UJF - M1 Maths 2014-2015
M4211: Algèbre 2

Travaux dirigés 1

Exercice 1. Soit G un groupe. Son *sous–groupe dérivé* $D(G)$ est le sous–groupe engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ (dit "commutateur de x et y") pour $x, y \in G$.

1) Montrer que $D(G)$ est stable par les automorphismes de G. En déduire que $D(G)$ est un sous–groupe distingué de G.

2) Montrer que le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien.

3) Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est abélien si et seulement si $D(G) \subset H$. Ainsi $D(G)$ est le plus petit sous–groupe distingué de G tel que le quotient soit un groupe commutatif. Le quotient $G_{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ est appelé *l'abélianisé de* G.

4) Soit A un groupe abélien et $\varphi : G \to A$ un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe une unique factorisation $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ avec $\overline{\varphi} : G_{\mathrm{ab}} \to A$ morphisme de groupes et $\pi : G \to G_{\mathrm{ab}}$ la projection canonique.

5) On dit que G est *résoluble* s'il existe $n \geq 1$ tel que $D^n(G) = \{1\}$ où $D^n(G)$ est défini par la relation de récurrence $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$. Montrer que G est résoluble si et seulement s'il existe une suite finie $G_0 = \{1\} \subset G_1 \cdots \subset G_n = G$ de sous–groupes de G telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, G_i est un sous–groupe distingué de G_{i+1} et G_{i+1}/G_i est abélien.

Exercice 2. Soit n un entier ≥ 3. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, n\}$.

1) Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les produits de deux transpositions.

2) Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3–cycles.

3) Montrer que $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ et $(\mathfrak{S}_n)_{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4) On suppose $n \geq 5$. Soient a, b, c, d, e des éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Calculer le produit $(adc)(bec)(acd)(bce)$. En déduire que $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ puis que $\mathfrak{S}_n$ n'est pas résoluble.

5) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est résoluble pour $n \leq 4$.

Exercice 3. *Produit semi–direct* Soient G, N, H des groupes.

1) On suppose ici que N et H sont des sous–groupes de G et que N est distingué. On dit que G est le produit semi–direct (interne) de H par N si $N \cap H = \{1\}$ et $G = NH$.

a) Montrer que ceci équivaut à : $\forall\, g \in G,\ \exists!\, n \in N,\ \exists!\, h \in H\,;\ g = nh$.
b) Montrer que la projection canonique $G \to G/N$ induit un isomorphisme $H \simeq G/N$.
c) Montrer que, pour tout $h \in H$, l'application $\varphi_h : N \to N$ définie par $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ est un automorphisme de N.
d) Montrer que l'application $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto \varphi_h$ est un morphisme de groupes ($\mathrm{Aut}(N)$ est le groupe des automorphismes de N).

2) On revient au cadre général. Soit $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. On munit le produit cartésien $N \times H$ de la loi

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$

Montrer que $(N \times H, *)$ est un groupe. Ce groupe est le produit semi–direct (externe) de N et H. On le note $N \rtimes_\varphi H$. Préciser l'inverse d'un élément (n, h).

3) Décrire $N \rtimes_\varphi H$ si $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$ pour tout $h \in H$ (on dit alors que φ est *trivial*). Montrer que φ est trivial si et seulement si H est distingué dans $N \rtimes_\varphi H$.

4) Montrer qu'il existe un morphisme φ tel que $G \simeq N \rtimes_\varphi H$ si et seulement s'il existe une suite exacte* de groupes $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$ et un morphisme de groupes $s : H \to G$ tel que $p \circ s = \mathrm{id}_H$. Préciser alors φ.

5) Montrer que tout produit semi–direct interne est naturellement isomorphe à un produit semi–direct externe, et que tout produit semi–direct externe est aussi naturellement un produit semi–direct interne.

6) Soit n un entier ≥ 2. Écrire $\mathfrak{S}_n$ comme un produit semi-direct $\mathfrak{A}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec un morphisme φ que l'on précisera. Même question avec $\mathrm{GL}_n(k) \simeq \mathrm{SL}_n(k) \rtimes k^\times$ (k corps commutatif).

