Existence globale pour les systèmes de Maxwell-Bloch

Éric Dumas

Les équations de Maxwell-Bloch modélisent la propagation d'une onde électromagnétique (champ électrique E, champ magnétique H) dans un milieu matériel décrit par N niveaux quantiques grâce à la matrice densité ρ [10]:

$$\begin{cases} \mu\partial_t H + \operatorname{rot} E = 0, \\ \varepsilon\partial_t E - \operatorname{rot} H = -\partial_t P, \\ i\partial_t \rho = [\Omega - E\cdot\Gamma,\rho]. \end{cases} \tag{1}$$

Les variables d'espace-temps sont $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+3}$, les champs E et H sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les constantes μ et ε, strictement positives, sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique. Le couplage s'effectue via la polarisation P du milieu, champ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ donné par la loi constitutive :

$$P = \operatorname{Tr}(\Gamma\rho),$$

où Γ, l'opérateur moment dipolaire électrique, est donné par le matériau, et est une matrice $N \times N$ hermitienne, à valeurs dans $\mathbb{C}^3$. La matrice Ω, de taille $N \times N$, hermitienne, à valeurs dans $\mathbb{C}$, représente le hamiltonien libre du système matériel (en l'absence de champ électromagnétique). La matrice densité ρ est hermitienne –et positive, de taille $N \times N$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans la base des états propres du système, son $n$ième terme diagonal est la proportion d'états quantiques situés dans le $n$ième niveau d'énergie (ainsi, $\rho_{nn} \geq 0$, et $\sum_n \rho_{nn} = 1$ dans le matériau), et le terme extra-diagonal ρ_{jk} est lié à la probabilité de transition du niveau j vers le niveau k.

Enfin, il faut rajouter à ces équations les lois de conservation du courant et de la charge :

$$\operatorname{div} H = 0, \ \operatorname{div}(\varepsilon E + P) = 0 \tag{2}$$

(qui sont –au moins formellement– satisfaites pour tout temps dès lors qu'elles le sont initialement).

Le système (1) est symétrique hyperbolique, si bien que, pour des données initiales assez régulières ($H^s(\mathbb{R}^3)$, pour $s > 3/2$), on a existence locale des solutions, sur un intervalle de temps dépendant *a priori* de la taille des données

initiales. Dès lors, deux questions se posent :
Q1) Y a-t-il existence globale de ces solutions? Cette question est motivée en particulier par le fait que les échelles de temps pertinentes en optique sont "longues" [9].
Q2) Y a-t-il des solutions globales ayant la régularité "naturelle" donnée par la proposition 0.1 ci-dessous, qui indique la seule énergie $\mathcal{E}$ connue qui puisse être contrôlée pour ce système?
Définition 0.1. *On note L_0 l'espace des $U = (E,B,\rho) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conservations (2), et on appelle* solution d'énergie *tout $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L_0)$ solution de (1) au sens des distributions.*

Par des estimations d'énergie classiques, on obtient la
Proposition 0.1. *On suppose $\Gamma,\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.*
Si $U = (E,B,\rho)$ est une solution d'énergie de (1), alors :
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho(t,x)| := (\mathrm{Tr}\,(\rho(t,x)^2))^{1/2}$ est constante en t.
(ii) Il existe $C = C(\|\Omega\|_{L^\infty},\|\Gamma\|_{L^\infty},\|\rho\|_{L^\infty})$ telle que, pour tout temps t,

$$\mathcal{E}(t) := \|\sqrt{\varepsilon}E(t)\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\mu}H(t)\|^2_{L^2} + \|\rho(t)\|^2_{L^2} \leq e^{Ct}\mathcal{E}(0).$$

Remarque 0.1. *i) Question subsidiaire : les solutions d'énergie étant des solutions faibles, a-t-on unicité pour une telle classe de solutions ? Sinon, quelle régularité doit-on imposer aux données pour l'obtenir ?*
ii) Le choix de considérer que $\rho(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ peut paraître surprenant, compte tenu de $\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1$, mais il faut bien penser que cette identité n'est valable que dans le matériau, et que si celui-ci est fini, le support de ρ doit être considéré comme compact.
iii) La proposition 0.1 reste valable lorsque $\varepsilon,\mu \in L^\infty_x(\mathbb{R}^3)$, mais nous ne savons pas prouver l'existence des solutions d'énergie dans ce cas.

