

# Composition des tours de cavalier

par Pierre Dehornoy\*

*Pierre Dehornoy a dix-neuf ans, et est élève au lycée Louis-le-Grand à Paris. Premier prix de mathématiques au concours général en 2002, il a remporté le prix Fermat Junior 2003 (ex-aequo avec Julien Grivaux) avec cette étude des tours de cavalier. Celle-ci a été inspirée par une question laissée ouverte dans un article de 2002 où Alain Grigis, professeur à l'université de Paris-Nord, introduit un paramètre géométrique appelé indice. Après celles d'illustres devanciers comme Euler, de Moivre et Vandermonde, ces recherches s'inscrivent dans une longue série de travaux sur la combinatoire des mouvements d'un cavalier sur un échiquier.*

Sur un échiquier, il y a huit mouvements possibles pour un cavalier, correspondant à huit cases d'arrivée distinctes. Un *chemin de cavalier* est une suite finie de mouvements, et un *tour de cavalier* (ou *tour réentrant*) est un chemin de cavalier passant une et une seule fois par chaque case de l'échiquier et dont la case d'arrivée est la même que la case de départ. On considère des échiquiers carrés, ou même rectangulaires, de taille quelconque. La figure 1 montre un exemple de tour sur un échiquier  $6 \times 6$ . Il a été prouvé qu'il existe des tours sur tous les échiquiers  $n \times n$  pour  $n \geq 6$  et  $n$  pair [1].

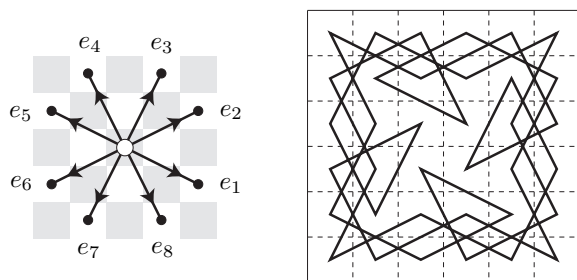


Figure 1. Les huit mouvements de cavalier et un exemple de tour  $6 \times 6$ .

Les tours de cavalier sur un échiquier ont été étudiés dès le IX<sup>e</sup> siècle après J.-C. par le mathématicien arabe Al-Adli ar Rumi, à qui on doit le premier tour de cavalier connu. Au XVIII<sup>e</sup> siècle, D'Alembert les a cités dans l'*Encyclopédie*, et le premier article à leur sujet est dû à Euler en 1759 dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*. Par la suite, le sujet a été étudié par de nombreux mathématiciens,

parmi lesquels Vandermonde [9], De Moivre, ou plus récemment Knuth, voir [6] qui donne un historique complet et de nombreuses références.

Dans ce travail, on étudie une notion qui apparemment n'avait pas été considérée jusque là, à savoir le décompte des huit sortes de mouvement possibles dans un tour de cavalier, qu'on appellera la composition. Ce que nous faisons ici, c'est établir précisément les bornes asymptotiques pour la composition des tours sur les grands échiquiers. Comme application, ce résultat nous permet de répondre positivement à une question posée par Grigis [4] concernant les valeurs possibles de ce qu'il appelle l'indice d'un tour, et qui peut se calculer à partir de la composition.

## I La composition d'un tour de cavalier

Dans la suite, nous nommerons les huit mouvements possibles d'un cavalier comme indiqué sur la figure 1. La notion qu'on va étudier est la suivante :

**Définition.** Soit  $\Gamma$  un tour de cavalier  $m \times n$ . Pour  $i$  allant de 1 à 8, on note  $\varepsilon_i(\Gamma)$  le nombre de mouvements de type  $e_i$  dans  $\Gamma$ , et  $c_i(\Gamma)$  leur proportion, c'est-à-dire le nombre  $\varepsilon_i(\Gamma)$  divisé par  $mn$ . On appelle *composition* de  $\Gamma$  la suite  $c(\Gamma) = (c_1(\Gamma), \dots, c_8(\Gamma))$ .

Ainsi, la composition du tour montré sur la figure 1 est  $(\frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36})$ .

La composition d'un tour n'est pas arbitraire. Le résultat principal de ce travail est une caractérisation

\* pierre.dehornoy@wanadoo.fr

des valeurs possibles de la composition. Posons :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0\right), \\
 S_2 &= \left(0, \frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}, 0\right), \\
 S_3 &= \left(0, 0, \frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}\right), \\
 S_4 &= \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0\right), \\
 S_5 &= \left(0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}\right), \\
 S_6 &= \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{5}{12}, 0, 0\right), \\
 S_7 &= \left(0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{5}{12}, 0\right), \\
 S_8 &= \left(0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{5}{12}\right), \\
 S_9 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \\
 S_{10} &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right), \\
 S_{11} &= \left(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \\
 S_{12} &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

(On verra que les douze compositions se déduisent de  $S_1$  et  $S_9$  par rotation et symétrie de l'échiquier.)  
 Notre résultat est le suivant :

**Proposition.** *La composition d'un tour de cavalier quelconque appartient toujours à l'enveloppe convexe  $\Omega$  des douze points  $S_i$  dans  $\mathbb{R}^8$ . Réciproquement, pour tout octuplet  $(c_1, \dots, c_8)$  dans  $\Omega$ , il existe une suite infinie de tours de cavalier sur des échiquiers de taille  $n \times n$  dont la composition est de la forme  $(c_1, \dots, c_8) + O(1/n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.*

La figure 2 montre la projection de  $\Omega$  sur le plan engendré par les deux mouvements opposés  $e_1$  et  $e_5$ . La démonstration de la première partie (condition nécessaire) est facile. En effet, on remarque déjà que tous les coefficients sont positifs et que leur somme vaut 1 : si  $(c_1, \dots, c_8)$  est la composition d'un tour on a alors

$$c_1 \geq 0, \dots, c_8 \geq 0, \quad \text{et} \quad c_1 + \dots + c_8 = 1. \quad (1)$$

De plus, le fait que  $\Gamma$  soit un tour, donc qu'il se referme, ajoute d'autres contraintes. Considérons les contributions horizontales et verticales de chaque mouvement : par exemple  $e_1$  a une contribution horizontale de +2 et une contribution verticale de -1, c'est-à-dire qu'il fait progresser de deux cases horizontalement et reculer de une case verticalement. Le fait que  $\Gamma$  se referme entraîne que la somme des contributions horizontales et la somme des contributions verticales des mouvements de  $\Gamma$  sont toutes deux nulles. En considérant les huit mouvements, on aboutit à :

$$2c_1 + 2c_2 + c_3 - c_4 - 2c_5 - 2c_6 - c_7 + c_8 = 0, \quad (2)$$

$$-c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 + c_5 - c_6 - 2c_7 - 2c_8 = 0. \quad (3)$$

Les équations (1), (2) et (3) forment un système linéaire de trois équations et huit inéquations à huit inconnues. Soit  $P$  l'ensemble des solutions. Comme on a un système linéaire,  $P$  est un polytope convexe de  $\mathbb{R}^8$ , donc c'est l'enveloppe convexe de ses sommets. Nous allons chercher à déterminer ceux-ci. Le système ayant cinq degrés de liberté, les sommets de  $P$  ont au moins cinq coordonnées nulles (un point avec moins de cinq coordonnées nulles ne peut pas être extrémal). On suppose d'abord  $c_1$  non nul et, par une recherche systématique des autres coordonnées non nulles, on trouve comme points extrémaux les quatre points  $S_1, S_4, S_6$  et  $S_9$ . Ensuite, en supposant  $c_1$  nul et  $c_2$  non nul, on trouve de même les points  $S_2, S_5, S_7$  et  $S_{10}$ . Le système étant invariant par la permutation  $(c_1, \dots, c_8) \mapsto (c_3, \dots, c_8, c_1, c_2)$ , les autres sommets de  $\Omega$  s'obtiennent en permutant les coordonnées des huit sommets déjà trouvés. On trouve finalement les douze points  $S_i$ , et donc  $P$  est confondu avec  $\Omega$ . (On consultera [3] pour la résolution générale de ces systèmes.)

