UJF - M1 Maths 2014-2015
M4211: Algèbre 2

Travaux dirigés 2

Dans ce qui suit on désigne par G un groupe fini, non réduit au neutre.

Exercice 1. Soient (V, ρ) une représentation de G et W une sous–représentation.

1) Montrer comment l'on peut munir le quotient V/W d'une structure de représentation.

2) Montrer que si $V = W \oplus W'$ est une somme directe de sous–représentations alors W' et V/W sont des représentations isomorphes.

Exercice 2. Soient V, W, Z des représentations de G. On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ l'espace des morphismes de représentations de V dans W.

Montrer que l'on a des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_G(V \oplus W, Z) \simeq \mathrm{Hom}_G(V, Z) \oplus \mathrm{Hom}_G(W, Z)$$

et

$$\mathrm{Hom}_G(V, W \oplus Z) \simeq \mathrm{Hom}_G(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_G(V, Z).$$

Exercice 3. Montrer que si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ est une décomposition de V en irréductibles, pour toute représentation irréductible W, la somme directe des sous–représentations V_i isomorphes à W est un sous–espace V_W de V qui ne dépend pas de la décomposition particulière de V en irréductibles.

Exercice 4. Soit V une représentation complexe de G telle que $\mathrm{End}_G(V)$ soit l'ensemble des homothéties de V. Peut–on en déduire que V est irréductible ?

Exercice 5. Soient W une représentation irréductible de G et $V = W \oplus W$. Montrer que l'algèbre $\mathrm{End}_G(V)$ est isomorphe à $M_2(\mathbb{C})$. En déduire que cette algèbre contient une infinité de projecteurs, puis que V admet une infinité de sous–représentations (isomorphes à W).

Exercice 6. Soient V, W deux représentations irréductibles de G. Montrer que la représentation unité U de G apparaît dans la représentation $\mathrm{Hom}(V, W)$ si et seulement si V est isomorphe à W (et alors sa multiplicité est 1).

Exercice 7. Soient (V, ρ_1) et (W, ρ_2) deux représentations irréductibles de G. On rappelle que $\mathrm{Hom}(V, W)$ est muni d'une structure de représentation, définie par $(g.u)(v) = \rho_2(g)(u(\rho_1(g^{-1})(v)))$, où $u \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \in G$ et $v \in V$. Ainsi l'espace $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ des morphismes est égal au sous–espace $\mathrm{Hom}(V, W)^G = \{u \in \mathrm{Hom}(V, W)\,;\ \forall\, g \in G,\ g.u = u\}$.

1) On suppose que V est de dimension 1. Expliciter, en termes des ρ_i, une représentation de G sur W isomorphe à $\mathrm{Hom}(V, W)$. Montrer qu'elle est irréductible.

2) On suppose que W est de dimension 1. Montrer que $\mathrm{Hom}(V, W)$ est irréductible.

3) On suppose désormais que V et W ont dimension ≥ 2. Montrer que $\mathrm{Hom}(V, V)$ n'est pas irréductible.

Exercice 8. On rappelle qu'une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est dite *centrale* si elle est constante sur les classes de conjugaison de G. Les fonctions suivantes sont-elles centrales :

(i) $f = \mathbf{1}_H$, fonction caractéristique d'un sous-groupe H de G

(ii) $g \mapsto \mathrm{ord}(g)$

(iii) $g \mapsto \mathrm{card}\{h \in G\,;\ hg = gh\}$

(iv) $g \mapsto \mathrm{card}\{h \in G\,;\ h^n = g\}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(v) $g \mapsto \mathrm{card}\{h \in G\,;\ hgh^{-1} \in \langle g \rangle\}$.

Exercice 9. Soient χ et χ' deux caractères de G. La différence $\chi - \chi'$ est–elle toujours un caractère ? et $|\chi - \chi'|$? et $\chi\chi'$?

Exercice 10. Soit χ un caractère de G tel que pour tout $g \neq 1$, $\chi(g) = 0$. Montrer que χ est le caractère d'une somme de copies de la représentation régulière.

