Travaux dirigés 4

On désigne par G un groupe fini (excepté dans l'exercice 17).

Exercice 1. Soit χ le caractère associé à une représentation irréductible (V, ρ) de G. Montrer que si $\chi(g) = 0$ pour tout $g \in G \setminus \{1_G\}$ alors $G = \{1\}$.

Exercice 2. Soit (V, ρ) une représentation de G de caractère χ, et soit $\theta \in \widehat{G}$.

1) Montrer que $\chi' = \theta \cdot \chi$ est le caractère d'une représentation de G sur V que l'on précisera.

2) Montrer que (V, ρ') est irréductible si et seulement si (V, ρ) l'est.

Exercice 3. On suppose que G possède m classes de conjugaison.

1) Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction centrale prenant exactement m valeurs distinctes. Montrer que chaque caractère irréductible de G apparaît dans la décomposition de l'une des fonctions (produit usuel) f^j, $0 \leq j < m$. `Indication` : Soit $u : G \to \mathbb{C}$ une fonction centrale. On montrera que si $\langle f^j, u\rangle = 0$ pour tout $j \in \{0, \dots, m-1\}$ alors $u = 0$ au moyen d'un Vandermonde.

2) (Burnside–Brauer) Soit χ le caractère d'une représentation fidèle. On admet (voir cours, ch3 III) qu'alors pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, $\chi(g) \neq \chi(1)$. Soit s le nombre de valeurs non nulles de χ. Montrer que chaque caractère irréductible de G apparaît dans la décomposition de l'un des caractères χ^j, $1 \leq j \leq s$. `Indication` : analogue à 1), en prenant pour u un caractère irréductible et en indexant par les valeurs non nulles de χ dans les produits $\langle \chi^j, u\rangle$: les valeurs en 1 des caractères sont > 0.

3) Expliciter les décompositions de la question 2 pour $\chi = \chi_4$ le caractère de la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$ (cf table exercice 14 : 8).

Exercice 4. Interpréter l'orthonormalité de la famille $(\chi_i)_{1 \leq i \leq h}$ des caractères irréductibles de G comme le fait que la matrice carrée U de coefficients les $\left(\sqrt{\frac{|cl(g_j)|}{|G|}}\chi_i(g_j)\right)_{1 \leq i,j \leq h}$ est unitaire (où les g_j parcourent un système de représentants des classes de conjugaison, notées $cl(g_j)$, de G). En déduire les *secondes relations d'orthogonalité* : les colonnes de la table des caractères de G forment une base orthogonale de $\mathbb{C}^h$ pour le produit hermitien usuel, et le carré hermitien de la colonne de g est l'ordre de son centralisateur.

Exercice 5. Soient $C_1, \dots, C_h$ les classes de conjugaison de G. Soit T la table des caractères de G, vue comme matrice $h \times h$. Montrer que la conjuguée de toute ligne de T en est encore une. Montrer que $|\det T|^2 = \prod_{i=1}^h \frac{|G|}{|C_i|}$ et que $\det T$ est soit réel soit imaginaire pur. Que vaut $\pm \det T$ pour $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Exercice 6. (Burnside) Soit (V, ρ) une représentation de G ; $\tilde{\rho} \colon \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ désigne le morphisme d'algèbres associé.

1) Justifier que si V est irréductible, $\tilde{\rho}$ est surjectif.

2) On souhaite montrer la réciproque. Reformuler la surjectivité de $\tilde{\rho}$ en terme du sous–groupe $\rho(G)$ de $\mathrm{GL}(V)$.

3) On suppose que $\tilde{\rho}$ est surjectif. En réinterprétant l'algèbre $\mathrm{End}_G(V)$, montrer que $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_V$, puis conclure pour V (cf. TD2, exo 4.).

4) Expliciter ce théorème de Burnside avec $G = \mathfrak{S}_3$ agissant sur le sous–espace $V = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$: une base de V étant choisie, utiliser la formule d'inversion de Fourier pour écrire les 4 matrices élémentaires E_{ij} comme combinaison linéaire des matrices des éléments de $\rho(G)$. `Indication` : on pourra montrer la formule générale : $\mathrm{tr}(ME_{ij}) = m_{ji}$.