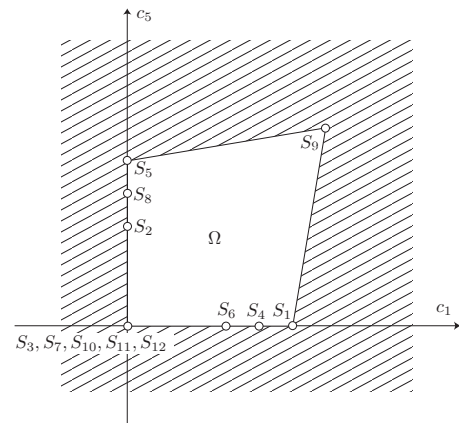


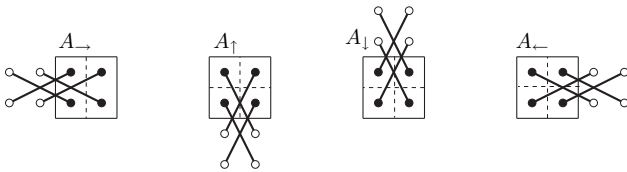
Figure 2. Projection du domaine  $\Omega$  sur le plan engendré par  $e_1$  et  $e_5$  : le secteur en blanc représente les valeurs possibles du couple  $(c_1, c_5)$ .

Le travail maintenant est d'établir qu'inversement tous les octuplets du domaine  $\Omega$  sont des compositions possibles asymptotiquement. On dira qu'un octuplet de réels  $(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$  est réalisable s'il existe une suite infinie  $\Gamma_n$  de tours  $n \times n$  satisfaisant  $c(\Gamma_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_8) + O(1/n)$  pour  $n$  tendant vers l'infini. Il n'est pas requis dans cette définition que  $\Gamma_n$  soit défini pour tout  $n$  mais seulement pour une infinité de  $n$ . Notre problème est de montrer que tout point de  $\Omega$  est réalisable. Il va s'agir de construire des tours de composition donnée. Nous allons utiliser trois méthodes : la première s'inspire d'une méthode déjà connue sous le nom de méthode des tresses (mais en utilisant des motifs de base beaucoup plus compliqués), les deux autres semblent nouvelles.

## II Une première construction

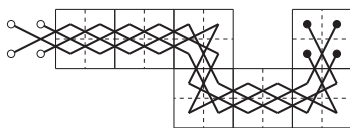
Comme la construction des tours réalisant les sommets  $S_i$  est assez complexe, nous allons commencer par des tours plus simples, ce qui permettra d'introduire des outils utiles.

Partons de la méthode dite des tresses, qui consiste à paver l'échiquier avec des pièces élémentaires, et permet de fabriquer des tours assez réguliers. En désignant les pavés par des lettres, on peut décrire un tour à l'aide d'un mot. Commençons avec une unique pièce  $A$  de taille  $2 \times 2$ , qui peut se placer suivant quatre orientations, droite, haut, bas, gauche :

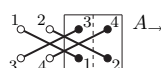


Chaque pièce compte quatre cases de départ (marquées par un disque blanc), et quatre cases d'arrivée (marquées par un disque noir). Par convention, les cases d'arrivée appartiennent à la pièce, contrairement aux cases de départ.

On peut faire le pavage de telle sorte que les cases d'arrivée d'une pièce correspondent aux cases de départ de la pièce suivante. L'enchaînement de plusieurs pièces peut être décrit par un mot à l'aide des quatre lettres  $A_{\rightarrow}, \dots, A_{\leftarrow}$ . Par exemple, le mot  $A_{\rightarrow}A_{\rightarrow}A_{\rightarrow}A_{\downarrow}A_{\rightarrow}A_{\rightarrow}A_{\rightarrow}A_{\uparrow}$ , également noté  $A_{\rightarrow}^3A_{\downarrow}A_{\rightarrow}^3A_{\uparrow}$ , correspond au diagramme :



Certains mots correspondent à des diagrammes qui recouvrent entièrement l'intérieur d'un rectangle : par exemple  $A_{\rightarrow}^2A_{\downarrow}A_{\leftarrow}^2A_{\uparrow}$  décrit un pavage qui recouvre un rectangle  $4 \times 6$ . Cependant, un tel pavage n'engendre jamais un tour de cavalier, car il est la réunion de quatre circuits distincts, et non un tour unique. Pour voir cela, on associe à tout mot  $M$  écrit à l'aide des lettres  $A_{\rightarrow}, \dots, A_{\leftarrow}$  une permutation  $\Pi(M)$  de  $\{1, \dots, 4\}$  en numérotant les cases de départ  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , puis en prolongeant les numéros suivant les mouvements, et en lisant les numéros des cases d'arrivée. Cela revient à définir  $\Pi(M_1M_2)$  comme la composée de  $\Pi(M_1)$  et de  $\Pi(M_2)$ . Par exemple, si on représente une permutation  $p$  par  $[p(1), p(2), p(3), p(4)]$ , on obtient que  $\Pi(A_{\rightarrow})$  est  $[3, 4, 1, 2]$  :



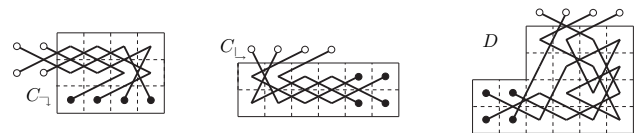
Si un mot  $M$  décrit un pavage, une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  engendre un tour est que la permutation  $\Pi(M)$  soit d'ordre 4. En effet, ceci garantit qu'en connectant les cases d'arrivée avec les cases de départ, les quatre circuits se regroupent en un seul : en partant de la case de départ 1 on suit le premier brin, puis un autre, puis encore un autre, et enfin le dernier, et on finit sur la même case 1.

Cette condition n'est jamais satisfaite par un pavage ne contenant que des pièces de type  $A$ . En effet, on a  $\Pi(A_{\rightarrow}) = \Pi(A_{\leftarrow}) = [3, 4, 1, 2]$  et  $\Pi(A_{\uparrow}) = \Pi(A_{\downarrow}) = [2, 1, 4, 3]$ . Si  $M$  pave un rectangle, il contient autant de  $A_{\rightarrow}$  que de  $A_{\leftarrow}$ , et autant de  $A_{\uparrow}$  que de  $A_{\downarrow}$ . Comme les permutations  $[3, 4, 1, 2]$  et  $[2, 1, 4, 3]$  commutent, la permutation associée à  $M$  est nécessairement  $[1, 2, 3, 4]$ , qui est d'ordre 1, et non d'ordre 4.

On peut améliorer la précédente tentative en introduisant de nouvelles pièces, avec de nouvelles formes. Ainsi les cases de départ de la pièce  $B$  forment un rectangle  $1 \times 4$ , tout comme les cases d'arrivée :



Les pièces  $C$  et  $D$  serviront à connecter les deux types d'entrées et de sorties :



Seules les orientations présentées ci-dessus serviront dans notre construction. La pièce  $D$  semble compliquée, mais son rôle est crucial pour des raisons de permutation : elle mélange les quatre chemins.

Nous allons coller nos pièces et comme précédemment décrire notre diagramme en utilisant notre alphabet  $\{A_{\rightarrow}, \dots, D\}$ . Le principe de la permutation est étendu à toutes les pièces, avec la convention que les sommets d'un rectangle  $1 \times 4$  sont lus de gauche à droite. Il suffit de connaître la permutation associée à chaque pièce pour connaître la permutation associée au diagramme entier. La permutation associée aux pièces de type  $B$  est  $[3, 4, 1, 2]$ , celle qui est associée aux pièces de type  $C$  est  $[3, 4, 2, 1]$ , et pour la pièce  $D$  il s'agit de  $[4, 1, 3, 2]$ .

