Université Joseph Fourier

Licence 3 Mathématiques, Parcours B
Algèbre

Examen final

Mardi 7 Janvier 2014

Durée de l'épreuve: 4h

Tout document et appareil électronique (calculatrice, téléphone portable) est interdit.

Barème indicatif: Cours: /2, Ex 1: /5, Ex 2: /7, Ex 3: /2, Ex 4: /7

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Enoncer le théorème de décomposition des noyaux.
2. Soit f un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal μ_f de f pour que f soit diagonalisable.
3. Le démontrer en utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

Exercice 1. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Soit G un groupe fini et $\gamma \in G$ un élément d'ordre p.

1. Montrer que pour tout $1 \leq \ell \leq p-1$, γ est dans le sous-groupe $\langle \gamma^\ell \rangle$ engendré par γ^ℓ.

   Comme p est premier, on a $p \wedge \ell = 1$, donc d'après Bezout, il existe des entiers a et b tels que $ap + b\ell = 1$. On a donc
   $$\gamma = \gamma^{ap+b\ell} = (\gamma^p)^a(\gamma^\ell)^b = (\gamma^\ell)^b \in \langle \gamma^\ell \rangle.$$

2. Soit H un sous-groupe de G. On rappelle que pour $g \in G$, on note $gH = \{g.h,\ h \in H\}$.

   (a) Montrer que s'il existe deux entiers $0 \leq \ell < m \leq p-1$ tels que l'intersection $\gamma^\ell H \cap \gamma^m H$ est non vide alors γ est dans H.

   Soit $x \in \gamma^\ell H \cap \gamma^m H$, alors il existe $h, h' \in H$ tels que $x = \gamma^\ell h = \gamma^m h'$. Donc on a $\gamma^{m-\ell} = hh'^{-1} \in H$. Comme H est un sous-groupe, il suit que le sous-groupe engendré par $\gamma^{m-\ell}$ est inclus dans H. Comme $0 \leq m-\ell \leq p-1$, on déduit d'après la première question que $\gamma \in \langle \gamma^{m-\ell} \rangle \subset H$.

   (b) En déduire que si γ n'est pas dans H, alors $\sharp(G/H) \geq p$.

   Si γ n'est pas dans H, d'après la question précédente, les classes à gauche $H, \gamma H, \gamma^2 H, \ldots, \gamma^{p-1} H$ sont deux à deux disjointes. Ce sont des éléments de G/H par définition, donc G/H contient au moins p éléments.

3. On suppose maintenant que $G = \mathcal{S}_p$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$. Soit H un sous-groupe de G tel que $\sharp H > (p-1)!$ et tel que $H \neq G$.

   (a) En utilisant le théorème de Lagrange, déduire des questions précédentes que H contient tous les p-cycles.

   Le cardinal de G est $p!$ et d'après le théorème de Lagrange on a $\sharp(G/H) = \frac{\sharp G}{\sharp H} < \frac{p!}{(p-1)!} = p$. Soit γ un p-cycle. L'ordre de γ est p. Donc d'après la question précédente γ est contenu dans H.

   (b) Soit $(a_1 a_2 \ldots a_p)$ un p-cycle. En calculant le produit $(a_1 a_2 a_3) \circ (a_1 a_2 \ldots a_p)$, justifier que tout 3-cycle est produit de deux p-cycles.

   On a $(a_1 a_2 a_3) \circ (a_1 a_2 \ldots a_p) = (a_1 a_3 a_4 \ldots a_p a_2)$. Donc tout 3-cycle $(a_1 a_2 a_3)$ s'écrit sous la forme

   $$(a_1 a_2 a_3) = (a_1 a_3 a_4 \ldots a_p a_2) \circ (a_1 a_2 \ldots a_p)^{-1} = (a_1 a_3 a_4 \ldots a_p a_2) \circ (a_p a_{p-1} \ldots a_1),$$

   c'est-à-dire comme le produit de deux p-cycles.

   (c) Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_p$ est engendré par les 3-cycles.