Avant d'aller plus loin, rappelons quelques résultats sur ce problème :
• Pour les systèmes de Maxwell-Bloch à deux niveaux ($N = 2$), Donnat et Rauch [2] ont obtenu l'existence globale des solutions $H^s(\mathbb{R}^3)$, pour $s \geq 2$, par des estimations d'énergie et de type Yudovich, et des arguments usuels de prolongement (type EDO). La spécificité du cas à deux niveaux tient au fait que l'équation de Bloch sur la matrice densité peut être réécrite comme un système portant sur la polarisation P et sur $n := \rho_{11} - \rho_{22}$, la différence de population entre les deux niveaux :

$$\begin{cases} \partial_t^2 P + \dfrac{1}{T_1}\partial_t P + \omega^2 P = C_1 n E, \\ \partial_t n + \dfrac{n - n_0}{T_2} = -C_2 \partial_t P \cdot E. \end{cases}$$

La structure particulière des non-linéarités entraîne des compensations, menant à la conservation (exacte) d'une énergie de type L^2, et au contrôle d'une énergie H^1.

• Pour le système de Maxwell dans un matériau ferromagnétique, où $M(t,x)$ est la magnétisation du milieu,

$$\begin{cases} \mu\partial_{\mathbf{t}} H + \operatorname{rot} E = -\partial_{\mathbf{t}} M, \\ \varepsilon\partial_{\mathbf{t}} E - \operatorname{rot} H = 0, \\ \partial_{\mathbf{t}} M = \alpha \left(M \wedge H + \dfrac{\beta}{|M|} M \wedge (M \wedge H) \right), \end{cases}$$

Joly, Métivier et Rauch [6] ont montré l'existence globale des solutions d'énergie (solutions faibles), ainsi que la propagation de la régularité $H^{\mathbf{s}}$ $(s > 0)$ de la partie à divergence nulle des champs, et l'unicité dans le cas des solutions fortes (rotationnel L^2) en dimension trois d'espace, pour des coefficients constants. Haddar [5] a obtenu des résultats similaires en deux dimensions d'espace, avec une permittivité électrique $\varepsilon = \varepsilon(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ –μ joue un rôle analogue, mais est constant dans les matériaux "physiques".

Ces démonstrations reposent sur la structure géométrique des non-linéarités $(M.\partial_{\mathbf{t}} M = 0)$, qui donne des estimations *a priori* (L^2 pour les champs E et H, ponctuelles pour M) analogues à celles de la proposition 0.1, et sur la compatibilité de ces non-linéarités avec la partie différentielle du système : le découpage des champs en partie à rotationnel nul et partie à divergence nulle permet d'utiliser la compacité par compensation. Enfin, l'unicité repose sur des estimations de Strichartz "précisées" pour l'équation des ondes, dans le cas limite $\Box u \in L^1_{\mathbf{t}}(L^2_{\mathbf{x}})$.

Nous allons suivre la même stratégie avec les équations de Maxwell-Bloch à nombre de niveaux N quelconque (fini), en dimension trois d'espace, pour montrer :

Théorème 0.1. *Soit* $\Omega,\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ *($\varepsilon,\mu =$ cstes). Si $U_0 \in L_0$, il existe une solution d'énergie (globale) U de (1) ayant U_0 pour donnée initiale.*

Théorème 0.2. *Si de plus* $\operatorname{rot} E_0, \operatorname{rot} H_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, *alors* $\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$, *et U est unique.*

Remarque 0.2. *i) On peut généraliser ces résultats à d'autres types de non-linéarités. Un cas simple, et physiquement pertinent, correspond à l'ajout de "relaxations transverses" [1] : $i\partial_{\mathbf{t}}\rho = [\Omega - E \cdot \Gamma, \rho] - i\gamma\rho_{\mathbf{nd}}$, où $\rho_{\mathbf{nd}}$ est la partie hors diagonale de ρ, et γ une constante positive. Dans ce cas, l'estimation ponctuelle de la proposition 0.1 est remplacée par $|\rho(t,x)| \le |\rho(0,x)|$, suffisant*

pour tout ce qui suit.
ii) Une extension intéressante consisterait à prendre ε variable. On peut aussi s'intéresser au cas d'un nombre infini de niveaux ($N = \infty$), avec $\rho(t,x) \in l^2(\mathbb{N}^2)$; nous ne savons pas écrire les estimations d'énergie correspondantes.