Pour atteindre des compositions extrémales, il faut utiliser quasi exclusivement une (ou deux) pièce(s),

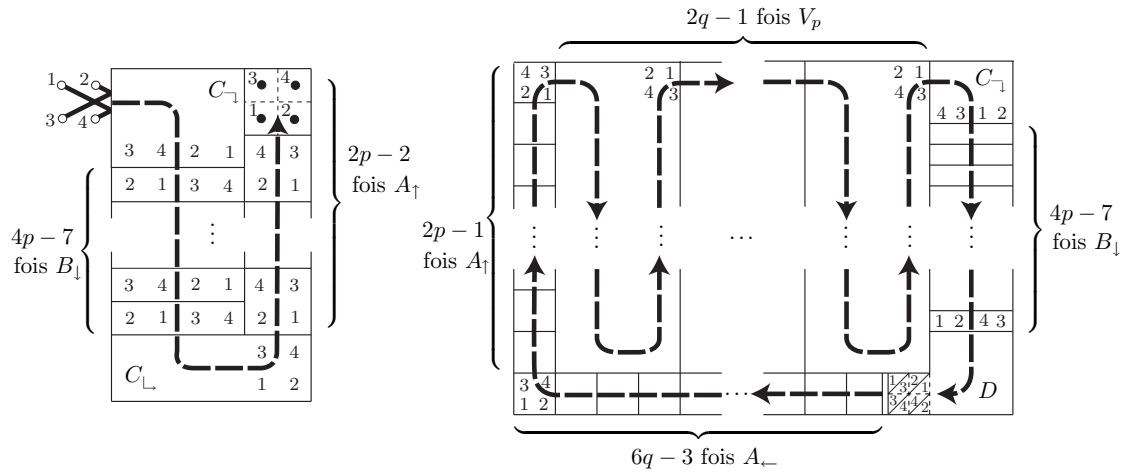


Figure 3. La super-pièce  $V_p$  et le tour  $W_{p,q}$ .

afin de ne pas utiliser trop de mouvement différents. Nous allons faire un premier essai avec les pièces  $A_{\uparrow}$  et  $B_{\downarrow}$ . Nous construisons d'abord la « super-pièce »  $V_p$  codée par

$$C_{\downarrow} B_{\downarrow}^{4p-7} C_{\downarrow} A_{\uparrow}^{2p-2}.$$

Comme on le voit sur la figure 3, la pièce  $V_p$  pave un rectangle  $(4p - 2) \times 6$  et la permutation associée est  $[3, 4, 1, 2]$ . Quand  $p$  tend vers l'infini on remarque que cette pièce est composée quasi exclusivement de  $A_{\uparrow}$  et de  $B_{\downarrow}$  (les seconds étant deux fois plus nombreux), donc que sa composition tend vers  $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0)$  quand  $p$  tend vers l'infini.

Pour  $p \geq 2$  et  $q \geq 1$ , définissons  $W_{p,q}$  comme le diagramme codé par

$$A_{\leftarrow}^{6q-3} A_{\uparrow}^{2p-1} V_p^{2q-1} C_{\downarrow} B_{\downarrow}^{4p-7} D.$$

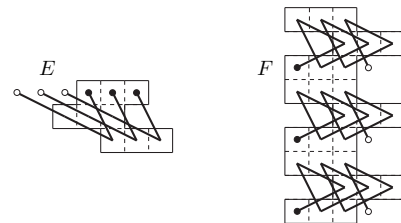
La figure 3 montre que  $W_{p,q}$  pave un rectangle  $4p \times 12q$  (le chemin part d'en bas à droite). De plus la permutation associée est  $[3, 1, 4, 2]$ , qui est d'ordre 4 (ici le rôle de  $D$  est crucial), donc  $W_{p,q}$  décrit bien un tour de cavalier.

En considérant le cas spécifique  $n = 4p = 12q$ , on obtient un tour  $W_n$  de taille  $n \times n$ , qui asymptotiquement est composé de  $O(n)$  pièces  $V$ , et de  $O(n)$  autres pièces. La composition de  $W_n$  est donc  $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0) + O(1/n)$  quand  $n$  tend vers l'infini : on a donc montré que la composition  $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0)$  est réalisable.

### III La composition $S_1$ est réalisable

La composition du tour  $W_n$  ne correspond à aucun des  $S_i$ , mais, en utilisant le même principe des pavés, nous allons construire une suite de tours dont la composition tend vers  $S_1$ , c'est-à-dire vers

$(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0)$ . Nous utilisons le même schéma de construction, mais avec des pièces plus compliquées. Les deux pièces principales sont les pièces  $E$  et  $F$  suivantes, elles ont trois cases de départ et trois cases d'arrivée chacune.



Les pièces  $E$  et  $F$  paraissent bizarres, mais en fait on les comprend facilement : elles sont chacune la juxtaposition de trois motifs identiques ayant un mouvement global de trois cases vers la droite pour  $E$  et trois cases vers la gauche pour  $F$ . Or il semble naturel d'utiliser un motif contenant un nombre de cases multiple de 12 car le plus grand dénominateur commun aux coordonnées de  $S_1$  est 12. D'autre part, il est pratique d'avoir un motif qui se décompose en deux pièces dont les mouvements globaux sont opposés (ici  $E$  va à droite et  $F$  à gauche) afin de paver l'échiquier avec ces deux motifs dans les mêmes proportions, donc les deux motifs composant  $E$  et  $F$  répondent bien à ces contraintes. On remarque déjà qu'un tour composé uniquement de ces deux pièces dans les mêmes proportions réalisera le point  $S_1$ , puisque la composition de la réunion de ces deux pièces est  $(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0)$ . On utilisera d'autres pièces pour les connections, mais en quantité

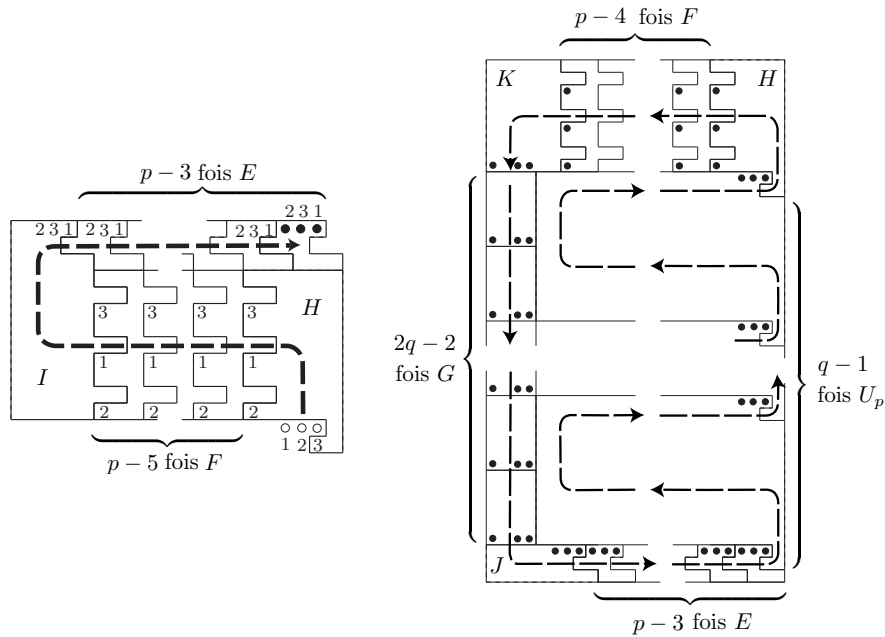
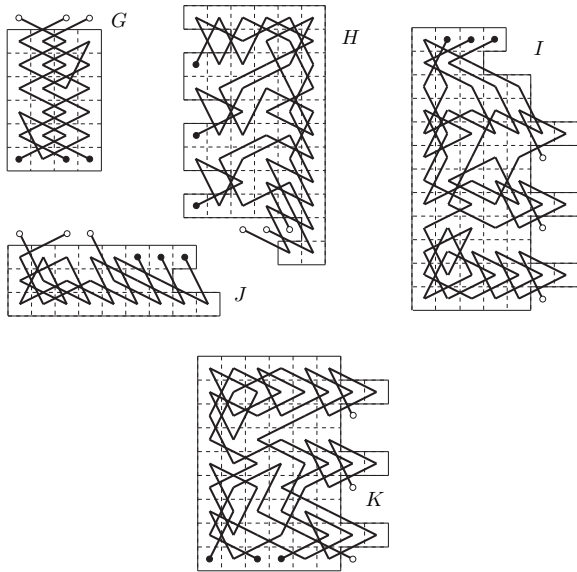