   Notons T le sous-groupe engendré par les 3-cycles. La signature d'un 3-cycle est $(-1)^{3-1} = 1$ donc $\mathcal{A}_p$ contient tous les 3-cycles et donc $T \subset \mathcal{A}_p$. Les éléments de $\mathcal{A}_p$ sont les éléments qui s'écrivent comme un produit d'un nombre pair de transpositions. Donc pour montrer que $\mathcal{A}_p \subset T$ il suffit de montrer que le produit de 2 transpositions est dans

T. Or on a pour $i \neq j$ $(ij) \circ (ij) = Id \in T$.Si i, j, k sont deux à deux distincts, on a $(ij)(jk) = (ijk) \in T$. Et si i, j, k et ℓ sont deux à deux distincts, alors $(ij)(k\ell) = (ijk)(jk\ell) \in T$. Donc tout produit de deux transpositions est dans T et $\mathcal{A}_p \subset T$.

(d) En déduire que $H = \mathcal{A}_p$.

Le sous-groupe H contient tous les p-cycles d'apèrs la question 3 (a). Comme tout 3-cycle est produit de deux p-cycles (3 (b)), H contient tous les 3-cycles. Le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_p$ est donc un sous-groupe de H. Son cardinal est donc $\geq \sharp\mathcal{A}_p = \frac{p!}{2}$. D'après Lagrange on a donc $\sharp G/H \leq 2$. De plus $H \neq G$ donc $\sharp(G/H) > 1$. On a donc $\sharp G/H = 2$ et $H = \mathcal{A}_p$.

Exercice 2. On considère $A = \mathbb{Z}[i] = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, .)$. En déduire qu'il est intègre.

   Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$. On a $(x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y')$ avec $x - x' \in \mathbb{Z}$ et $y - y' \in \mathbb{Z}$. $(A, +)$ est donc un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$. De plus $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy + x'y) \in A$ car $xx' - yy' \in \mathbb{Z}$ et $xy' + x'y \in \mathbb{Z}$. Enfin $1 = 1 + 0.i \in A$. Donc A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. L'anneau $\mathbb{C}$ est intègre car c'est un corps. DOnc A est intègre comme sous-anneau d'un anneau intègre.

2. (Cette question est indépendante du reste de l'exercice). Soit Φ l'application de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{C}$ qui à $P \in \mathbb{Z}[X]$ associe $P(i)$.

   (a) Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.

   $\Phi(P + Q) = (P + Q)(i) = P(i) + Q(i) = \Phi(P) + \Phi(Q)$. Soit U le polynôme constant égal à 1, alors $\Phi(U) = U(i) = 1$. Enfin $\Phi(P.Q) = (P.Q)(i) = P(i).Q(i) = \Phi(P).\Phi(Q)$. Donc Φ est un morphisme d'anneau.

   (b) Quelle est l'image de Φ? Justifier

   L'image de Φ est A. En effet tout élément de A est de la forme $a + ib = \Phi(a + Xb)$, où $a + Xb \in \mathbb{Z}[X]$. Soit $P(X) = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p \in \mathbb{Z}[X]$ alors $\Phi(P) = \sum_{p=0}^{n} a_p i^p$. Pour tout entier p, i^p est égal à $1, i, -1, -i$ donc $i^p \in A$. Comme A est un anneau, $P(i) \in A$.

(c) Quel est le noyau de Φ? Justifier

Posons $Q(X) = X^2 + 1$. Alors $\Phi(Q) = Q(i) = 0$, donc l'idéal engendré par Q est inclus dans le noyau de Φ. Soit $P \in \mathrm{Ker}\Phi$, comme Q est unitaire on peut faire la division euclidienne de P par Q, on a donc $P = AQ + B$ avec $\deg(B) \leq \deg(Q) - 1 = 1$ Autrement dit B est de la forme $B(X) = aX + b$. Alors
$0 = P(i) = A(i)Q(i) + B(i) = B(i) = a + ib$, donc $a = b = 0$. Donc $P = AQ$ est dans l'idéal engendré pas Q. On a donc $\mathrm{Ker}\Phi = (X^2 + 1)$.

(d) En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$.

Par le théorème de factorisation on a un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{Z}[X]/\mathrm{Ker}\Phi \cong \mathrm{Im}\Phi = A$.

3. Faire un dessin représentant les éléments de A dans le plan complexe. Puis, justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in A$ tel que $|z - z_0| < 1$.

Les points de A sont les points à coordonnées entières de $\mathbb{R}^2$. Soit $z = x + iy \in C$. Alors $x, y \in \mathbb{R}$, donc il existe x_0 et y_0 dans $\mathbb{Z}$ tels que $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}$ et $|y - y_0| \leq \frac{1}{2}$. Posons $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Et on a $|z - z_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Donc $|z - z_0| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

4. Soient $a, b \in A$, $b \neq 0$. Montrer qu'il existe $q \in A$ et $r \in A$ tels que $a = bq + r$ et $|r| < |b|$. (On pourra poser $z = \frac{a}{b}$.)

