Université Joseph Fourier

Licence 3 Mathématiques, Parcours B
Algèbre

Examen final

Mardi 7 Janvier 2014

Durée de l'épreuve: 4h

Tout document et appareil électronique (calculatrice, téléphone portable) est interdit.

Barème indicatif: Cours: /2, Ex 1: /5, Ex 2: /7, Ex 3: /2, Ex 4: /7

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Enoncer le théorème de décomposition des noyaux.
2. Soit f un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal μ_f de f pour que f soit diagonalisable.
3. Le démontrer en utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

Exercice 1. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Soit G un groupe fini et $\gamma \in G$ un élément d'ordre p.

1. Montrer que pour tout $1 \leq \ell \leq p-1$, γ est dans le sous-groupe $\langle \gamma^\ell \rangle$ engendré par γ^ℓ.
2. Soit H un sous-groupe de G. On rappelle que pour $g \in G$, on note $gH = \{g.h,\ h \in H\}$.

(a) Montrer que s'il existe deux entiers $0 \leq \ell < m \leq p-1$ tels que l'intersection $\gamma^\ell H \cap \gamma^m H$ est non vide alors γ est dans H.

(b) En déduire que si γ n'est pas dans H, alors $\sharp(G/H) \geq p$.

3. On suppose maintenant que $G = \mathcal{S}_p$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$. Soit H un sous-groupe de G tel que $\sharp H > (p-1)!$ et tel que $H \neq G$.

   (a) En utilisant le théorème de Lagrange, déduire des questions précédentes que H contient tous les p-cycles.

   (b) Soit $(a_1 a_2 \ldots a_p)$ un p-cycle. En calculant le produit $(a_1 a_2 a_3) \circ (a_1 a_2 \ldots a_p)$, justifier que tout 3-cycle est produit de deux p-cycles.

   (c) Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_p$ est engendré par les 3-cycles.

   (d) En déduire que $H = \mathcal{A}_p$.

Exercice 2. On considère $A = \mathbb{Z}[i] = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, .)$. En déduire qu'il est intègre.

2. (Cette question est indépendante du reste de l'exercice). Soit Φ l'application de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{C}$ qui à $P \in \mathbb{Z}[X]$ associe $P(i)$.

   (a) Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.

   (b) Quelle est l'image de Φ? Justifier

   (c) Quel est le noyau de Φ? Justifier

   (d) En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$.

3. Faire un dessin représentant les éléments de A dans le plan complexe. Puis, justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in A$ tel que $|z - z_0| < 1$.

4. Soient $a, b \in A$, $b \neq 0$. Montrer qu'il existe $q \in A$ et $r \in A$ tels que $a = bq + r$ et $|r| < |b|$. (On pourra poser $z = \frac{a}{b}$.)

5. Montrer que les éléments inversibles de A sont 1, -1, i et $-i$.

6. Soit I un idéal non nul de A.

(a) Montrer que l'ensemble $\{|z|^2,\ z \in I, z \neq 0\}$ a une borne inférieure $b > 0$, et qu'il existe $z_0 \in I$ avec $|z_0|^2 = b$.

(b) Montrer que z_0 engendre I.

(c) En déduire que A est un anneau principal.

On s'intéresse maintenant à comprendre les éléments irréductibles de A.

7. Montrer que si $a \in A$ est tel que $|a|^2$ est un nombre premier, alors a est irréductible dans A.

8. Montrer que si $a = x + iy \in A$ est irréductible dans A alors x et y sont premiers entre eux.

9. Soit $p \geq 1$ un nombre premier.

   (a) Montrer que si $p = (x + iy)(x' + iy')$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ et $x + iy$ irréductible dans A, alors $p = x^2 + y^2$.

   (b) En déduire que si $p \geq 2$ est premier et que $p \equiv 3 \bmod 4$ alors p est irréductible dans A.

10. Décomposer 30 en produits d'irréductibles dans A.

Exercice 3. Soit α un paramètre réel, et A_α la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les dimensions des sous-espaces propres de A en fonction du paramètre α.

2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.

3. Donner le polynôme minimal de A en fonction du paramètre α.

4. On suppose que $\alpha = -2$. Trouver une matrice P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Dans tout cet exercice, $w \in \mathcal{L}(E)$ désigne un endomorphisme de rang 1.

1. Donner les dimensions de $\operatorname{Im} w$ et $\operatorname{Ker} w$.
2. Montrer que si $\operatorname{Im} w$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Ker} w$, alors on a $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$.
3. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} w$.
   (a) Montrer que w est nilpotent.
   (b) Quel est son indice de nilpotence?
4. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} w$ est un sous-espace propre de w.
   (b) En déduire que w est diagonalisable.
5. En considérant le polynôme caractéristique χ_w de w, montrer l'équivalence

$$w \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \operatorname{tr}(w) = 0.$$

On suppose maintenant qu'il existe $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $w = u \circ v - v \circ u$.

6. Justifier que w est nilpotent.
7. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que le rang de $w \circ u^k$ est ≤ 1.
   (b) En déduire que $w \circ u^k$ est nilpotent.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Im} w$, $u^k(x) \in \operatorname{Ker} w$.
8. Soit $x \in \operatorname{Im} w$. On note $F = \operatorname{vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.
   (a) Montrer que F est stable par u.
   (b) Déduire des questions précédentes que $\dim_k F \leq n - 1$.
   (c) En déduire que le polynôme caractéristique χ_u de u n'est pas irréductible.