7) Soient φ, ψ deux morphismes de H dans $\mathrm{Aut}(N)$. On suppose qu'il existe $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$ tel que $\psi(h) = \theta \circ \varphi(h) \circ \theta^{-1}$, pour tout $h \in H$. Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont des groupes isomorphes. Même question si $\varphi = \psi \circ \theta$ avec $\theta \in \mathrm{Aut}(H)$.

8) Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ est abélien si et seulement si φ est trivial et si N et H sont abéliens.

9) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{\mathrm{id}\}$ puis que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne peut pas s'écrire comme un produit semi–direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (†)

Exercice 4. Soit $p < q$ deux nombres premiers et G un groupe d'ordre pq.

1) Montrer que G a un unique q–Sylow Q. Montrer que Q est distingué dans G.

2) Soit P un p–Sylow de G. Montrer que G est le produit semi–direct $Q \rtimes_\varphi P$ (associé au morphisme $\varphi : P \to \mathrm{Aut}(Q)$ défini par $\varphi(x)(y) = xyx^{-1}$, $x \in P$ et $y \in Q$, cf. 3-1).

3) Supposons que $p \nmid q - 1$. Montrer que G est cyclique (on montrera que $\mathrm{Aut}(Q)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, d'ordre $q - 1$).

4) Supposons que $p \mid q - 1$. Montrer qu'à isomorphisme près il n'existe que deux groupes G possibles (on pourra utiliser que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est cyclique).

Exercice 5. *Groupe diédral* Soit $n \geq 2$ un entier. Soient r la rotation du plan d'angle $2\pi/n$ et s la symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox). Le sous–groupe des isométries du plan engendré par r et s est le *groupe diédral* D_n.

1) Montrer que $(rs)^2 = id$, en déduire srs, et décrire ensemblistement D_n. En déduire le cardinal de D_n.

2) Calculer le centre de D_n.

$*$. On dit que $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$ est une *suite exacte courte* de groupes si ι est un morphisme de groupes injectif, si p est un morphisme de groupes surjectif et si $\mathrm{Im}\,\iota = \mathrm{Ker}\,p$.

†. Cet exemple montre au passage que la connaissance des groupes finis simples ne permet pas de « reconstituer » "aisément" tous les groupes finis, contrairement à une croyance assez répandue.

3) Montrer que tout groupe engendré par deux éléments a, b, tels que i) a est d'ordre 2, ii) b est d'ordre n, et iii) $abab = 1$, est isomorphe à D_n. ‡

4) Montrer que D_n est le produit semi–direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associé au morphisme $\psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ défini par $\psi(\overline{1})(x) = -x$ pour $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5) Montrer que, si $n \geq 3$, D_n est le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés du plan. (Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux polygones réguliers à n côtés du plan, montrer de plus que leurs groupes d'isométries sont conjugués par toute similitude (directe, par exemple) qui envoie l'un sur l'autre).

6) Montrer que $D_2 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

7) Montrer que tout sous–groupe de $< r >$ est distingué.

8) Montrer que le sous–groupe dérivé $D(D_n)$ est $< r^2 >$ puis que D_n est résoluble.

9) Pour n pair, déterminer la structure de l'abélianisé de D_n.

Exercice 6. *Groupe des quaternions* Soit $\mathbb{H}_8$ le sous–groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$.

2) Quel est le centre de $\mathbb{H}_8$?

3) Exhiber tous les sous–groupes de $\mathbb{H}_8$. Lesquels sont distingués ?

4) Calculer le sous–groupe dérivé de $\mathbb{H}_8$ et en déduire que $\mathbb{H}_8$ est résoluble.

5) Déterminer la structure de l'abélianisé de $\mathbb{H}_8$.

6) La représentation de $\mathbb{H}_8$ définie par l'inclusion de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est–elle irréductible ?