Dans ce qui suit, on considèrera que $\varepsilon = \mu = 1$.

1 Preuve du théorème 0.1 : existence des solutions d'énergie

1.1 Régularisation

On utilise le multiplicateur de Fourier S , de symbole $\chi \ := \chi(./\lambda)$, où la fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,[0,1])$ vaut 1 si $|\xi| \leq 1/2$, et 0 si $|\xi| \geq 1$. Ainsi, S est continu de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, de norme 1,
de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, de norme $\lambda^{3=2}$,
de $L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$,$1 \leq p < \infty$, de norme $\|\hat{\chi}\|_{\mathbf{L}^1}$.
Soit $L^2(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont la transformée de Fourier a un support contenu dans $\{|\xi| \leq \lambda\}$.

On définit alors U par $U_{|t=0} = (S \ E_{|t=0},S \ B_{|t=0},\rho_{|t=0})$ et

$$
(3) \qquad \begin{cases} \partial_{\mathbf{t}} H \ + \mathrm{rot}\, E \ = 0, \\ \partial_{\mathbf{t}} E \ - \mathrm{rot}\, H \ = -\partial_{\mathbf{t}} S \ \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho \ ), \\ i\partial_{\mathbf{t}}\rho \ = [\Omega - E \ \cdot \Gamma,\rho \ ], \end{cases}
$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une équation différentielle $\partial_{\mathbf{t}} U \ = G \ (U \ )$, avec G continu sur $L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ (grâce à la troncature en fréquence et au fait que $L^2(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continuement dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$) et localement lipschitzien (car polynomial). La théorie classique des EDO sur les Banach et les estimations d'énergie usuelles donnent alors :

Proposition 1.1. *Pour tous $U_0 \in L_0$ et $\lambda \geq 1$, il existe un unique $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$ solution de (3) et il existe une constante $C = C(\|\Omega,\Gamma,\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty})$ telle que :*
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho \ (t,x)| = |\rho_0(x)|$ pour tout temps t.
(ii) Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, $\mathrm{div}\, H \ = 0$, $\mathrm{div}\, (E \ + S \ \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho \ )) = 0$.
(iii) Pour tout temps t, $\mathcal{E}(U \ (t)) \leq e^{\mathbf{Ct}}\mathcal{E}(U_0)$.

Grâce à ces conservations, on peut extraire une suite de λ telle que U converge vers un certain U^∞, faiblement dans $L^2_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$ (et faible-$\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, pour ρ). Dans ce qui suit, on notera $\Omega_{\mathsf{T}} := [0,T] \times \mathbb{R}^3$.

1.2 Convergence forte

Pour passer R15 [illegible] 552 TfΩ- [illegible] -18.72 35.2 TfΩrgeΩ R33 7im792 0 TTfΩ06Ω(p)TjΩ6

conv552 Tf 4. -14.52 TTd (our)Tj /R18

Concernant les champs E et H, en écrivant le système satisfait par la différence $\delta U := U \ \ - U^{\infty}$, on a par estimation d'énergie :

$$\|\delta E,\delta H\|_{\mathbf{L}^2}(t) \leq C \int_0^{\mathbf{t}} \|\delta F(t')\|_{\mathbf{L}^2} dt',$$

avec le second membre (obtenu en passant à la limite dans les termes non-linéaires grâce à la convergence forte de $\rho \ \ $) :

$$\delta F = i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[\Omega,\delta\rho]) - i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[(E^{\infty} - E \ \ ) \cdot \Gamma,\rho \ \ ]) - i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[E^{\infty} \cdot \Gamma,\delta\rho]).$$

1) Le premier terme converge vers 0 dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$, comme $\delta\rho$.
2) De même, le dernier terme converge vers 0 dans $L^1(\Omega_{\mathbf{T}})$, donc presque partout (à extraction d'une sous-suite près), et à nouveau, l'estimation L^{∞} sur $\rho \ \ $ montre la convergence dans $L^2(\Omega_{\mathbf{T}})$, par convergence dominée.
3) Enfin, le deuxième terme est majoré par $C\|\rho\|_{\mathbf{L}^{\infty}}\|\delta E(t')\|_{\mathbf{L}^2}$.
On obtient finalement $\|\delta E,\delta H\|_{\mathbf{L}^2}(t) \leq C(\int_0^{\mathbf{t}} \|\delta E(t')\|_{\mathbf{L}^2} dt' + o(1))$ quand $\lambda \to \infty$, et le lemme de Gronwall montre que $\delta E,\delta H \to 0$ dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$.

