2020-2021

Algèbre L3B

Examen : Mardi 5 Janvier 2021
Durée de l'épreuve 4h

Tout document et appareil électronique (calculatrice, téléphone portable) est interdit.

Barème indicatif : Cours : /2, Ex1 : /5, Ex2 : /4, Ex3 : /2,5, Ex4 : /4, Ex 5 : /3,5

Questions de cours.

1. Démontrer que le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$.
2. Rappeler la définition d'un élément irréductible dans un anneau intègre.
3. Soit A un anneau principal, et $a \in A$ un élément irréductible. Montrer que (a) est un idéal maximal.

Exercice 1. 1. Rappeler la définition d'action transitive. Qu'est-ce que cela signifie sur le nombre d'orbites pour l'action ?

2. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$.
3. Le sous-groupe engendré par le n-cycle $(1 \cdots n)$ agit-il transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$?

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal ≥ 2.

4. Montrer que l'application $G \times (X \times X) \to (X \times X)$ définie par
$$g(x, y) := (gx, gy),\ g \in G,\ (x, y) \in X \times X$$
définit une action de groupe de G sur $X \times X$.

On dit que l'action de G sur X est doublement transitive si
$$\forall x \neq y \in X \ \ \forall x' \neq y' \in X \quad \exists g \in G \text{ tel que } gx = x' \text{ et } gy = y'.$$

5. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit-il doublement transitivement sur $\{1, \cdots, n\}$?
6. Le sous-groupe engendré par le n-cycle $(1 \cdots n)$ agit-il doublement transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$?

7. Montrer que si l'action de G sur X est doublement transitive, alors elle est transitive.
8. Montrer que l'action de G sur X est doublement transitive si et seulement si l'action de G sur $X \times X$ a exactement 2 orbites (On pourra introduire le sous-ensemble $\Delta := \{(x,x) \in X^2, x \in X\}$ de X^2 et son complémentaire)..
9. Pour $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid gx = x\}$ l'ensemble des points fixés par g. En utilisant la formule de Burnside pour l'action de G sur $X \times X$, montrer que si l'action est doublement transitive on a

$$2|G| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|^2.$$

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif. On considère l'anneau produit $A^2 = A \times A$ muni des lois $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+a')$ et $(a,b).(a',b') = (aa', bb')$. On note p_1 (resp. p_2) la projection de A^2 sur A définie par $p_1(x,y) = x$ (resp. $p_2(x,y) = y$)). On rappelle que ce sont des morphismes d'anneaux.

1. Soit I un idéal de A, montrer que

$$B = \{(a,b) \in A^2 | \ a - b \in I\}$$

   est un sous-anneau de A.
2. Soient I_1 et I_2 deux idéaux de A, montrer que $I_1 \times I_2$ est un idéal de A^2, et qu'on a un isomorphisme d'anneaux entre $A^2/(I_1 \times I_2)$ et $A/I_1 \times A/I_2$.
3. Soit J un idéal de A^2.
   (a) Montrer que $J_1 = p_1(J)$ et $J_2 = p_2(J)$ sont des idéaux de A.
   (b) Montrer que J est inclus dans $J_1 \times J_2$.
   (c) Montrer que si $x \in J_1$, alors $(x, 0_A)$ est dans J.
   (d) Montrer que $J = J_1 \times J_2$.
4. Montrer que si A est non nul (c'est-à-dire n'est pas réduit à $\{0_A\}$), alors A^2 n'est pas intègre.
5. En déduire que les idéaux premiers de A^2 sont de la forme $A \times I$, ou $I \times A$ avec I idéal premier de A.

Exercice 3. Soit A un anneau principal, et $a, b \in A$ non nuls. On considère l'ensemble

$$E_{(a,b)} = \{(u,v) \in A^2 \mid au + bv = 1_A\}.$$

1. A quelle condition sur a et b a-t-on $E_{(a,b)} \neq \emptyset$?
2. On suppose maintenant que $E_{(a,b)} \neq \emptyset$. Soit $(u_0, v_0) \in E_{(a,b)}$. Montrer que

$$(u,v) \in E_{(a,b)} \Leftrightarrow \exists w \in A \text{ tel que } u - u_0 = bw \text{ et } v_0 - v = aw.$$

3. **Application :** On prend maintenant $A = \mathbb{R}[X]$. Décrire l'ensemble $E_{(a,b)}$ où $a = (X+1)^2$ et $b = (X-1)^2$.

Exercice 4. Soit $P = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 \in \mathbb{C}[X]$. On considère un endomorphisme f de $E = \mathbb{C}^4$ annulé par P.

1. Faire la division euclidienne de P par $(X-2)^2$, et en déduire la décomposition de P en irréductibles.
2. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)^2 \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)^2.$$
3. Quels sont les polynômes minimaux μ_f possibles pour f ? Pour lesquels f est-il diagonalisable ? Donner les formes diagonales possibles (à permutation des coefficients diagonaux près).

On suppose maintenant que le polynôme caractéristique de f est P.

4. Quelles sont les dimensions de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)^2$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)^2$?
5. Donner trois exemples de matrices non diagonalisables et non semblables deux à deux dont le polynôme caractéristique est P. (On justifiera bien pourquoi elles ne sont pas diagonalisables et pourquoi elles ne sont pas deux à deux semblables).

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E. On note $\chi_f = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ son polynôme caractéristique. Pour $i = 1, \dots, r$, on note V_{λ_i} le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.
On considère l'ensemble
$$\mathrm{Comm}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) | f \circ g = g \circ f\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Comm}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. (Question de cours) Soit $g \in \mathrm{Comm}(f)$.
   (a) Montrer que pour tout $i = 1 \dots, r$ le sous-espace V_{λ_i} est stable par g.
   (b) On note g_i l'endomorphisme g restreint à V_{λ_i}. Montrer que si g est diagonalisable, alors g_i est diagonalisable.
   (c) Montrer que si g est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que les matrices de f et g dans $\mathcal{B}$ sont diagonales.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $i = 1, \dots, r$, le sous-espace V_{λ_i} est stable par g. Montrer que $g \in \mathrm{Comm}(f)$.
4. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Comm}(f)$ en fonction des m_i.