Exercice 7. *Groupe des isométries du cube.* On note $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$, $D = (-1, 1, 1)$ et A', B', C', D' leurs symétriques respectifs par la symétrie de centre 0. On considère le sous-groupe G des isométries positives de $\mathbb{R}^3$ qui laisse le cube $ABCDA'B'C'D'$ invariant.

1) Montrer que G agit sur l'ensemble $\{(AA'), (BB'), (CC'), (DD')\}$ des quatre grandes diagonales du cube. En déduire l'existence d'un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathcal{S}_4$.

2) Montrer que cette action est fidèle. Qu'en déduit-on sur φ ?

3) Trouver un élément $g \in G$ qui stabilise (CC') et (DD') et qui échange (AA') et (BB'). En déduire que φ est surjectif.

4) Décrire tous les éléments de G.

5) Quel est le groupe des isométries (non nécessairement positives) du cube ?

‡. On pourra ainsi montrer que tout sous–groupe fini de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est cyclique ou isomorphe à un groupe diédral.

6) Déduire de φ l'existence d'une représentation $\rho : \mathcal{S}_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$.

7) Montrer que cette représentation de G est irréductible.

8) On considère maintenant H le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ des doubles transpositions. Montrer que la représentation induite $\rho' : H \hookrightarrow \mathcal{S}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ est réductible.

9) En utilisant le théorème de Maschke, montrer que la représentation

$$\rho'' : \mathcal{S}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$$

est une représentation irréductible de $\mathcal{S}_4$ sur $\mathbb{C}$.

Dans les exercices suivants, on désigne par G un groupe fini.

Exercice 8. 1) Montrer que toute représentation complexe de degré 1 de G provient d'un morphisme $G \to \mathbb{C}^\times$.

2) Soit V une représentation *fidèle* de G de degré 1. Montrer que G est cyclique.

Exercice 9. On suppose que (V, ρ) est une représentation complexe de G abélien fini. Montrer (par récurrence sur $\dim V$) qu'il existe une base de V qui diagonalise simultanément tous les $\rho(g)$, $g \in G$. En déduire que la représentation V est somme directe de sous–représentations de degré 1.

Exercice 10. Soit V un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

1) Décrire les représentations ρ du groupe *infini* $\mathbb{Z}$ dans V. Montrer qu'il existe toujours une sous–représentation propre.

2) On suppose que (V, ρ) est une représentation de $\mathbb{Z}$, et que la matrice de $\rho(1)$ dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V est un bloc de Jordan $J(n, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^\times$). Pour $1 \leq i \leq n-1$, on pose $V_i = \mathrm{vect}(e_j \,|\, 1 \leq j \leq i)$. Montrer que les V_i sont des sous–représentations propres, et que V_1 n'admet pas de supplémentaire $\mathbb{Z}$–stable (on peut se contenter de traiter le cas $n = 2$).

Exercice 11. Soit n un entier ≥ 2 et D_n le groupe diédral (notations de l'exercice 5). Soit $\rho : D_n \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ l'application définie par

$$\rho(r^\ell) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\ell/n) & -\sin(2\pi\ell/n) \\ \sin(2\pi\ell/n) & \cos(2\pi\ell/n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(sr^\ell) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\ell/n) & -\sin(2\pi\ell/n) \\ -\sin(2\pi\ell/n) & -\cos(2\pi\ell/n) \end{pmatrix}$$

pour tout $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$.

1) Montrer que $(\mathbb{C}^2, \rho)$ est une représentation de D_n. Pourquoi l'appelle–t–on la représentation naturelle de D_n ?

2) Déterminer ses sous–représentations.

3) En déduire que $(\mathbb{C}^2, \rho)$ est irréductible si $n \geq 3$. Décrire $\mathrm{Hom}_{D_n}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

Exercice 12. Soit (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G.

1) Montrer que $\rho(D(G)) \subset \mathrm{SL}(V)$.

