics with curved phases, en préparation.

[4] Guès O. Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires. Asymptotic Analysis (1993), 241-269

[5] Hunter J.K. Transverse diffraction of nonlinear waves and singular rays, Siam J. Appl. Math. 48 (1988), 1-37.

[6] Joly J.-L., Métivier G., Rauch J. Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 28 (1995), 51-113.

[7] Joly J.-L., Métivier G., Rauch J. Diffractive nonlinear geometric optics with rectification. Indiana Univ. Math. J. 47, 4 (1997), 1167-1241.