Exercice 7. Si $\chi_1, \dots, \chi_h$ sont les caractères irréductibles de G, et si n_i est le degré de χ_i, rappelons que l'on obtient h morphismes d'algèbres $\omega_i\colon$ Cent. $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$ par restriction des $\tilde{\rho}_i$ à Cent. $\mathbb{C}(G)$ (explicitement on a $\omega_i(\alpha) = \frac{1}{n_i}\sum_{g\in G}\alpha(g)\chi_i(g)$), et que le morphisme produit $\Omega = (\omega_i)_{1\le i\le h}\colon$ Cent. $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^h$ est un isomorphisme. On considère les h éléments ϵ_i de Cent. $\mathbb{C}[G]$ définis par les relations $\omega_j(\epsilon_i) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le h$.

1) Écrire la formule d'inversion pour Ω (raisonner dans Cent. $\mathbb{C}[G]$, sans utiliser $\mathcal{F}^{-1}$).

Dans les questions 2 à 4 on n'utilisera pas l'expression explicite des ϵ_i.

2) Montrer que $\epsilon_i^2 = \epsilon_i$, $\epsilon_i\epsilon_j = 0$ si $1 \le i \ne j \le h$, et $\sum_{i=1}^h \epsilon_i = \delta_1$. Justifier que les ϵ_i forment une base de Cent. $\mathbb{C}[G]$.

3) Si (V, ρ) est une représentation de G, montrer que $\tilde{\rho}(\epsilon_i)$ est la projection sur la composante isotypique V_{W_i} de V : on retrouve ainsi la décomposition canonique de V, avec la projection π_{W_i} (cf. cours) égale à $\tilde{\rho}(\epsilon_i)$.

4) Montrer que l'espace $\mathbb{C}[G]$ est naturellement la représentation régulière de G. Montrer que les $\epsilon_i\,\mathbb{C}[G]$, $1 \le i \le h$, en sont de sous–représentations, et que $\mathbb{C}[G]$ est leur somme directe. Que pouvez-vous dire de cette décomposition de $\mathbb{C}[G]$?

5) Expliciter les ϵ_i comme éléments de Cent. $\mathbb{C}[G]$.

6) Montrer que tout morphisme d'algèbres de Cent. $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathbb{C}$ est égal à l'un des ω_i.

Exercice 8. Utiliser l'exercice précédent, questions 2 et 5, dont on garde les notations, pour établir les *formules d'orthogonalité généralisées* pour les caractères irréductibles de G : pour tous $g' \in G$ et i, j dans $\{1, \dots, h\}$, on a

$$\sum_{g\in G}\overline{\chi_i}(g)\chi_j(gg') = 0 \quad \text{si } i \ne j\,, \quad \text{et} \quad \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_i}(g)\chi_i(gg') = \frac{\chi_i(g')}{n_i}\,.$$

Exercice 9. Pour le groupe $G = \mathfrak{S}_3$, expliciter dans une table les produits deux à deux des éléments de la base naturelle de Cent. $\mathbb{C}[G]$, formée des $e_C = \sum_{g\in C}\delta_g$, où C décrit les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_3$. Expliciter la base $(\epsilon_i)_i$ décrite dans l'exercice 7 (q1). Quelle est la table des produits correspondante ? Écrire les formules donnant les e_C dans cette base.

Exercice 10. (Caractères de D_4 et H_8)

1) Rappeler la structure de groupe des abélianisés de D_4 et $\mathbb{H}_8$ et en dresser la table de caractères.

2) Utiliser cette table pour dresser les tables de caractères des groupes D_4 et $\mathbb{H}_8$. Comparez. Qu'en déduisez–vous ?

3) Pour chacun des groupes D_4 et $\mathbb{H}_8$, déterminer la représentation $\det \circ \rho$, où ρ est la représentation naturelle de degré 2. Peut-on déduire de la table des caractères les représentations $\det \circ \eta$, où η est une représentation irréductible ?

Exercice 11. On considère $(V' = \mathbb{C}^3, \rho)$ la représentation qui se déduit comme en TD1, 7. d'un isomorphisme φ du groupe $I^+(C)$ des isométries positives d'un cube centré en 0 avec le groupe $\mathfrak{S}_4$ vu comme groupe des permutations de Δ l'ensemble des grandes diagonales du cube. Au cube sont aussi associés : deux tétraèdres réguliers inscrits (on garde "un sommet sur deux") T_1 et T_2, on note $X_T = \{T_1, T_2\}$; trois paires de faces opposées du cube, on note X_F leur ensemble.