Figure 4. La super-pièce  $U_p$  et le tour  $X_{p,q}$ .

négligeable, comme on l’a fait précédemment avec les pièces  $A_{\leftarrow}$ ,  $C$  et  $D$  :



Nos sept pièces élémentaires ont trois cases de départ et trois cases d’arrivée. On leur associera donc une permutation de  $\{1, 2, 3\}$ , avec la convention que les brins sont énumérés de haut en bas et de gauche à droite. Ces informations sont rassemblées dans le tableau suivant :

pièce	$E$	$F$	$G$	$H$	$I$	$J$	$K$
permutation	$[1, 2, 3]$	$[1, 2, 3]$	$[1, 2, 3]$	$[3, 1, 2]$	$[3, 1, 2]$	$[2, 3, 1]$	$[3, 1, 2]$

Nous considérons, pour  $p \geq 3$  une super-pièce  $U_p$  codée par le mot  $HF^{p-5}IE^{p-3}$ . Comme on le voit sur la figure 4, le pavé  $U_p$  remplit presque un rectangle  $(3p - 4) \times 12$  : seules trois cases manquent au coin

supérieur droit, alors que trois cases sont accolées au coin inférieur droit. La permutation associée à  $U_p$  est  $[2, 3, 1]$ . La composition est celle que l’on souhaite, puisque cette super-pièce contient un nombre linéaire de pièce  $E$  et  $F$  et un nombre constant d’autres pièces. Reste à remplir un rectangle à l’aide de ce pavé  $U_p$  et de quelques autres pièces en nombre raisonnable.

Pour  $p \geq 5$  et  $q \geq 1$ , on définit  $X_{p,q}$  par le mot

$$G^{2q-2}JE^{p-3}U_p^{q-1}HF^{p-4}K.$$

On vérifie sur la figure 4 que  $X_{p,q}$  pave un rectangle de taille  $12q \times 3p$ . Le chemin part du coin supérieur gauche. La condition pour qu’on ait un tour est que la permutation associée soit d’ordre 3, ce qui est le cas pour  $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ . On peut alors définir pour  $n \geq 24$  et  $n \equiv 0 \pmod{12}$  le diagramme  $X_n$  par  $X_{\frac{n}{3}, \frac{n}{12}}$  et on obtient que pour  $n \geq 24$  et  $n \equiv 12$  ou  $24 \pmod{36}$ , le diagramme  $X_n$  est un tour de cavalier  $n \times n$  et sa composition est de la forme  $(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0) + O(1/n)$  quand  $n$  tend vers l’infini. En effet, on a affaire à un tour puisqu’on a  $\frac{n}{3} \geq 5$ ,  $\frac{n}{12} \geq 1$  et  $\frac{n}{12} \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Pour ce qui est de la composition, quand  $n$  tend vers l’infini,  $X_n$  compte  $O(n)$  pièces de type  $U$ , lesquelles contiennent  $O(n)$  pièces de type  $E$  et  $F$  chacune dans les mêmes proportions asymptotiques. Comme les autres pièces sont au plus présentes  $O(n)$  fois, il en découle que la composition est de la forme annoncée.

On a donc construit une suite de tours réalisant le point  $S_1$ .

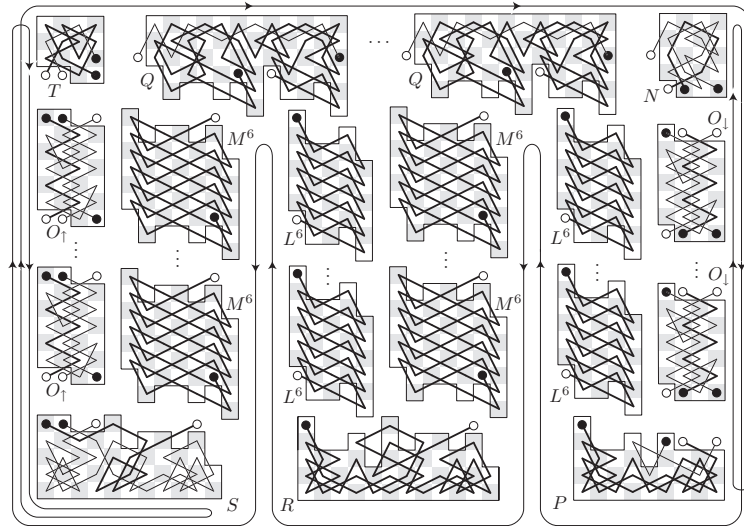
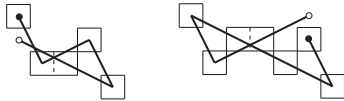


Figure 5. Le tour  $Y_n$ .

### IV Une autre réalisation de $S_1$

Dans cette partie nous construisons une autre suite de tours réalisant le point  $S_1$ . Cette suite a le désavantage d'utiliser des pièces de base moins naturelles, mais elle permet d'éviter le recours aux permutations. Les deux pièces principales que nous utilisons dans les mêmes proportions sont les pièces  $L$  et  $M$  suivantes :



Notre solution appelée  $Y_n$  est présentée sur la figure 5. Elle est définie pour  $n \geq 20$  avec  $n = 8 \pmod{12}$ . Encore une fois nous utilisons plusieurs pièces accessoires  $N, O, P, Q, R, S, T$ , mais le centre du diagramme (c'est-à-dire tout sauf une bande de quelques cases à partir des bords de l'échiquier) est recouvert par des  $L$  et des  $M$  en proportions égales. Pour  $n = 12p + 8$ , en partant du coin supérieur droit, le diagramme est codé par le mot  $NO^2PPL^{12p}Q(M^{12p}RL^{12p}Q)^{p-1}M^{12p}SO^2PT$ .

Le tour  $Y_n$  est illustré sur la figure 5. Ce parcours est un peu compliqué, mais c'est pourtant le plus simple trouvé si on veut éviter le système des permutations. Les flèches sur le bord indiquent l'allure générale du parcours suivi par le cavalier. Le tour débute par le trait épais sur le bord droit, puis zigzague à travers le centre de l'échiquier, remonte le long du bord gauche, puis c'est le trait fin qui achève le tour en complétant le bord gauche, en retournant par le haut et en complétant le bord droit. La composition de ce tour est asymptotiquement  $(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0) + O(1/n)$ , puisque le centre de l'échiquier, c'est-à-dire l'ensemble des cases à plus de six cases du bord, est uni-

quement rempli de pièce de type  $L$  et  $M$  en égale proportion. Par conséquent, le tour  $Y_n$  réalise  $S_1$  asymptotiquement.

### V La composition $S_9$ est réalisable

Nous allons maintenant construire une suite de diagrammes réalisant la composition  $S_9 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ . Le principe de considérer des pavés élémentaires ne fonctionne pas de la même manière, puisque ceux-ci ne devraient contenir que des mouvements de type  $e_1$  et  $e_5$ . Or ces deux mouvements ont la même direction, et donc les seuls pavés qu'on peut créer sont des pavés composés d'un seul type de mouvement puisqu'on ne peut suivre  $e_1$  puis  $e_5$  juste après. Nous conservons l'idée de pièces régulières qui remplissent le centre de l'échiquier avec les deux mouvements voulus en proportions égales. Pour cela, nous enchaînons des grandes traversées uniquement composées de  $e_1$  et d'autres composées de  $e_5$ . La difficulté vient des problèmes de connexion entre ces traversées. Ceux-ci sont réglés dans une bande de quatre cases le long du bord de l'échiquier.

Notre solution, appelée  $Z_n$ , est présentée sur la figure 6. Elle ne peut être décrite en termes de pièces élémentaires comme dans les sections précédentes, mais la figure devrait être assez claire. Il y a sept types de pièces. Pour une meilleure clarté, les pièces de taille variable portent en indice leur largeur. Ainsi le tour  $Z_n$ , défini pour  $n \geq 16$  et  $n = 0 \pmod{4}$ , est la juxtaposition de  $n - 9$  pièces, à savoir de haut en bas et de droite à gauche : une pièce  $A_9$ ,  $(n - 12)/4$  pièces  $B$ , soit  $B_{13}, B_{17}, \dots, B_{n-7}, B_{n-3}$ ; une pièce  $C_n$ ;  $(n - 14)/2$  pièces  $D_n$ ; une  $E_n$ ;  $(n - 12)/4$  pièces  $F$ , soit  $F_{n-6}, F_{n-10}, \dots, F_{14}, F_{10}$ ; et, enfin, une pièce  $G_6$ .