2) Montrer que $\det \circ \rho : G \to (\mathbb{C}^\times, \times)$ est une représentation de degré 1. L'expliciter pour $G = \mathfrak{S}_n$ $(n \geq 2)$ en prenant : (i) (V, ρ) la représentation naturelle $\mathbb{C}^n$ (cf. 17) (ii) (V, ρ) la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 13. 1) À quelle condition l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$ est–elle commutative ?

2) On suppose $\operatorname{card} G \geq 2$. Montrer que $\mathbb{C}[G]$ n'est pas intègre, c.a.d. qu'elle contient deux éléments non nuls f et f' dont le produit est 0 (f et f' sont dits diviseurs de zéro). Que pouvez–vous dire de l'élément $e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta_g$?

Exercice 14. 1) Expliciter le morphisme d'algèbres α de $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathbb{C}$ associé à la représentation unité de G. Décrire son noyau I (idéal bilatère), et vérifier que I est stable pour l'action de G sur $\mathbb{C}[G]$, si on considère sur $\mathbb{C}[G]$ la représentation par permutation de la base naturelle $(\delta_g)_g$ donnée par la translation à gauche : $g \cdot \delta_h = \delta_{gh}$.

2) Déterminer tous les morphismes d'algèbres de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15. Montrer que deux représentations de G peuvent être de même dimension sans être isomorphes. Que dire de deux représentations de degré 1 qui sont isomorphes ?

Exercice 16. Soient les entiers $n \geq 2$ et $m \geq 1$. Décrire toutes les représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^m$. Quelles sont les représentations isomorphes à une représentation donnée ? Montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de ces représentations est fini.

Exercice 17. Soit n un entier ≥ 2. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées (expliciter l'action) et on note $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ la représentation associée.

1) Quelles sont les sous–représentations de dimension 1 de $(\mathbb{C}^n, \rho)$?

2) Soit H l'hyperplan $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \, ; \; x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Montrer que H est une sous–représentation de $(\mathbb{C}^n, \rho)$ et que $(\mathbb{C}^n, \rho)$ est la somme directe des sous–représentations $\mathbb{C}(1, \ldots, 1)$ et H. Écrire le projecteur sur H p_H associé.

3) Montrer que si $n = 2$ ou $n = 3$ alors H est irréductible, non isomorphe à la représentation triviale. (*) Montrer que c'est vrai pour *tout* $n \geq 2$ (*indication :* si $v \neq 0$ appartient à H et $v_i \neq v_j$, montrer en utilisant la transposition (i, j), puis d'autres, que H contient $e_i - e_j$, puis tous les $e_i - e_k$, $k \neq i$, où $(e_i)_i$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

4) En déduire les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_3}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$.

Exercice 18. Soit (V, ρ) une représentation de G (éventuellement de dimension infinie).

1) Soit $v \in V$ non nul. Montrer que $W_v = \mathrm{vect}(\rho(g)(v) \mid g \in G)$ est une sous–représentation de V, incluse dans toute sous–représentation contenant v.

2) On suppose V irréductible. Montrer que $\dim V$ est finie, majorée par $|G|$.

3) Donner un exemple où la représentation W_v n'est pas irréductible.

Exercice 19. Soient V une représentation de G et $p \colon V \to V$ une application $\mathbb{C}$–linéaire telle que $p \circ p = p$ (projecteur). Montrer que p est un morphisme de représentations si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont des sous–représentations de V.

Exercice 20. Soit (V, ρ) une représentation de G. On note $V^G = \{v \in V;\, \forall\, g \in G,\, g.v = v\}$.

1) Vérifier que V^G est une sous–représentation de V qui est somme de représentations irréductibles de degré 1.

2) Montrer que $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$ est l'unique projection de V sur V^G qui soit un morphisme de représentations. Autrement dit (cf. 19.) V^G admet un unique supplémentaire G–stable.

3) Soit $f\colon V \to V'$ un morphisme de représentations surjectif (où V' est une représentation de G). Montrer que $V'^G = f(V^G)$.