Décomposer en représentations irréductibles les représentations par permutation de $\mathfrak{S}_4$ correspondant via φ^{-1} à l'action de $I^+(C)$ sur les ensembles Δ, X_T et X_F. Conclusion ?

Exercice 12. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$, centré en 0. On admet que le groupe $I_{\mathcal{T}}$ des isométries de $\mathcal{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$, par l'action sur les 4 sommets. On en déduit une représentation $(V = \mathbb{C}^3, \rho)$ du groupe $\mathfrak{S}_4$.

1) Montrer que par l'isomorphisme ci-dessus le sous–groupe des isométries positives de $\mathcal{T}$ s'envoie sur le sous–groupe $\mathfrak{A}_4$. (Rem : on pourra de plus identifier ses éléments d'ordre 2 et vérifier que les axes des 3 rotations sont orthogonaux.) On note ρ' la représentation de $\mathfrak{A}_4$ sur V correspondante.

2) Déterminer le caractère χ' de ρ'. Est-il irréductible ?

3) Mêmes questions pour le caractère χ de ρ sur $\mathfrak{S}_4$. (V, ρ) est-elle isomorphe à la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$?

4) On considère la représentation par permutation X associée à l'action de $I_{\mathcal{T}} \simeq \mathfrak{S}_4$ sur les arêtes de $\mathcal{T}$. Décomposer X en irréductibles à isomorphisme près.

5) Montrer que $\mathfrak{A}_4$ a exactement quatre 3–Sylow. Quel est le cardinal de leur normalisateur ? On note Y la représentation par permutation associée à l'action par conjugaison de $\mathfrak{A}_4$ sur ses 3–Sylow. Calculer le caractère de Y et en déduire sa décomposition en irréductibles.

Exercice 13. Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous–groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 14. Soit χ un caractère de G associé à une représentation (V, ρ) de G. On rappelle que l'ensemble

$$\operatorname{Ker} \chi := \{g \in G\,;\ \chi(g) = \chi(1)\}\,,$$

appelé le *noyau* de χ, est égal au sous–groupe $\operatorname{Ker} \rho$.

1) (Inflation) Soient H un sous–groupe distingué de G et $\pi \colon G \to G/H$ la surjection canonique. Soit χ' un caractère de G/H. On considère $\chi = \chi' \circ \pi : G \to \mathbb{C}$. Justifier que χ est un caractère de G, de même degré que χ'.

2) Avec les notations de la question 1, montrer que l'application $\chi' \mapsto \chi$ induit une bijection entre l'ensemble des caractères de G/H et l'ensemble des caractères de G ayant H dans leur

noyau. Montrer que la même assertion est vraie lorsqu'on remplace *caractère* par *caractère irréductible.*

3) Montrer que $\bigcap_{\chi} \operatorname{Ker}\chi = \{1_G\}$ où l'intersection porte sur tous les caractères *irréductibles* de G (on pourra utiliser la représentation régulière de G et vérifier qu'elle est fidèle).

4) En déduire que si H est un sous–groupe distingué de G il existe des caractères irréductibles $\chi_1, \ldots, \chi_s$ de G tels que

$$H = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}\chi_i.$$

Comme la réciproque est vraie (toute intersection de noyaux de χ_i est un sous–groupe distingué), cet énoncé signifie que si l'on connaît la table des caractères de G, on peut théoriquement trouver tous ses sous–groupes distingués.

5) Pour un tel sous–groupe H, déduire de la question 2 comment obtenir la table des caractères de G/H à partir de celle de G.

6) Que disent les deux propositions précédentes lorsque $H = D(G)$ est le sous–groupe dérivé ?

7) Retrouver avec la question 4 le fait que G est simple si et seulement si pour tout $g \in G \setminus \{1_G\}$ et tout caractère irréductible $\chi \neq 1$ on a $\chi(g) \neq \chi(1)$.

8) Appliquer 4) au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ pour en trouver tous les sous–groupes distingués. On rappelle que la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ est

	1 id	6 (ab)	8 (abc)	6 $(abcd)$	3 $(ab)(cd)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

9) Notons V_4 le sous–groupe distingué d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_4$. Déduire la table du quotient $\mathfrak{S}_4/V_4$ de celle de $\mathfrak{S}_4$. De quel groupe d'ordre 6 s'agit–il ?