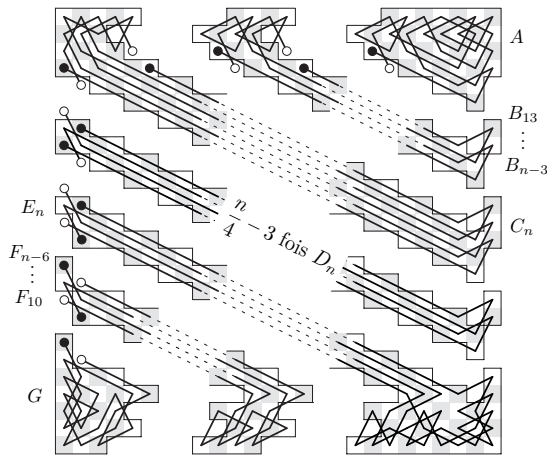


Figure 6. Le tour  $Z_n$ .

Chaque pièce a deux cases de départ et deux cases d'arrivée (marquées par des disques blancs et noirs respectivement). Cependant on n'a pas un pavage au sens des constructions précédentes puisque la connexion entre deux pièces ne se fait pas en connectant toutes les cases d'arrivée d'une pièce avec toutes les cases de départ de la suivante, mais en connectant une case de départ d'une première pièce avec une case d'arrivée d'une seconde pièce et une case d'arrivée de la première pièce avec une case de départ d'une troisième pièce. Au total, le chemin du cavalier part du coin supérieur droit, passe une fois par toutes les pièces une fois jusqu'au coin inférieur gauche, puis retransverse toutes les pièces jusqu'au coin de départ. Sachant que, hormis une bande de quatre cases de large au bord de l'échiquier, tout le diagramme est composé de  $e_1$  et de  $e_5$  en proportion égale, on a donc un nombre quadratique de ces mouvements, et un nombre au plus linéaire des autres mouvements. Par conséquent, la composition de  $Z_n$  est

$$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

quand  $n$  tend vers l'infini. Il en découle que le point  $S_9$  est réalisable.

## VI Les douze sommets de $\Omega$ sont réalisables

Nous allons maintenant réaliser les dix sommets restants de  $\Omega$ . Observons les effets d'une rotation de l'échiquier sur la composition d'un tour. Soit  $\rho$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Elle envoie les mouvements  $e_1$  sur  $e_3$ ,  $e_2$  sur  $e_4$ , ...,  $e_6$  sur  $e_8$ ,  $e_7$  sur  $e_1$  et  $e_8$  sur  $e_2$ , donc elle envoie un tour de composition  $(c_1, \dots, c_8)$  sur un tour de composition  $(c_7, c_8, c_1, \dots, c_6)$ . De même, les rotations  $\rho^2$  et  $\rho^3$  envoient un tour de composition

$(c_1, \dots, c_8)$  sur des tours de compositions respectives  $(c_5, \dots, c_8, c_1, \dots, c_4)$  et  $(c_3, \dots, c_8, c_1, c_2)$ . Par conséquent, les tours  $\rho(Y_n)$ ,  $\rho^2(Y_n)$  et  $\rho^3(Y_n)$  réalisent les compositions  $S_3$ ,  $S_5$  et  $S_7$ . De la même manière, les tours  $\rho(Z_n)$  réalisent la composition  $S_{11}$ .

Maintenant, soit  $\sigma$  la symétrie d'axe horizontal. Elle échange  $e_1$  et  $e_2$ ,  $e_3$  et  $e_8$ ,  $e_4$  et  $e_7$  et  $e_5$  et  $e_6$ . Elle envoie donc un tour de composition  $(c_1, \dots, c_8)$  sur un tour de composition  $(c_2, c_1, c_8, c_7, c_6, c_5, c_4, c_3)$ . Par conséquent, les tours  $\sigma(Y_n)$ ,  $\rho\sigma(Y_n)$ ,  $\rho^2\sigma(Y_n)$  et  $\rho^3\sigma(Y_n)$  réalisent les compositions  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , de même les tours  $\sigma(Z_n)$  et  $\rho\sigma(Z_n)$  réalisent les points  $S_{10}$  et  $S_{12}$ . Ainsi les douze sommets de  $\Omega$  sont réalisables.

## VII Tout point de $\Omega$ est réalisable

Pour montrer que tous les points de  $\Omega$  sont réalisables, l'étape suivante est de montrer que si deux points sont réalisables, tout barycentre à coefficients positifs de ces deux points est réalisable.

Jusqu'à présent, on a considéré la réalisation des  $S_i$  par des diagrammes carrés. On peut aussi les réaliser par des suites de diagrammes rectangulaires telles que le rapport des longueurs des côtés soit constant. En effet, ceci est possible avec les tours de type  $Y$  puisque la seule condition sur l'existence d'un tour  $m \times n$  est  $m = n = 8 \pmod{12}$ . Avec les tours de type  $Z$ , ceci est possible tant que le tour est au moins deux fois plus haut que large (afin d'éviter que les pièces  $C$  et  $E$  se rencontrent). Si ce n'est pas le cas, on peut quand même réaliser un tel tour en créant trois nouvelles pièces  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$  et  $\tilde{E}$  (un exemple du type noté  $\tilde{Z}$  est donné en appendice). Pour pouvoir les relier aux tours de type  $Y$  nous imposerons aussi à ces tours  $m \times n$  de respecter la condition  $m = n = 8 \pmod{12}$ . On n'utilisera pas les tours de type  $W$  et  $X$  dont les dimensions ne sont pas compatibles avec les tours de type  $Y$ .

Voyons comment combiner deux tours. Nous allons utiliser une méthode générale attribuée à Vandermonde. Supposons que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux tours sur deux échiquiers rectangulaires de même largeur avec un mouvement  $e_5$  près du bord inférieur de  $\Gamma$  et un mouvement  $e_1$  près du bord supérieur de  $\Gamma'$  comme on le voit sur la figure 7 (gauche). Alors on définit un nouveau tour, noté  $\Gamma \# \Gamma'$ , en collant  $\Gamma$  au-dessus de  $\Gamma'$  et en remplaçant les mouvements  $e_1$  et  $e_5$  considérés par des mouvements  $e_3$  et  $e_7$ , comme le montre la figure 7 (droite). Afin que  $\Gamma \# \Gamma'$  soit un tour rectangulaire, il faut que le coin inférieur gauche de  $\Gamma$  soit en face du coin supérieur gauche de  $\Gamma'$ . Pour que l'opération soit bien définie, on l'applique le plus à gauche

possible. On obtient alors un tour rectangulaire. En effet, en partant de  $v_1$ , le cavalier fait le tour  $\Gamma$ , arrive à  $v_2$ , et au lieu de finir sur  $v_1$ , passe à  $v_3$ , suit le tour  $\Gamma'$ , arrive à  $v_4$  et finit sur  $v_1$ , ce qui constitue bien un tour.

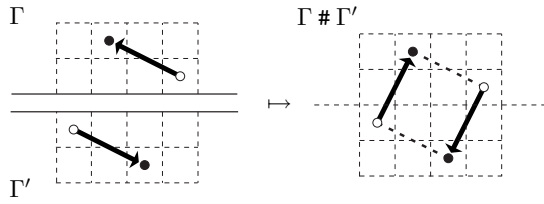


Figure 7. La connexion de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  en  $\Gamma \# \Gamma'$ .