Preuve de la proposition 1.2 :

On multiplie (4) par $e^{-2|\mathbf{x}|^2}$, et on intègre sur $\Omega_{\mathbf{t}}$:

$$\|e^{-|\mathbf{x}|^2}(\rho \ \ - \rho \ \ )(t)\|^2_{\mathbf{L}^2} = -i \iint e^{-2|\mathbf{x}|^2} \Big(\mathrm{Tr}\,\big([(E^{\infty} - E \ \ ) \cdot \Gamma,\rho \ \ ](\rho \ \ - \rho \ \ )\big) + \mathrm{Tr}\,\big([(E^{\infty} - E \ \ ) \cdot \Gamma,\rho \ \ ](\rho \ \ - \rho \ \ )\big)\Big) dx dt'.$$

Introduisons alors les multiplicateurs de Fourier $\pi_{\|}$ et $\pi_{\perp}$, de symboles respectifs $(\xi/|\xi|,.)\xi/|\xi|$ et $(\xi/|\xi| \wedge .) \wedge \xi/|\xi|$, homogènes de degré zéro. Ces opérateurs sont donc continus de $L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même, pour tout p fini [11]. Ce sont les projecteurs orthogonaux (dans $L^2(\mathbb{R}^3)$) sur les champs de vecteurs à rotationnel nul et à divergence nulle, respectivement (décomposition de Hodge). La condition de divergence (2) entraîne :

$$\pi_{\|} E \ \ = -\pi_{\|} S \ \ \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho \ \ ), \text{ et } \pi_{\|} E^{\infty} = -\pi_{\|} \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^{\infty}).$$

Quant à la partie sans divergence de $E \ \ $, par les équations de Maxwell, elle est solution d'une équation d'onde :

$$(\partial^2_{\mathbf{t}} - \Delta)\pi_{\perp} E \ \ = -\partial^2_{\mathbf{t}} \pi_{\perp} S \ \ P \ \ .$$

On a alors la majoration de $\|e^{-|\mathbf{x}|^2}(\rho \ - \rho \ )(t)\|^2_{\mathbf{L}^2}$ par la somme de deux termes ($\nu = \lambda$ ou μ) s'écrivant chacun, grâce à la décomposition de Hodge :

$$\begin{aligned} (5) \qquad & C(\Gamma,\rho) \iint_{\Omega_t} e^{-2|\mathbf{x}|^2} |\rho \ - \rho \ | \, |S \ \pi_{\|} \mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho \ - \rho^\infty))| dx dt' \\ & + \left| \iint_{\Omega_t} e^{-2|\mathbf{x}|^2} Q(x,\rho \ ,\rho \ ) \pi_\perp (E^\infty - E \ ) dx dt' \right|. \end{aligned}$$

1) Dans le dernier terme, Q est quadratique en $(\rho \ ,\rho \ )$. Ainsi, $Q(\rho \ ,\rho \ )$ et $\pi_\perp(E^\infty - E \ )$ sont bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$. La famille d'applications $t \mapsto \iint_{\Omega_t} e^{-2|\mathbf{x}|^2} Q(x,\rho \ ,\rho \ )\pi_\perp(E^\infty - E \ ) dx dt'$ est donc uniformément (en ν) équicontinue sur $[0,T]$, et il suffit de montrer l'inégalité de la proposition à t fixé. De plus, comme le poids $e^{-2|\mathbf{x}|^2}$ tend vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, pour $R = R(\delta)$,

$$\left| \iint_{[0;\mathbf{t}]\times\{|\mathbf{x}|>\mathbf{R}\}} e^{-2|\mathbf{x}|^2} Q(x,\rho \ ,\rho \ )\pi_\perp(E^\infty - E \ ) dx dt' \right| \le \delta.$$