Exercice 15. Table du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$

1) Décrire les éléments de $\mathfrak{A}_5$ et montrer que $\mathfrak{A}_5$ a 5 classes de conjugaison ; donner leur cardinal. On montrera que si σ est un 5–cycle, alors il n'est pas conjugué à σ^2, mais est conjugué avec σ^{-1}. Montrer que la table de $\mathfrak{A}_5$ est à valeurs réelles.

2) Déterminer le nombre et les degrés des caractères irréductibles de $\mathfrak{A}_5$. `Indication` : on pourra utiliser la congruence modulo 8.

3) Montrer que pour tout $g \neq 1$, on a $|\chi(g)| < 3$. En déduire que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

4) Montrer que pour toute représentation (V, ρ) de $\mathfrak{A}_5$, on a $\operatorname{Im}\rho \subset \mathrm{SL}(V)$.

5) La restriction W à $\mathfrak{A}_5$ de la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$ est-elle irréductible ?

6) On note V et V' les représentations de degré 3 de $\mathfrak{A}_5$. En considérant les valeurs propres des images des éléments de $\mathfrak{A}_5$ dans $\mathrm{End}(V)$ et $\mathrm{End}(V')$, et à l'aide des questions 1) 3) et 4), remplir les deux lignes correspondantes de la table.

7) On admet que le groupe des isométries positives de l'icosaèdre régulier (polyèdre convexe à 20 faces triangulaires, 12 sommets et 5 arêtes par sommet), est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$. On en déduit une représentation (Z, ρ) de $\mathfrak{A}_5$ dans $\mathbb{C}^3$. Calculer son caractère en fonction des deux valeurs possibles pour $\rho(\sigma)$, où $\sigma = (12345)$. Montrer que Z est irréductible.

8) On note τ un élément de $\mathfrak{S}_5$ tel que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$. Justifier que la conjugaison par τ induit un automorphisme de $\mathfrak{A}_5$, noté φ. On pose $\rho' = \rho \circ \varphi$. Calculer le caractère de la représentation (Z', ρ'). Est-elle irréductible ? isomorphe à Z ? Faire le lien entre les représentations Z, Z' et V, V'.

9) Compléter la table des caractères de $\mathfrak{A}_5$ (on note X la représentation irréductible manquante).

10) Soit Y la représentation par permutation associée à l'action de $\mathfrak{A}_5$ sur l'ensemble des paires d'éléments distincts de $\{1, \ldots, 5\}$. Calculer son caractère χ_Y et les produits scalaires $\langle \chi_Y, \chi_U \rangle$ et $\langle \chi_Y, \chi_W \rangle$. En déduire une autre manière de calculer χ_X.

Exercice 16. 1) Donner un 2–sous–groupe de Sylow de $\mathfrak{A}_5$, et trouver son normalisateur, d'ordre 12 (Indication : penser au groupe $\mathfrak{A}_4$). Montrer que $\mathfrak{A}_5$ possède exactement cinq 2–Sylow.

2) On note T la représentation par permutation associée à l'action par conjugaison de $\mathfrak{A}_5$ sur ses 2-Sylow. Déterminer son caractère χ_T. Donner la décomposition de T en somme d'irréductibles.

Exercice 17. (Burnside, 1905) On suppose ici que G est un sous–groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant N fini (c.a.d. on a $A^N = I$ pour toute $A \in G$). Il s'agit de montrer que G est fini. Soit $(M_i)_{1 \le i \le d}$ une base incluse dans G du $\mathbb{C}$–sous–espace $\mathrm{vect}(G)$ de $M_n(\mathbb{C})$. On note $f : G \to \mathbb{C}^d$ l'application $A \mapsto (\mathrm{tr}(AM_i))_{1 \le i \le d}$.

1) Justifier avec le cours : si $A \in G$ vérifie $\mathrm{tr}\, A = n$, alors $A = I_n$.

2) Montrer alors que f est injective. Indication : Si $f(A) = f(B)$, on pourra considérer $\mathrm{tr}(AB^{-1})$.

3) Montrer que $f(G)$ est fini et conclure.