Pour composer deux tours, il faut être sûr que ces deux tours contiennent deux mouvements  $e_1$  et  $e_5$  dans des positions bien définies. Pour cela nous allons *barder* les tours rectangulaires réalisant les sommets de  $\Omega$  à l'aide d'une chaîne de deux cases de large qui permet de les raccorder. Soit  $\Gamma$  un tour de taille  $m \times n$  avec  $m$  et  $n$  pairs. Nous entourons  $\Gamma$  par le diagramme décrit par le mot  $A_{\rightarrow}^{n/2+1} A_{\downarrow}^{m/2+1} A_{\leftarrow}^{n/2+1} A_{\uparrow}^{m/2+1}$ , comme indiqué sur la figure 8. On raccorde alors les quatre brins de ce diagramme à  $\Gamma$  à l'aide de l'opération  $\#$ , ce qui est toujours possible avec des tours de type  $Y$  et  $Z$ . On obtient alors un tour  $\bar{\Gamma}$  contenant sur toute sa bordure des mouvements en bonne position pour réappliquer l'opération  $\#$  avec tout autre diagramme bien bardé. En effet les chaînes de type  $A$  sont idéales pour appliquer notre opération de collage, alors que les bords des diagrammes  $Y$  et  $Z$  sont très irréguliers.

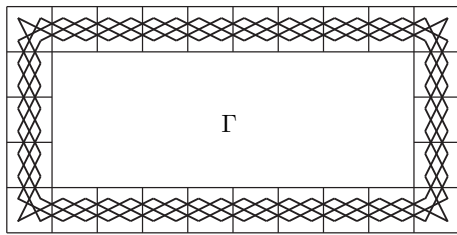


Figure 8. Le tour  $\Gamma$  et la barde qui permettra de le connecter.

Afin de calculer la composition de  $\Gamma \# \Gamma'$ , on notera  $h$  la hauteur du tour  $\Gamma$ , c'est-à-dire la hauteur de l'échiquier,  $h'$  la hauteur de  $\Gamma'$  et  $l$  la largeur de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . On a  $\varepsilon_i(\Gamma \# \Gamma') \simeq \varepsilon_i(\Gamma) + \varepsilon_i(\Gamma')$ , où  $\simeq$  signifie égal à 1 près. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de  $\Gamma \# \Gamma'$ . On a alors :

$$\begin{aligned} c_i(\Gamma \# \Gamma') &= \frac{hc_i(\Gamma) + h'lc_i(\Gamma')}{hl + h'l} + O\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\right) \\ &= \frac{hc_i(\Gamma) + h'c_i(\Gamma')}{h + h'} + O\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\right). \end{aligned}$$

Donc, si on part de deux suites de tours  $\Gamma_n$  et  $\Gamma'_n$  de tailles respectives  $h_n \times l_n$  et  $h'_n \times l_n$  telles que le rapport  $h_n/h'_n = r$  soit constant, telles qu'elles réalisent

respectivement les points  $S$  et  $S'$  et telles que l'opération  $\#$  leur soit toujours applicable, alors la suite  $(\Gamma \# \Gamma')_n = \Gamma_n \# \Gamma'_n$  réalise le point  $\frac{rS_i(\Gamma) + S_i(\Gamma')}{r+1}$ , c'est-à-dire le barycentre de  $(S, r)$  et de  $(S', 1)$ . Comme  $r$  est un nombre rationnel positif, on déduit que tous les barycentres rationnels positifs de deux points réalisables par de telles suites rectangulaires sont réalisables par des suites rectangulaires.

Or les sommets de  $\Omega$  sont réalisables par de telles suites, à savoir les suites de type  $Y$  et  $Z$ , donc tout barycentre rationnels des sommets de  $\Omega$  est réalisable par une suite rectangulaire, donc en particulier par une suite carrée. En effet, si un point  $S$  est le barycentre des douze sommets avec les coefficients  $a_1, \dots, a_{12}$  avec  $a_1 + \dots + a_{12} = 1$ , alors on réalise les douze sommets avec des suites de taille  $h_{i,n} \times l_n$  en fixant  $h_{i,n}/l_n = a_i$ , puis on empile les douze tours obtenus, et on les raccorde. La suite obtenue réalise  $S$ . On peut donc réaliser tout point rationnel de  $\Omega$ . Par le principe d'extraction diagonale, on peut aussi réaliser les barycentres réels quelconques.

### VIII Application à l'indice d'un tour

Maintenant qu'on sait quelles valeurs des paramètres  $c_1, \dots, c_8$  sont réalisables par des suites de tours lorsque la taille tend vers l'infini, on peut déduire des résultats similaires pour toute combinaison linéaire des paramètres  $c_1, \dots, c_8$  en projetant  $\Omega$  sur différents sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^8$  : puisque  $\Omega$  est l'enveloppe convexe des douze points  $S_1, \dots, S_{12}$ , alors, pour toute projection  $\pi$ , l'image de  $\Omega$  par  $\pi$  est l'enveloppe convexe des points  $\pi(S_1), \dots, \pi(S_{12})$ .

Dans [5], Grigis associe à chaque tour un paramètre qu'il appelle *indice* en utilisant une construction géométrique. Pour cela, il considère le réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^2$  engendré par  $e_1, e_2, e_3, e_4$  (donc aussi par  $e_1, \dots, e_8$ , puisque  $e_5, \dots, e_8$  sont les opposés de  $e_1, \dots, e_4$ ), et il introduit le réseau  $\tilde{\Lambda}$  dans  $\mathbb{Z}^4$  engendré par les vecteurs  $(2, -1, 2, 1)$ ,  $(2, 1, -2, 1)$ ,  $(1, 2, 1, -2)$ ,  $(-1, 2, 1, 2)$ . Le réseau  $\tilde{\Lambda}$  recouvre le réseau  $\Lambda$ , puisque  $\Lambda$  s'obtient à partir de  $\tilde{\Lambda}$  par la projection  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_2)$ .

Considérons un tour de cavalier  $\Gamma$ , qu'on peut supposer partir du point  $(0, 0)$  (et donc y revenir). Alors  $\Gamma$  est un chemin dans le réseau  $\Lambda$ , et il se relève de façon unique en un chemin  $\tilde{\Gamma}$  de  $\tilde{\Lambda}$ , partant du point  $(0, 0, 0, 0)$ , et dont  $\Gamma$  est la projection. Par construction, le chemin  $\tilde{\Gamma}$  se termine à un point dont les coordonnées sont de la forme  $(0, 0, z_3, z_4)$ . On montre que  $z_3$  et  $z_4$  sont toujours des multiples de 10, et c'est le couple  $(z_3/10, z_4/10)$  que Grigis appelle l'indice du tour  $\Gamma$ . La figure 9 montre une construction



analogue dans le cas où on relève un tour dans  $\mathbb{Z}$  (au lieu de  $\mathbb{Z}^2$ ) en un chemin de  $\mathbb{Z}^2$  (au lieu de  $\mathbb{Z}^4$ ) : l'indice est alors la seconde coordonnée du point final du chemin relevé.

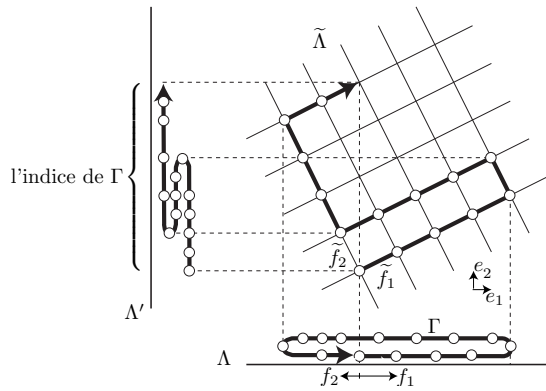


Figure 9. Un exemple en dimension 1+1 ; ici on a deux mouvements de base  $f_1 = 2e_1$  et  $f_2 = -e_1$  dans  $\Lambda$ , relevés en  $\tilde{f}_1 = 2e_1 + e_2$  et  $\tilde{f}_2 = -e_1 + 2e_2$ . L'indice est alors la projection sur  $\Lambda'$  du relevé d'un tour de  $\Lambda$ .