Sur le compact $[0,t]\times\{|x| \le R\}$, on utilise la compacité par compensation [3], [12] : comme les variétés caractéristiques

$$\mathcal{C}_{@_t} := \{\tau = 0\} \setminus \{0\} \text{ et } \mathcal{C}_\Box := \{\tau^2 - |\xi|^2 = 0\} \setminus \{0\}$$

sont disjointes, il suffit de vérifier que
- $e^{-|\mathbf{x}|^2} Q(x,\rho \ ,\rho \ )$ et sa dérivée temporelle sont bornés dans $L^2(\Omega_{\mathbf{T}})$;
- $\pi_\perp(E \ - E^\infty)$ est borné dans $L^2(\Omega_{\mathbf{T}})$, et $(\partial^2_{\mathbf{t}} - \Delta)\pi_\perp E$, égal à $i\partial_{\mathbf{t}}\pi_\perp S$ Tr $(\Gamma \cdot [\Omega - E \ .\Gamma,\rho \ ])$, est borné dans $H^{-1}(\Omega_{\mathbf{T}})$. À la limite, cela est vrai aussi pour $(\partial^2_{\mathbf{t}} - \Delta)\pi_\perp E^\infty$, et donc finalement pour $(\partial^2_{\mathbf{t}} - \Delta)\pi_\perp(E \ - E^\infty)$. Par conséquent,

$$\iint_{[0;\mathbf{t}]\times\{|\mathbf{x}|\le\mathbf{R}\}} e^{-2|\mathbf{x}|^2} Q(x,\rho \ ,\rho \ )\pi_\perp(E^\infty - E \ ) dx dt' \underset{; \ \to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) On majore le premier terme par

$$\begin{aligned} (6) \qquad & \iint_{\Omega_t} e^{-|\mathbf{x}|^2} |\rho \ - \rho \ | \, \big|[S \ \pi_{\|}, e^{-|\mathbf{x}|^2}] \mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho \ - \rho^\infty))\big| dx dt' \\ & + \iint_{\Omega_t} e^{-|\mathbf{x}|^2} \left| \rho \ - \rho \ \right| \, \left| S \ \pi_{\|} e^{-|\mathbf{x}|^2} \mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho \ - \rho^\infty)) \right| dx dt'. \end{aligned}$$

La première intégrale tend vers zéro quand $\nu \to \infty$ grâce au lemme suivant ([6], lemme 4.3) :

Lemme 1.1. *Pour tout $p > 2$, les opérateurs $[S\ \pi_{\|}, e^{-|\mathbf{x}|^2}]$ sont compacts de $(L^2 \cap L^{\mathbf{p}})(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, uniformément en ν :*
Si $u\ \rightharpoonup 0$ dans $(L^2 \cap L^{\mathbf{p}})(\mathbb{R}^3)$ faible, $\quad [S\ \pi_{\|}, e^{-|\mathbf{x}|^2}]u \underset{\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

On peut donc majorer (6) par

$$C\left(\int_0^{\mathbf{t}} \|e^{-|\mathbf{x}|^2}(\rho\ \ - \rho\ \ )(t')\|^2_{\mathbf{L}^2} dt' + \int_0^{\mathbf{t}} \|e^{-|\mathbf{x}|^2}(\rho\ \ - \rho^\infty)(t')\|^2_{\mathbf{L}^2} dt' + o(1)\right).$$

3) Rassemblant les estimations de 1) et 2), on majore (5) par

$$C\left(\int_0^{\mathbf{t}} \|e^{-|\mathbf{x}|^2}(\rho\ \ - \rho\ \ )(t')\|^2_{\mathbf{L}^2} dt' + \int_0^{\mathbf{t}} \|e^{-|\mathbf{x}|^2}(\rho\ \ - \rho^\infty)(t')\|^2_{\mathbf{L}^2} dt' + o(1)\right),$$

et le lemme de Gronwall conclut la preuve de la proposition 1.2.