Posons $z = \frac{a}{b}$. D'après la question précédente il existe $q \in A$ avec $|z - q| < 1$. Alors $a = bq + (a - bq)$. Comme a, b, q sont dans A, $r = a - bq$ est aussi dans A. De plus $|r| = |a - bq| = |bz - bq| = |b||z - q| < |b|$.

5. Montrer que les éléments inversibles de A sont 1, -1, i et $-i$.

Soit $a = x + iy$ inversible dans A. Alorsil existe a' dans A tel que $a.a' = 1$. Alors $|a|^2.|a'|^2 = |a.a'|^2 = 1$. De plus $|a|^2 = x^2 + y^2$ avec x et yy entiers donc $x^2 = 1$ et $y^2 = 0$. On obtient donc $a = 1, -1, i$ ou $-i$. Comme ces quatre éléments sont clairement inversibles dans A on obtient $\mathrm{Inv}(A) = \{1, -1, i, -i\}$.

6. Soit I un idéal non nul de A.

(a) Montrer que l'ensemble $\{|z|^2,\ z \in I, z \neq 0\}$ a une borne inférieure $b > 0$, et qu'il existe $z_0 \in I$ avec $|z_0|^2 = b$.

L'ensemble $\{|z|^2, z \in I, z \neq 0\}$ est non vide car $I \neq 0$. Il est inclus dans $\mathbb{N}^*$, il a donc un plus petit élément $b = |z_0|^2 \leq 1$.

(b) Montrer que z_0 engendre I.

$z_0 \in I$ donc l'idéal (z_0) est inclus dans I. De plus $z_0 \neq 0$. Soit $a \in I$, alors d'après la question 5, il existe q et r tels que $a = qz_0 + r$ et $|r| < |z_0| = b$. On a $r = a - qz_0$, avec $a \in I$ et $qz_0 \in (z_0) \subset I$, donc $r \in I$. r est un élément de I de norme strictement plus petite que b, on a donc $r = 0$, ce qui implique $a = qz_0 \in (z_0)$. Donc $I = (z_0)$.

(c) En déduire que A est un anneau principal.

Soit I un idéal de A. Si $I = 0$, I est principal, et si $I \neq 0$ I est principal d'après les questions précédentes. De plus A est intègre, donc A est principal.

On s'intéresse maintenant à comprendre les éléments irréductibles de A.

7. Montrer que si $a \in A$ est tel que $|a|^2$ est un nombre premier, alors a est irréductible dans A.

   Supposons que $a = bc$ avec $b, c \in A$. Alors on a $p = |a|^2 = |b|^2|c|^2$. Comme $|b|^2$ et $|c|^2$ sont des entiers, on a $|b|^2 = 1$ et $|b|^2 = p$ (ou $|c|^2 = 1$ et $|b|^2 = p$). Ce qui implique que b est inversible par la question précédente. Donc a est irréductible dans A.

8. Montrer que si $a = x + iy \in A$ est irréductible dans A alors x et y sont premiers entre eux.

   Soit $a = x + iy \in A$ irréductible. Soit $d \geq 1$ un diviseur commun à x et à y. Alors $x = dx'$ et $y = dy'$. On a alors $a = d(x' + iy')$. Comme a est irréductible et que $x' + iy'$ et d sont dans A, on en déduit que $d = 1$.

9. Soit $p \geq 1$ un nombre premier.

   (a) Montrer que si $p = (x + iy)(x' + iy')$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ et $x + iy$ irréductible dans A, alors $p = x^2 + y^2$.

   Comme p est un entier, on a $yx' + xy' = 0$ et $p = xx' - yy'$. De la première égalité on déduit que x divise yx'. D'après la question précédente, comme $x + iy$ est irréductible, x et y sont premiers entre eux, donc x divise $x' = dx$. De même y divise xy' donc $y' = Dy$. De l'égalité $y'x + x'y = 0$ il vient $xy(d + D) = 0$. Donc $d = -D$. Maintenant de l'égalité $xx' - yy' = p$ on déduit que $d = \pm 1$ car p est premier. Donc on a $p = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ ou $p = (x - iy)(-x + iy) = -x^2 - y^2$. La deuxième égalité étant impossible, on a la conclusion.