Pour l'étude de l'indice sur des échiquiers de taille fixée, on consultera [2]. L'indice d'un tour  $\Gamma$  peut directement se calculer à partir de sa composition. En effet, chacun des mouvements de base  $e_i$  se relève en un  $\tilde{e}_i$ , et la contribution de  $\tilde{e}_i$  à l'indice ne dépend que de  $i$ . Si  $\Gamma$  se compose de  $\varepsilon_i$  mouvements  $e_i$  pour  $i = 1, \dots, 8$ , l'indice est alors la somme des  $\varepsilon_i e'_i$ , en appelant  $e'_i$  la contribution de  $\tilde{e}_i$  à l'indice. L'indice  $(\ell, \ell')$  de  $\Gamma$  est par conséquent une fonction linéaire des  $\varepsilon_i$  qui s'exprime par les formules :

$$\begin{aligned} 10\ell &= 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - 2\varepsilon_5 + 2\varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8, \\ 10\ell' &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 + 2\varepsilon_7 - 2\varepsilon_8. \end{aligned} \tag{4}$$

Nos résultats sur la composition nous permettent de répondre positivement à la question posée par Grigis, à savoir si l'indice peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. En effet, la projection de  $\Omega$  sur le plan donnant la valeur de l'indice, c'est-à-dire le plan défini par les deux vecteurs  $(2, -2, 1, 1, -2, 2, -1, -1)$  et  $(1, 1, -2, 2, -1, -1, 2, -2)$ , est l'enveloppe convexe des huit points  $(\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12})$  et  $(\pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{6})$  (voir la figure 10). Donc, pour tout couple  $(\alpha, \alpha')$  dans la projection de  $\Omega$ , il existe des suites de tours dont l'indice est asymptotiquement  $(\alpha, \alpha')n^2 + O(n)$ . En particulier l'image de  $S_1$  est le couple  $(\frac{n^2}{6}, \frac{n^2}{12})$ , donc la suite  $Y_n$  a asymptotiquement pour indice  $(\frac{n^2}{6}, \frac{n^2}{12})$ . L'indice peut donc prendre des valeurs arbitrairement grandes.

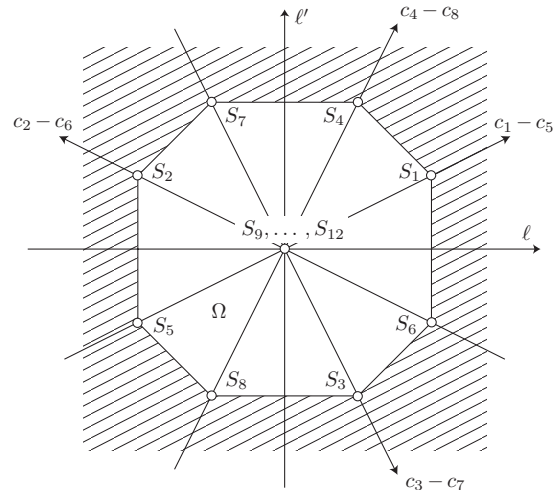


Figure 10. Projection du domaine  $\Omega$  sur le plan des indices : le secteur en blanc représente les valeurs possibles de l'indice.

## IX Conclusion

Avec les résultats précédents, nous avons complètement décrit les valeurs asymptotiques possibles de la composition. Mais évidemment, cela ne dit rien sur les valeurs pour une taille fixée : par exemple, nous ne savons rien sur les bornes de la composition pour les échiquiers  $8 \times 8$ .

Par ailleurs, les tours que nous avons considérés sont tracés sur des échiquiers plans. Mais il est également possible de faire des tours sur des échiquiers toriques, c'est-à-dire des échiquiers où les cases de droite sont déclarées voisines des cases de gauche, et celles du bas déclarées voisines de celles du haut. Concernant la composition des tours toriques  $n \times n$ , les égalités (2) et (3) s'affaiblissent en égalités modulo  $n$ , et n'apportent plus de contrainte *a priori*. La seule limite connue reste celles des relations (1), qui mènent à des compositions extrémales du type  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ . La question se pose de savoir si toutes les compositions satisfaisant ces relations sont réalisables par un tour torique. Nous avons un résultat partiel, à savoir que, sur des échiquiers toriques de côté de longueur impaire, il existe des tours contenant asymptotiquement 100 % de mouvements  $e_1$  (voir figures en appendice). Reste alors le problème des barycentres. Ce problème requiert de nouvelles méthodes, car la méthode de connexion de la section VII ne marche pas : la connexion de deux rectangles donne un rectangle, mais la connexion de deux tores ne donne pas un tore. On sait tout de même réaliser le barycentre de certains points extrémaux (voir figures en appendice), mais pour trois ou plus, la question reste ouverte.

## Appendice. Quelques figures complètes

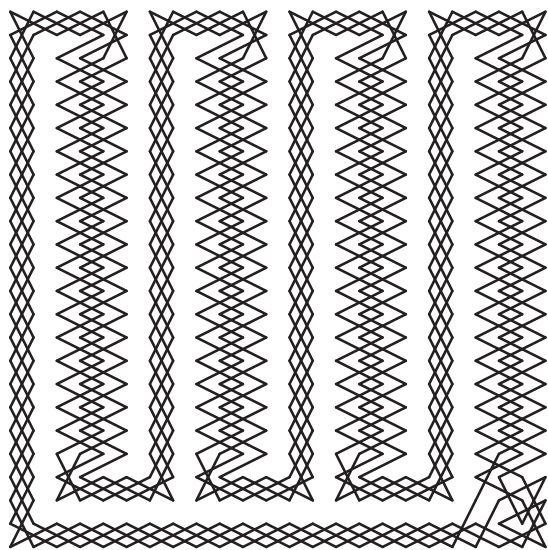


Figure 11.  $W_{24}$  : le tour  $24 \times 24$  de la famille du texte qui réalise la composition  $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0)$ .

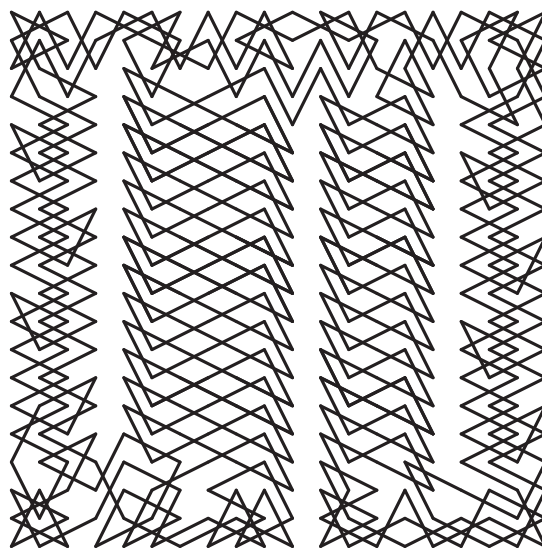


Figure 13.  $Y_{20}$  : le tour  $20 \times 20$  de la deuxième famille du texte réalisant la composition  $(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0)$ .

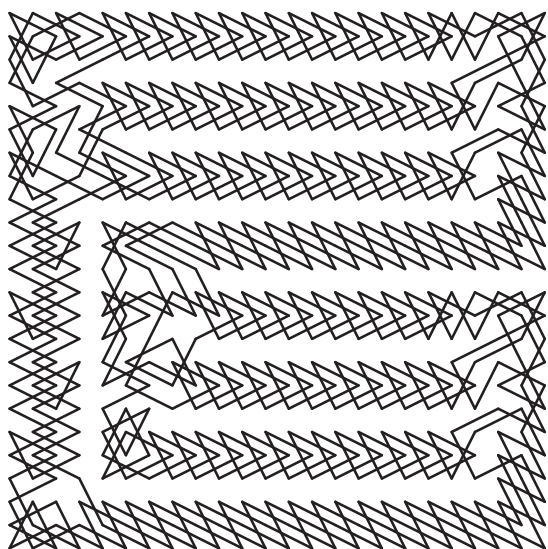


Figure 12.  $X_{24}$  : le tour  $24 \times 24$  de la première famille du texte qui réalise la composition  $(\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0)$ .