2 Preuve du théorème 0.2 : solutions régulières et unicité

2.1 Propagation de la régularité $H(rot)$

On va montrer que lorsque $\operatorname{rot} E$ et $\operatorname{rot} H$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ initialement, ils le restent pour tout temps. L'idée est d'utiliser les équations de Maxwell pour convertir les dérivées spatiales en dérivées temporelles : $\operatorname{rot} E = -\partial_{\mathbf{t}} H$, et ce dernier est contrôlé par estimation d'énergie sur le système de Maxwell dérivé par rapport à t. Enfin, si $u \in L^2$, dire que $\operatorname{rot} u \in L^2$ équivaut à dire que la partie sans divergence $u_\perp$ de u est H^1, donc, ρ étant déjà connu, on écrit le système des équations de Maxwell comme un système linéaire portant sur $u := (E_\perp, H_\perp) = (u_1, u_2)$:

$$Lu = \Pi B u + \Pi f, \tag{7}$$

$$\text{avec : } \quad L = \partial_{\mathbf{t}} + \begin{pmatrix} 0 & -\pi_\perp \operatorname{rot} \\ \pi_\perp \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}, \ \ \Pi = \begin{pmatrix} \pi_\perp & 0 \\ 0 & \pi_\perp \end{pmatrix},$$

$$Bu = \begin{pmatrix} i\operatorname{Tr}\left(\Gamma[u_1 \cdot \Gamma, \rho]\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ f = \begin{pmatrix} 0 \\ i\operatorname{Tr}\left(\Gamma[\Omega + \pi_{\|}\operatorname{Tr}(\Gamma\rho)\cdot\Gamma, \rho]\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, B est une matrice 6×6 à coefficients $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,(L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$, ainsi que leur dérivée temporelle, et $f,\partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^p(\mathbb{R}^3))$ pour tout $p < \infty$. De plus, L, restreint à $\mathrm{Im}\,\Pi$, est symétrique hyperbolique, donc le problème de Cauchy associé à (7) pour une donnée initiale $u_0 = \Pi u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ admet une unique solution $u = \Pi u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$.

Proposition 2.1. *Si $f,\partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$, et si les coefficients de B et $\partial_t B$ sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,(L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$, pour tout $u_0 = \Pi u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, la solution u du problème de Cauchy associé à (7) est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,H^1(\mathbb{R}^3))$.*

Preuve : Fixons $T > 0$. On sait que u est la limite, dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$, de la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u^0 = u_0$ et $u^{n+1} = \mathcal{T}u^n$, où $\mathcal{T}v =: w$ est la solution de $Lw = \Pi Bv + \Pi f$, $w_{|t=0} = u_0$.

Commençons par l'équation avec terme source, $Lw = \Pi f \in L^1([0,T],L^2)$. Par l'estimation d'énergie classique, on a

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq \|w(0)\|_{L^2} + 2\int_0^t \|f(t')\|_{L^2}dt'.$$

De plus, $L = \partial_t + iP(D_x)$, avec $P(D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole ayant des valeurs propres $\pm|\xi|$ de multiplicité constante. Notant $\pi_\pm$ les projecteurs associés, on a la décomposition

$$w = w_+ + w_-, \quad \text{où } \widehat{w_\pm}(t,\xi) = e^{\pm it|\xi|}\pi_\pm \hat{w}_0(\xi) + \int_0^t e^{\pm i(t-t')|\xi|}\pi_\pm \hat{f}(t',\xi)dt'.$$

Lorsque $f \in \mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$ et $\partial_t f \in \mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\widehat{\partial_x w_\pm}(t,\xi) =& e^{\pm it|\xi|}\xi\pi_\pm\widehat{w_0}(\xi)\\ &\pm i\left[e^{\pm i(t-t')|\xi|}\pi_\pm\hat{f}(t',\xi)\right]_0^t \pm i\int_0^t e^{\pm i(t-t')|\xi|}\frac{\xi}{|\xi|}\pi_\pm\widehat{\partial_t f}(t',\xi)dt'.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\|\partial_x w(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_x w(0)\|_{L^2} + 2\|f\|_{\mathcal{C}(L^2)} + 2\int_0^t \|\partial_t f(t')\|_{L^2}dt'. \tag{8}$$

De plus, l'équation $\partial_t w = -iP(D_x)w + \Pi f$ implique

$$\|\partial_t w(t)\|_{L^2} \leq C\|\partial_x w(t)\|_{L^2} + \|f(t)\|_{L^2}. \tag{9}$$

Dans le cas où $Lw = \Pi Bv + \Pi f$ avec $v \in \mathcal{C}([0,T],H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T],L^2)$, d'après (8) et (9), pour assurer que w est dans le même espace, il suffit de contrôler $\partial_t(Bv)$ (on a bien $Bv \in L^1(L^2)$). Or, à t fixé,