   (b) En déduire que si $p \geq 2$ est premier et que $p \equiv 3 \mod 4$ alors p est irréductible dans A.

Soit p premier. Si p n'est pas irreductible dans A alors $p = (x + iy)(x' + iy')$ avec $x + iy$ irreductible et $xy \neq 0$ (car p premier). Donc d'après la question précédente, on a $p = x^2 + y^2$. Si x est pair, $x^2 \equiv 0 \mod 4$ et si x est impair $x^2 \equiv 1 \mod 4$. De même pour y. Donc $p = x^2 + y^2$ ne peut pas être congru à 3 modulo 4. Autrement dit si p est un nombre premier avec $p \equiv 3 \mod 4$, p est irreductible dans A.

10. Décomposer 30 en produits d'irréductibles dans A.

    $30 = 2 \times 3 \times 5 = 3(1 + i)(1 - i)(2 + i)(2 - i)$. 3 est premier et congru à 3 mod 4, donc 3 est irreductible d'après 9(b). $|1 - i|^2 = |1 + i|^2 = 2$ est premier donc $(1 + i)$ et $(1 - i)$ sont irreductibles d'après 8. De même $|2 + i|^2 = |2 - i|^2 = 5$ est premier donc $2 + i$ et $2 - i$ sont irréductibles.

Exercice 3. Soit α un paramètre réel, et A_α la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les dimensions des sous-espaces propres de A en fonction du paramètre α.

   Le polynôme caractéristique de A est $(X + 1)(X + 2)(X - \alpha)$ (triangulaire inférieure, pas besoin de calcul). Donc si $\alpha \neq -1, -2$, il est à racines simples et donc on a $\dim V_{-1} = \dim V_{-2} = \dim V_\alpha = 1$.

   Si $\alpha = -1$, alors

   $$\dim V_{-1} = \dim \mathrm{Ker}\,(A + I_3) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

   Comme -2 est racine simple du polynôme caractéristique on a toujours $\dim V_{-2} = 1$.

   Si $\alpha = -2$, alors

   $$\dim V_{-2} = \dim \mathrm{Ker}\,(A + 2I_3) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

   Comme -1 est racine simple du polynôme caractéristique on a toujours $\dim V_{-1} = 1$.

2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.

   Si $\alpha \neq -1, -2$ alors χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

   Si $\alpha = -1$ alors $\dim V_{-1} + \dim V_{-2} = 2 + 1 = 3$ donc A est diagonalisable.

   Si $\alpha = -2$ alors $\dim V_{-1} + \dim V_{-2} = 1 + 1 < 3$ donc A n'est pas diagonalisable.

3. Donner le polynôme minimal de A en fonction du paramètre α.

   Si $\alpha \neq -1, -2$ alors $\mu_A(X) = \chi_A(X) = (X+1)(X+2)(X-\alpha)$. En effet μ_A divise χ_A est a pour racine -1, -2 et α.

   Si $\alpha = -1$ alors comme A est digonalisable, μ_A est à racine simple et a pour racine -1 et -2 donc $\mu_A(X) = (X+1)(X+2)$.

   Si $\alpha = -2$ alors comme A n'est pas diagonalisable, μ_A n'est pas à racines simples, il a pour racines -1 et -2 et il divise χ_A donc on a $\mu_A(X) = (X+1)(X+2)^2$.

4. On suppose que $\alpha = -2$. Trouver une matrice P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$V_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Posons donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$V_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2I_3) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Soit v_3 un vecteur dans $\operatorname{Ker}(A + 2I_3)^2$ qui ne soit pas dans $\operatorname{Ker} A + 2I_3$, par exemple $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors posons $v_2 = Av_3 + 2v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La base (v_1, v_2, v_3) répond à la question.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Dans tout cet exercice, $w \in \mathcal{L}(E)$ désigne un endomorphisme de rang 1.

1. Donner les dimensions de $\operatorname{Im} w$ et $\operatorname{Ker} w$.

   Par définition $\dim \operatorname{Im} w = \operatorname{rg} w = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} w = n - 1$.

2. Montrer que si $\operatorname{Im} w$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Ker} w$, alors on a $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$.

   D'après le théorème du rang $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$ si et seulement si $\operatorname{Ker} w \cap \operatorname{Im} w = \{0\}$. Supposons $\operatorname{Im} w \cap \operatorname{Ker} w \neq \{0\}$ et prenons x un vecteur non nul dedans. Alors $\operatorname{vect}(x) = \operatorname{Im} w$ car $x \in \operatorname{Im} w$ et $\operatorname{Im} w$ est de dimension 1. Comme on a aussi $\operatorname{vect}(x) \subset \operatorname{Ker} w$ on obtient $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} w$.

3. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} w$.

   (a) Montrer que w est nilpotent.
   Soit $x \in E$, alors $w(x) \in \operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} w$ donc $w^2(x) = 0$.

   (b) Quel est son indice de nilpotence?
   $w^2 = 0$ et $w \neq 0$ (endomorphisme de rang 1), donc l'indice de nilpotence est 2.

4. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$.

   (a) Montrer que $\operatorname{Im} w$ est un sous-espace propre de w.
   $\operatorname{Im} w$ est de dimension 1. Soit donc $y \neq 0$ tel que $\operatorname{Im} w = \operatorname{vect}(y)$. Soit $x = \Lambda y \in \operatorname{Im} w$ non nul, alors $w(x) \in \operatorname{Im} w$ donc $w(x)$ est colinéaire à y. Comme x est aussi colinéaire à y, x et $w(x)$ sont colinéaires, et donc x est un vecteur propre de w. $\operatorname{Im} w$ est donc un sous-espace propre de w.

   (b) En déduire que w est diagonalisable.
   $\operatorname{Im} w$ est un sous-espace propre et $\operatorname{Ker} w$ aussi (associé à la valeur prorpe 0). $E = \operatorname{Ker} w \oplus \operatorname{Im} w$ est donc la somme de sous-espaces propres donc w est diagonalisable.

5. En considérant le polynôme caractéristique χ_w de w, montrer l'équivalence

$$w \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \operatorname{tr}(w) = 0.$$

   Comme $\operatorname{Ker} w$ est de dimension $n-1$ le polynôme caractéristique de w est de la forme $(X - \alpha)X^{n-1}$. Daprès la formule du cours on a alors $\alpha = \operatorname{tr}(w)$. De plus w est nilpotent si et seulement si $\chi_w(X) = X^n$. Donc w est nilpotent si et seulement si $\operatorname{tr}(w) = 0$.

On suppose maintenant qu'il existe $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $w = u \circ v - v \circ u$.

6. Justifier que w est nilpotent.

   w est de rang 1 et on a $\mathrm{tr}(w) = \mathrm{tr}(u \circ v) - \mathrm{tr}(v \circ u) = 0$, donc d'après la question précédente w est nilpotent.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que le rang de $w \circ u^k$ est ≤ 1.
   $\mathrm{Im}\,(w \circ u^k) \subset \mathrm{Im}\, w$ donc sa dimension est ≤ 1.

   (b) En déduire que $w \circ u^k$ est nilpotent.
   Si le rang de $w \circ u^k$ est 0, c'est évident, et si le rang est 1 on conclut en utilisant que $\mathrm{tr}(w \circ u^k) = \mathrm{tr}(u \circ v \circ u^k) - \mathrm{tr}(u^{k+1} \circ v) = 0$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Im}\, w$, $u^k(x) \in \mathrm{Ker}\, w$.
   Si $x = 0$ c'est évident. Supposons $x \neq 0$ alors comme $\mathrm{Im}\, w$ est de dimension 1, on a $\mathrm{Im}\, w = \mathrm{vect}(x)$. De plus $w \circ u^k(x) \in \mathrm{Im}\, w$, donc $w \circ u^k(x) = \lambda x$. Comme $w \circ u^k$ est nilpotent, on en déduit que $\lambda = 0$.

8. Soit $x \in \mathrm{Im}\, w$. On note $F = \mathrm{vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.

   (a) Montrer que F est stable par u.
   Pour tout $k \geq 0$, $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) \in F$, donc F est stable par u.

   (b) Déduire des questions précédentes que $\dim_k F \leq n - 1$.
   D'après la question 7(c), $u^k(x) \in \mathrm{Ker}\, w$ pour tout k, donc $F \subset \mathrm{Ker}\, w$. Comme $\mathrm{Ker}\, w$ est de dimension $n - 1$, on en déduit le résultat.

   (c) En déduire que le polynôme caractéristique χ_u de u n'est pas irréductible.
   F est stable par u donc χ_u est divisible par le polynôme caractéristique de $u_{|_F}$. Comme la dimension de F est $\leq n - 1$, le degré de $\chi_{u_{|_F}}$ est $\leq n - 1$ et donc χ_u n'est pas irréductible.