Exercice 11. *Représentations par permutation* Soit (V, ρ) une représentation de G par permutation sur un ensemble fini X. On note $\mathcal{B} = (e_x)_{x \in X}$ la base de V associée, et χ le caractère de V.

1) Dans *cette* question (V, ρ) désigne une représentation quelconque de G. Montrer que $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \in \mathrm{End}(V)$ est un projecteur dont on donnera l'image. En déduire que $\dim V^G =< \chi, 1 >$.

2) La représentation V étant définie par l'action de G sur X, expliciter le sous–espace V^G ; en donner une base. En déduire que le nombre c d'orbites de l'action de G sur X est $\dim V^G$.

3) Pour $g \in G$, exprimer $\chi(g)$ en terme de l'action sur X, et déduire de 1) et 2) la *formule de Burnside* pour c.

4) Application : si $\mathrm{card}\, X \geq 2$ et si G agit transitivement, en déduire qu'il existe $g \in G$ qui agit sans point fixe dans X.
On suppose dans la suite que $c = 1$ (l'action de G est transitive).

5) Ainsi V est somme directe de la droite V^G et de l'(unique par TD1,20.2) hyperplan G–stable H, d'équation dans $\mathcal{B}$: $\sum_{x \in X} \lambda_x = 0$. Justifier que le caractère de H est $\chi - 1$.
On va caractériser les représentations par permutation pour lesquelles la sous–représentation H est irréductible, en en donnant des conditions équivalentes. On dit que l'action sur X est *doublement transitive* si pour tous x, y, x', y' dans X tels que $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $x' = g \cdot x$ et $y' = g \cdot y$. Enfin on munit $X \times X$ de l'action diagonale de G : $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$.

6) Montrer que l'action de G sur X est doublement transitive si et seulement si celle de G sur $X \times X$ a exactement 2 orbites (forcément la diagonale et son complémentaire).

7) Montrer que le caractère de la représentation de G par permutation sur $X \times X$ est χ^2.

8) Justifier alors soigneusement les déductions suivantes :
Par 2), l'hypothèse de 7) équivaut $< \chi^2, 1 >= 2$. Or on a $< \chi^2, 1 >=< \chi, \chi >$, et donc le caractère $\chi - 1$ de H est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est doublement transitive.

9) Appliquer 8) pour établir (voir aussi TD1,17.3) que la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$ est irréductible ($n \geq 3$) (c'est–à–dire que la représentation naturelle sur $\mathbb{C}^n$ est somme directe de deux irréductibles, dont une triviale), et de même, si $n \geq 4$, pour la restriction de la représentation standard à $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 12. 1) Donner la décomposition en irréductibles de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$, à isomorphisme près.

2) Soit d entier ≥ 1. Rappeler l'action naturelle de $G = \mathfrak{S}_3$ sur l'algèbre des polynômes $A = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$. On note H_d le sous–espace vectoriel de A formé des polynômes homogènes de degré d. On rappelle que chaque H_d est une sous–représentation de A, par permutation comme l'est la représentation canonique $V = \mathbb{C}^3$. Donner sa dimension et celle de H_d^G pour $d = 2, 3$. Calculer le caractère de ces deux représentations H_d et les décomposer à isomorphisme près (utiliser les caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_3$).

Exercice 13. *Représentations irréductibles de D_n* (voir TD1, 5. et 11.)

1) Soient Γ un groupe et a, b deux éléments de Γ. Montrer qu'il existe un morphisme de D_n dans Γ qui envoie s sur a et r sur b si et seulement si a et b vérifient les relations :

$$b^n = 1\,, \quad a^2 = (ab)^2 = 1\,. \qquad (*)$$

2) Déduire de 1) tous les morphismes de D_n dans $\mathbb{C}^\times$ (distinguer selon la parité de n).

3) Soit k entier. Montrer avec 1) qu'on définit un morphisme f_k de D_n dans lui-même en posant : $f_k(r^l) = r^{lk}$, $f_k(sr^l) = sr^{lk}$.