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t(Bv)\|_{L^2} &\le \|(\partial_t B)v\|_{L^2} + \|B\partial_t v\|_{L^2} \\
&\le \|\partial_t B\|_{L^3}\|v\|_{L^6} + \|B\|_{L^\infty}\|\partial_t v\|_{L^2} \\
&\le C\|\partial_t B\|_{L^3}\|\partial_x v\|_{L^2} + \|B\|_{L^\infty}\|\partial_t v\|_{L^2},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Les estimations (8), (9) et (10) prouvent que $\mathcal{T}$ est continu de $\mathcal{C}([0,T],H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T],L^2)$ dans lui-même. En procédant de même avec la différence $u^{n+1} - u^n$, on obtient, pour $n \ge 1$:

$$
\|\partial_{t;x}(u^{n+1} - u^n)(t)\|_{L^2} \le C\Big(\|u^n - u^{n-1}\|_{\mathcal{C}([0;T];L^2)} + \int_0^t \|\partial_{t;x}(u^n - u^{n-1})(t')\|_{L^2} dt'\Big).
$$

Pour T_1 assez petit ($CT_1 < 1/2$, qui ne dépend pas de la donnée initiale, mais seulement de B), cette inégalité entraîne que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T_1],H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T_1],L^2)$. En réitérant sur $[T_1,2T_1]$, $[2T_1,3T_1]$,..., on a la convergence sur tout $[0,T]$.

2.2 Unicité

Supposons que U_1 et U_2 sont deux solutions d'énergie de (1) pour la même donnée initiale, et telles que $\mathrm{rot}\, E_j, \mathrm{rot}\, H_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$, $j = 1,2$. On peut écrire, par différence, le système satisfait par $\delta U := U_2 - U_1$ sous la forme synthétique

$$
M(\delta U) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\mathrm{Tr}\,(\Gamma\delta F) \\ \delta F \end{pmatrix}, \text{ avec } \delta F = i[(E_2 - E_1)\cdot\gamma,\rho_2] - i[\Omega - E_1\cdot\gamma,\rho_2 - \rho_1].
$$

Lorsque les champs électriques E_j sont dans $L^\infty(\Omega_T)$, on a, par estimation d'énergie, $\|\delta U(t)\|_{L^2} \le e^{Ct}\|\delta U(0)\|_{L^2}$, qui implique l'égalité de $U_1(t)$ et $U_2(t)$ pour $t \in [0,T]$ si $\delta U(0) = 0$ (et en fait, la propriété plus forte de stabilité dans L^2 ; voir [6]).

Pour de telles solutions d'énergie, on ne dispose cependant pas de l'estimation *a priori* $E \in L^\infty(\Omega_T)$. Elle est vraie lorsqu'on tronque E en fréquence.

On estime donc l'erreur commise dans cette troncature, par un analogue du lemme 6.2 de [6] :

Lemme 2.1. *Soit U une solution d'énergie de (1) telle que* rot E,rot $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$. *Alors, pour tous $T > 0$, $\lambda \geq e$, il existe $E\ \ \in L^\infty(\Omega_{\mathbf{T}})$, $\alpha\ \ \in L^2(0,T)$, $\beta\ \ \in L^\infty(0,T)$,$C > 0$ tels que, pour tout $t \in [0,T]$:*

$$\begin{aligned}
&\|E\ \ (t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \alpha\ \ + \beta \quad \textit{et} \quad \|(E - E\ \ )(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C/\lambda, \\
&\textit{avec} \quad \|\alpha\ \ \|_{\mathbf{L}^2} \leq C\sqrt{\ln \lambda}, \ \ \|\beta\ \ \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \ln \lambda.
\end{aligned}$$

On a ainsi la majoration

$$\begin{aligned}
\|\delta F(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(\Gamma,\Omega)\Big(&\|\delta E(t)\|_{\mathbf{L}^2} + \|\delta\rho(t)\|_{\mathbf{L}^2} + (\alpha\ \ + \beta\ \ )\|\delta\rho(t)\|_{\mathbf{L}^2} \\
&+ \frac{1}{\lambda}\|\delta\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}\Big) \\
\leq C(\Gamma,\Omega)\,&((1 + \alpha\ \ + \beta\ \ )\|\delta U(t)\|_{\mathbf{L}^2} + 1/\lambda)\,,
\end{aligned}$$