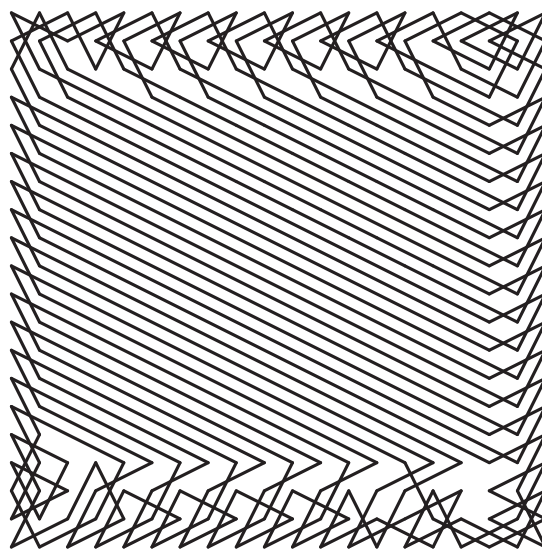


Figure 14.  $Z_{20}$  : le tour  $20 \times 20$  de la famille du texte réalisant la composition  $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ .

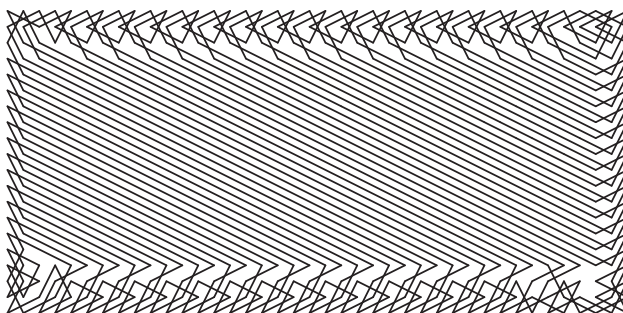


Figure 15. Le tour  $\tilde{Z}_{20,40}$  : le tour rectangulaire  $20 \times 40$  de la famille du texte réalisant la composition  $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ . Les pièces  $C$ ,  $D$  et  $E$  ont été modifiées pour s'adapter au format allongé.

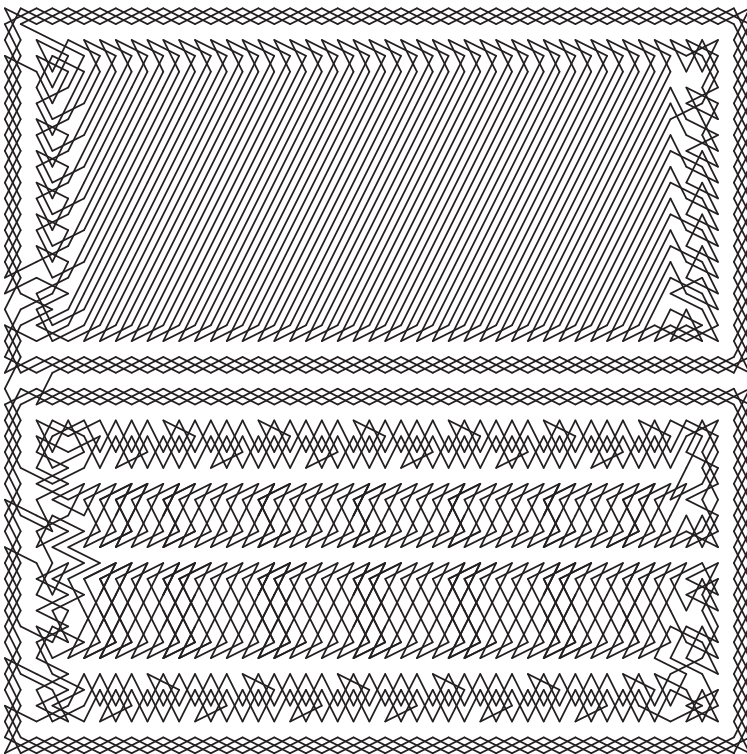


Figure 16. Un tour carré  $48 \times 48$  appartenant à une famille mixte réalisant la composition  $(0, 0, \frac{11}{24}, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ , c'est-à-dire la moyenne des compositions  $S_3$  et  $S_{11}$ .

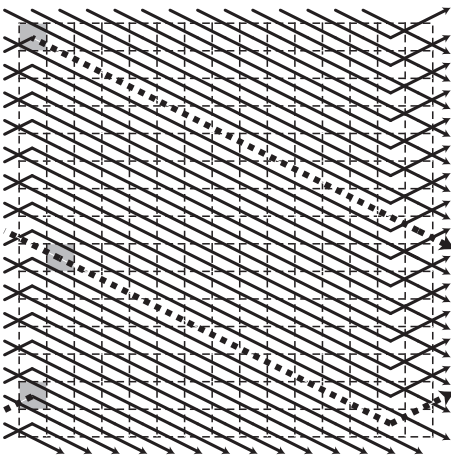


Figure 17. Sur un tore : le tour  $15 \times 15$  d'une famille réalisant la composition asymptotique  $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Les mouvements sortant à droite rentrent à gauche, et inversement, et de même en haut et en bas. En partant du coin supérieur gauche (en gris), le cavalier traverse une fois l'échiquier de gauche à droite (chemin en pointillés), réapparaît à gauche sur la deuxième colonne à mi-hauteur, retraverse une fois l'échiquier de gauche à droite, et réapparaît sur la première colonne de gauche, décalé de deux cases vers le haut par rapport à sa position de départ (en gris). Comme l'échiquier est de taille impaire, en répétant cette suite de mouvements, le cavalier repasse sur sa case de départ après avoir visité une et une seule fois chacune des autres cases de l'échiquier torique.

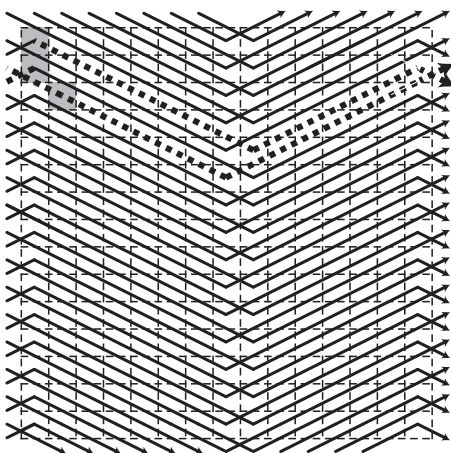


Figure 18. Sur un tore : le tour  $15 \times 15$  d'une famille réalisant la composition asymptotique  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Le principe de parcours est le même, mais après avoir traversé deux fois l'échiquier de gauche à droite, le cavalier ne réapparaît pas deux cases au-dessus de sa case de départ, mais une case en dessous (en gris). Dans le cas général, cet écart de cases peut prendre différentes valeurs suivant les proportions entre les mouvements, l'important est que la valeur de cet écart reste première avec la taille de l'échiquier (pour ne pas avoir la juxtaposition de plusieurs tours disjoints).

## Références

- [1] A. Conrad *et al.*, *Discrete Appl. Math.* **50** (1994) 125–134.
- [2] G. Dartois et A. Grigis, Les tours de cavalier sur l'échiquier  $8 \times 8$  et leurs indices, en preparation.
- [3] K. Fukuda, Polyhedral computation frequently asked questions, .html and .ps versions available from <http://www.ifor.math.ethz.ch/ifor/staff/fukuda/fukuda.html>.
- [4] A. Grigis et B. Rittaud, « Les 13 267 364 410 532 circuits fermés du cavalier », *La Recherche* **376** (2004) 54–56.
- [5] A. Grigis , « L'indice d'un tour de cavalier », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **335** (2003) 989–992.
- [6] G. Jelliss, Knight's tour notes, <http://www.ktn.freeuk.com>.
- [7] T.S. Motzkin, H. Raiffa, G.L. Thompson and R.M. Thrall, The double description method, in H.M. Kuhn and A.W. Tucker, eds., *Contributions to theory of games*, Vol. 2, Princeton Univ. Press, Princeton, RI, 1953.
- [8] W.W. Rouse and H.S.M. Coxeter, *Mathematical recreations and essays* (thirteenth edition), Dover Publ., Inc., New York, 1987.
- [9] A.T. Vandermonde, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Année 1774, Paris.

\*\*\*\*\*