Exercice 18. On suppose que la table des caractères de G est donnée ci-dessous (on note C_i, $1 \le i \le 6$, les classes de conjugaison de G ; pour chaque i on notera g_i un élément de C_i et (V_i, ρ_i) une représentation de caractère χ_i).

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	-2	1	-1	0	0
χ_6	2	2	-1	-1	0	0

1) Déterminer le cardinal de G et le sous–groupe dérivé $D(G)$. $D(G)$ est–il le noyau d'une

représentation irréductible ?

2) Déterminer la structure de l'abélianisé $G_{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ de G.

3) Montrer que pour tout $x \in G$ on a $x^2 \in D(G)$. En déduire que G n'a pas d'élément d'ordre 4.

4) Déterminer l'ordre de g_5 et de g_6.

5) Déterminer le centre Z de G et son cardinal.

6) En déduire la structure du sous–groupe $H = \operatorname{Ker} \rho_2$ de G.

7) Quel est l'ordre de g_3 ?

8) Déterminer la structure du sous-groupe $K = \operatorname{Ker} \rho_3$. A-t-on $G \simeq K \times Z$?

Exercice 19. Le groupe dicyclique et sa table.

1) Expliciter le groupe $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, et montrer qu'il existe un unique morphisme non trivial de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, noté φ.

Dans la suite on note G le groupe produit semi–direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (les lois des facteurs sont donc notées additivement). Ce groupe non abélien à 12 éléments est dit *groupe dicyclique*.

2) Déterminer le sous–groupe dérivé $D(G)$ (sans calculs). Expliciter les éléments du groupe $\widehat{G_{ab}}$.

3) Donner la liste des degrés des caractères irréductibles de G.

Dans les questions 5 et 6, on s'efforcera de raisonner de manière à minimiser les calculs.

4) Justifier que $(\overline{0}, \overline{2})$ est dans le centre de G. Montrer que c'est l'unique élément de G d'ordre 2 (utiliser le morphisme p_2 de projection sur le 2^d facteur), puis trouver les éléments d'ordre 6 et l'ordre de chaque élément.

5) Trouver les classes de conjugaison de G et donner les cardinaux des centralisateurs. Compléter alors les colonnes des éléments d'ordre 4.

6) Si χ un caractère irréductible de G, on rappelle que le produit de χ par tout caractère ψ de degré 1 est un caractère irréductible de G. En déduire une relation entre les caractères de degré > 1 de G (utiliser un caractère de degré 1 qui ne vaut pas 1 en $(\overline{0}, \overline{2})$).

7) Compléter la table des caractères de G.

8) Soit V la représentation par permutation correspondant à l'action de G par conjugaison sur ses 2–Sylow. Donner la décomposition de V en irréductibles, à isomorphisme près.

Exercice 20. 1) Montrer que si G est un groupe de cardinal 12 alors $\operatorname{card} \widehat{G} > 1$. En déduire que G n'est pas simple. Donner toutes les listes possibles pour les degrés des caractères irréductibles.

2) Citer les groupes à 12 éléments que vous connaissez et étudier s'ils sont isomorphes entre eux. Ont–ils même table de caractères ? (*)Votre liste est–elle complète, à isomorphisme près ?

Exercice 21. Pour un polynôme P de $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, on note $c(P)$ le pgcd des coefficients de P (dit le *contenu* de P). On rappelle le lemme de Gauss : si $P, Q \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, on a $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

1) Montrer que si $Q \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ est unitaire et si $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire divise Q, alors $P \in \mathbb{Z}[X]$.

2) En déduire que le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ d'un entier algébrique est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 22. 1) Montrer que les nombres suivants sont des entiers algébriques ($n \in \mathbb{N}^*$) : $3^{1/n}$, $e^{2\pi i/n}$, $3\sqrt{2}+i$, $\tan(\pi/3)$, $\sqrt{5+\sqrt{21}}$, $1+2^{1/2}+3^{1/3}+\cdots+n^{1/n}$.

2) Montrer que les nombres suivants ne sont pas des entiers algébriques (en particulier $\mathcal{O}$ n'est pas un corps !) : $1/2$, $1/\sqrt{2}$, $1/2+i$, $\sqrt{2}/\sqrt[3]{5}$.

3) Montrer que si $a+ib \in \mathcal{O}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ on n'a pas nécessairement $a, b \in \mathcal{O}$.