Exercice 21. Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Montrer qu'il existe sur V un produit hermitien pour lequel tout endomorphisme $\rho(g)$ est unitaire.

On suppose que V est une représentation par permutation. Donner un produit hermitien convenable.

Exercice 22. Soient (V, h) un espace hermitien et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation unitaire, c'est-à-dire que tous les $\rho(g)$ sont unitaires : $h(g \cdot v, g \cdot w) = h(v, w)$ pour tous $v, w \in V$.

1) Montrer que l'orthogonal d'une sous–représentation de V en est encore une. En déduire une autre preuve du fait que la représentation (V, ρ) est complètement réductible.

2) Soient W et W' deux sous–représentations irréductibles non isomorphes de V. Montrer qu'elles sont orthogonales. Ce résultat reste–t–il vrai en remplaçant « non isomorphes » par « distinctes » ?

Exercice 23. *Représentation duale ou contragrédiente*

1) Montrer qu'on munit le dual $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ d'une structure de représentation en posant $g{\cdot}\varphi\colon v \mapsto \varphi(g^{-1}{\cdot}v)$ ($g \in G, \varphi \in V^*, v \in V$). On note $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ le morphisme associé. Vérifier que, pour tout $\varphi \in V^*$, pour tout $v \in V$, on a $\langle \rho^*(g)(\varphi), \rho(g)(v) \rangle = \langle \varphi, v \rangle$ puis que $\rho^*(g) = {}^{\mathrm{t}}(\rho(g^{-1}))$.

2) Montrer que V est une représentation irréductible si et seulement si V^* l'est (*Indication :* on pourra montrer que l'orthogonal d'un sous–espace G–stable (de V ou V^*) est G–stable et raisonner par contraposée).

Exercice 24. On note $Z(G)$ le centre de G.

1) Soit V une représentation (fidèle) de G. Montrer que l'application $v \mapsto g.v$ de V dans V est un morphisme de représentation si (et seulement) si $g \in Z(G)$.

2) Montrer que si G est abélien, toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

3) En utilisant la complète réductibilité de la représentation régulière, établir la réciproque.

Exercice 25. Soit $\rho\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ l'application définie par

$$\rho(\bar{l}) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\ell/n) & -\sin(2\pi\ell/n) \\ \sin(2\pi\ell/n) & \cos(2\pi\ell/n) \end{pmatrix} .$$

Justifier que ρ définit une représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui est irréductible si $n \geq 3$. Déterminer alors la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. À quel corps est–elle isomorphe ?

Exercice 26. *Etude de la complète réductibilité sur un corps quelconque* Soient k un corps commutatif, et V une représentation de G sur k.

1) Si k est de caractéristique qui ne divise pas $|G|$ (nulle, par exemple), montrer en suivant le cours que toute sous–représentation W de V admet un supplémentaire G–stable, et que V est complètement réductible (thm de Maschke).

2) Si la caractéristique p de k divise $|G|$, on note V la représentation régulière de G, de base $(e_g)_{g\in G}$, H l'hyperplan d'équation $\sum_{g\in G} \lambda_g = 0$ (voir aussi 14.1), et D une sous–représentation de dimension 1 de V. Montrer que H est une sous–représentation de V qui contient D (considérer le morphisme $\varphi\colon G \to k^\times$ associé à D, et montrer que $\sum_{g\in G} \varphi(g) = 0$). En déduire que V n'est pas complètement réductible (voir aussi l'exercice 27).

Exercice 27. *La complète réductibilité équivaut à l'existence de supplémentaires G–stables* Soit k un corps commutatif. Soient V une représentation de dimension finie de G sur k et W une sous–représentation de V. On suppose que la représentation V est somme directe de représentations irréductibles : $V = \oplus_{i=1}^r W_i$, où les W_i sont des sous–représentations irréductibles. Montrer par récurrence sur la codimension de W que W admet un supplémentaire de la forme $\oplus_{i\in I} W_i$, où I est une partie de $\{1, \ldots, r\}$. Conclure.

FIN.