On note ρ la représentation naturelle de D_n dans $\mathbb{C}^2$ considérée en TD1,11. On définit la représentation $\rho_k = \rho \circ f_k$ de D_n dans $\mathbb{C}^2$ (k entier).

4) On suppose désormais que l'entier k est compris entre 1 et $(n-1)/2$. Montrer ρ_k est irréductible (prouver que $\rho_k(r)$ et $\rho_k(s)$ n'ont pas de droite propre commune).

5) Donner le caractère χ_k de ρ_k et en déduire que les représentations ρ_k sont deux à deux non isomorphes.

6) En distinguant suivant la parité de n, calculer la somme des carrés des représentations irréductibles de D_n (de degré 1 ou 2) ainsi mises en évidence. Conclure qu'on en a obtenu la liste complète, à isomorphisme près.

7) Écrire les classes de conjugaison de D_n (suivant la parité de n ; dessin des symétries du polygone régulier ?) Comparer le nombre des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles avec le nombre de classes de conjugaison de D_n.

8) Si k' est un entier compris entre $(n+1)/2$ et $n-1$, à quelle représentation $(\mathbb{C}^2, \rho_{k'})$ est–elle isomorphe ?

Exercice 14. Pour $G = D_4$, on note V sa représentation naturelle, (cf. TD1,11.) : $\deg V = 2$. Donner la décomposition de la représentation $\mathrm{Hom}(V, V)$ de G en irréductibles, à isomorphisme près.

Exercice 15. *Représentations polynomiales et formule de Molien.* (prolongement de 12.2). On prend $G = \mathfrak{S}_n$ et $V = \mathbb{C}^n$ sa représentation canonique. Pour $d \in \mathbb{N}$, H_d

désigne la composante homogène de degré d de l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$; on vérifiera que l'action linéaire de $\mathfrak{S}_n$ sur H_d définie en cours est bien l'action naturelle (cf. 12.2). Si χ est un caractère irréductible de $\mathfrak{S}_n$, on note $m_{d,\chi}$ le nombre de fois que la représentation irréductible associée à χ apparaît dans H_d.

1) Dans cette question $n = 3$. Montrer que pour $\chi = 1$, resp. $\chi = \epsilon$ la signature, la série formelle $\sum_{d\in\mathbb{N}} m_{d,\chi} X^d$ est égale à la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$, avec $P(X) = 1$ resp. X^3. Comparer avec les résultats de 12.2 ; quelle est la plus petite valeur de d pour laquelle la représentation signature apparaît dans H_d ?

2) En utilisant le théorème fondamental sur les polynômes symétriques, montrer que la série formelle $\sum_{d\in\mathbb{N}} m_{d,1} X^d$ est égale à la fraction rationnelle $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-X^i}$.

Exercice 16. Soit V une représentation de G. On rappelle que, pour toute W irréductible, la *composante isotypique* V_W de type W de V est la somme de tous les V_i isomorphes à W dans n'importe quelle décomposition $V = \oplus_{i=1}^{s} V_i$ de V en irréductibles.

1) Montrer que si V' est une somme directe de composantes isotypiques de V, elle admet un *unique* supplémentaire G–stable.

2) Montrer réciproquement : si V' n'est pas somme directe de composantes isotypiques de V, il existe W représentation irréductible de G qui est isomorphe à la fois à une sous–représentation de V' et d'un supplémentaire G–stable V'' de V'. Montrer qu'alors V' admet une *infinité* de supplémentaires G–stables (Indication : on pourra montrer qu'il existe $f \neq 0$ morphisme de représentations de V'' dans V', puis considérer les sous–espaces $V''_\lambda := \{x + \lambda f(x) \,|\, x \in V''\}$, $(\lambda \in \mathbb{C})$).

Exercice 17. *Expliciter* la décomposition de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$ en composantes isotypiques.

Exercice 18. Existe–t–il un caractère χ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que $\chi(\bar{0}) = 17$ et $\chi(\bar{1}) = 8 - i\sqrt{3}$?