4) L'anneau $\mathcal{O}$ possède -t-il des éléments irréductibles ?

Exercice 23. Le nombre $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ peut-il être une valeur d'un caractère de G ?

Exercice 24. On suppose G d'ordre p^2, où p est premier. En utilisant le fait que la dimension des représentations irréductibles divise l'ordre du groupe, montrer que G est abélien.

Exercice 25. On suppose G d'ordre impair. On note h le nombre de ses classes de conjugaison.

1) Soit $x \neq 1$ dans G. Montrer que x et x^{-1} ne sont pas conjugués.

2) Soit $\chi \neq 1$ un caractère irréductible de G. Montrer que $\chi(G) \not\subset \mathbb{R}$. `Indication` : écrire $< \chi, 1 >$.

3) Déduire de ce qui précède que $h \equiv |G| \pmod{16}$.

4) Que peut–on en déduire pour les groupes de cardinal impair ≤ 17 ?

Exercice 26. Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. On note χ_d le caractère multiplicatif $g \mapsto \det(\rho(g))$.

1) Montrer que $G/\mathrm{Ker}\,\chi_d$ est abélien.

2) On suppose que χ_d prend la valeur -1. Montrer que G possède un sous–groupe distingué d'indice 2. `Indication` : prouver la propriété adéquate de $\mathrm{Im}\,\chi_d$.

3) Application : on suppose que $|G| = 2n$, où n est impair (exemple : $|G| = 30$ ou 90). En considérant la représentation régulière de G, montrer que G a un sous–groupe distingué d'indice 2.

4) Que peut-on en déduire si G est simple, de cardinal pair > 2 ?

Exercice 27. Montrer que si G est simple non abélien, il n'admet pas de sous–groupe abélien d'indice une puissance de nombre premier.

Exercice 28. Soient p, q, r des nombres premiers distincts. On suppose que $|G| = pqr$. Montrer avec les théorèmes de Sylow que G n'est pas simple. Est-il résoluble ?

Exercice 29. Montrer que si G est simple non abélien d'ordre inférieur à 80, alors $|G| = 60$. `Indication` : utiliser l'exercice 26, 4).

Exercice 30. Pour $n \geq 2$, on rappelle [1] que le groupe Γ des automorphismes de corps de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, où $\zeta = e^{2\pi i/n}$, est constitué des $f_k \colon \zeta \mapsto \zeta^k$ et $f_{k|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$, où $1 \leq k \leq n$ et k est premier à n (l'application $\bar{k} \mapsto f_k$ définit un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sur Γ).

1) On note F le sous–corps $\{x \in \mathbb{Q}(\zeta) \,|\, \text{pour tout } f \in \Gamma,\ f(x) = x\}$ de $\mathbb{Q}(\zeta)$, et P le polynôme minimal de ζ sur F. Montrer que les ζ^k (k premier à n) sont racines de P. En déduire le degré $[\mathbb{Q}(\zeta) : F]$ et conclure que $F = \mathbb{Q}$.

Soit $g \in G$ d'ordre m.

2) Soit $l \in \mathbb{Z}$. Montrer que g^l est d'ordre m si et seulement si l est premier avec m.

3) Soit χ un caractère de G. On choisit $n = m$ ci-dessus. Montrer que $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\zeta)$. Montrer que si l est premier avec m, on a $\chi(g^l) = f_l(\chi(g))$.

4) Utiliser 1) pour montrer l'équivalence des deux assertions :
   i) pour tout l premier à m, g et g^l sont conjugués dans G.
   ii) pour tout caractère χ de G, on a $\chi(g) \in \mathbb{Z}$.

5) On prend pour G le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ ($r \geq 2$). Si l et k sont premiers entre eux et si σ est un k–cycle de $\mathfrak{S}_r$, montrer que σ^l est un k–cycle de même support, noté I (on pourra noter que $< \sigma >$ agit sur I avec des stabilisateurs tous triviaux). En déduire que l'assertion i) de la question 4) est vraie pour tout élément g de $\mathfrak{S}_r$. Conclure que la table des caractères de $\mathfrak{S}_r$ est à valeurs entières.

FIN.

---

1. c'est une conséquence de l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ du polynôme cyclotomique Φ_n, dont les racines sont ces ζ^k.