et l'estimation

si bien qu'on a

$$
\begin{aligned}
\|(P_\| - P_\| \ )(t)\|^2_{\mathbf{L}^2} &= \int_{\{|\mathbf{P}_\||\geq \mathbf{C}\ln\}} |P_\|(t)|^2 dx \\
&\leq (C\ln\lambda)^{2-\mathbf{p}} \|P_\|(t)\|^{\mathbf{p}}_{\mathbf{L}^p} \\
&\leq \frac{(C_0\ p\ \|\rho(0)\|_{\mathbf{L}^2\cap\mathbf{L}^\infty})^{\mathbf{p}}}{(C\ln\lambda)^{\mathbf{p}-2}} = \left(C\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)^2
\end{aligned}
$$

en choisissant $C := 2eC_0\|\rho(0)\|_{\mathbf{L}^2\cap\mathbf{L}^\infty}$, $p := 2\ln\lambda$. Cette quantité est bien majorée par C'/λ, pour $\lambda \geq e$ (et on pose $\beta\ (t) := \|P_\| \ \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\ln\lambda$).
2) Concernant $\pi_\perp E$, il vérifie l'équation d'onde

$$
(\partial^2_{\mathbf{t}} - \Delta)\pi_\perp E = i\pi_\perp \mathrm{Tr}\ (\Gamma\cdot(i[\Omega - E\cdot\Gamma,[\Omega - E\cdot\Gamma,\rho] - [\partial_{\mathbf{t}}E\cdot\Gamma,\rho]))\,.
$$

Le second membre est majoré, à une constante multiplicative près, par $|\rho| + |E| + |E|^2 + |\partial_{\mathbf{t}}E|$. Or, $\partial_{\mathbf{t}}E = \mathrm{rot}\, H - \partial_{\mathbf{t}}P \in \mathcal{C}([0,T],L^2)$. Les deux premiers termes, ρ et E, sont également dans cet espace. Enfin, $|E|^2$ aussi, car $E = \pi_\perp E + \pi_\| E \in \mathcal{C}([0,T],H^1) + \mathcal{C}([0,T],L^4) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T],L^4)$ par injection de Sobolev.

L'idée est alors d'utiliser une estimation de Strichartz pour contrôler $\|\pi_\perp E\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{L}^\infty)}$ par $\|\Box\pi_\perp E\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{L}^2)}$. C'est malheureusement le cas limite interdit : on ne peut contrôler les normes $L^{\mathbf{r}}(L^{\mathbf{p}})$ que pour p fini [4], [8], [7]. On contourne cette difficulté en tronquant en fréquence ([6], proposition 6.3) :

Proposition 2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\lambda,T > 0$ et $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))$,*

$$
\|S\ \ u\|_{\mathbf{L}^2([0;\mathbf{T}];\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\sqrt{\ln(1+\lambda T)}\Big(\|\partial_{\mathbf{t};\mathbf{x}}u(0)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Box u\|_{\mathbf{L}^1([0;\mathbf{T}];\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3))}\Big).
$$

On termine la preuve en posant $E\ \ := S\ \ \pi_\perp E + P_\|\ $:
avec $\alpha\ (t) := \|S\ \ \pi_\perp E(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^3)}$, on a $\|\alpha\ \|_{\mathbf{L}^2} \leq C\sqrt{\ln\lambda}$ par la proposition 2.2, et

$$
\begin{aligned}
\|(\pi_\perp E - S\ \ \pi_\perp E)(t)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{1}_{\{|\ \ |\geq\ \ \}}\widehat{\pi_\perp E}(t)\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \|\frac{(1+|\xi|^2)^{\mathbf{1=2}}}{(1+\lambda^2)^{\mathbf{1=2}}}\mathbf{1}_{\{|\ \ |\geq\ \ \}}\widehat{\pi_\perp E}(t)\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \frac{C}{(1+\lambda^2)^{\mathbf{1=2}}}\|\mathrm{rot}\, E\|_{\mathcal{C}([0;\mathbf{T}];\mathbf{L}^2)}.
\end{aligned}
$$

Références

[1] B. Bidégaray, A. Bourgeade and D. Reignier. *Introducing physical relaxation terms in Bloch equations*. Journal of Computational Physics, 170, 603-613, 2001.

[2] P. Donnat and J. Rauch. *Global solvability of the Maxwell-Bloch equations from nonlinear*