Algèbre L3B

Examen : Janvier 2020

Tout document et appareil électronique (calculatrice, téléphone portable) est interdit.

Barème indicatif : Cours : /1,5, Ex 1 : /5,5, Ex 2 : /7, Ex 3 : /7

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Enoncer le théorème de décomposition des noyaux.
2. Soit f un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal μ_f de f pour que f soit diagonalisable.
3. Le démontrer en utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

Exercice 1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & \beta & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. (a) Quel est le polynôme caractéristique de f ?
   (b) Donner sans calculs les polynômes minimaux possibles pour f ? (on pourra distinguer les cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.)
   (c) Quel est le rang de la matrice $f - \mathrm{Id}_E$?
2. On suppose tout d'abord que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.
   (a) Quel est alors le polynôme minimal de f.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On suppose dans cette question que $\alpha = 0$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\beta = 2$.
4. On suppose maintenant que $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que f n'est pas diagonalisable.
   (b) On pose $\beta = 0$, donner alors une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. On suppose toujours que $\alpha = 1$. On pose $g = 2f - f^2$ et $h = f^2 - f$.
   (a) Montrer que $g^2 - g$ est l'endomorphisme nul. Que peut-on en déduire pour g ?
   (b) Calculer $g + h$ et h^2 en fonction de f.
   (c) En déduire la décomposition de Dunford de f.

Exercice 2. Soit p un nombre entier et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit P un polynôme de $k[X]$ irréductible.

1. (Question de cours) Montrer que k est un corps si et seulement si p est un nombre premier.
2. On suppose maintenant que p est premier.
   (a) Montrer que tout polynôme Q de $k[X]$ est soit divisible par P soit premier avec P.
   (b) En déduire que $k[X]/(P)$ est un corps.
   (c) Quelle est sa caractéristique ?

On considère dans le reste de l'exercice le cas $p = 2$.

5. (a) Justifier que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + 1 \in k[X]$ est irréductible, et donc que $K := k[X]/(P)$ est un corps
   (b) Montrer que le corps K contient exactement 8 éléments.
   (c) Combien de groupe multiplicatif $(K^\times, .)$ contient-il d'éléments ? Est-il cyclique ?
6. On note $\pi : k[X] \to K$ la projection naturelle.
   (a) Montrer que l'on a l'égalité $\pi(X)^2\pi(X + 1) = \pi(1)$ dans K.
   (b) En déduire l'inverse de $\pi(X^2)$, puis l'inverse de $\pi(X^4 + 1)$.
7. On définit $Q = X^4 + 1$ dans $k[X]$.

(a) Calculer le pgcd de P et $Q = X^4 + 1$ dans $k[X]$.

(b) En déduire que l'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\Phi : k[X]/(PQ) \to k[X]/(P) \times k[X]/(Q).$$

(c) Calculer l'antécédent de $(\pi(X), \pi_2(X+1))$ par Φ où π_2 est la projection canonique $k[X] \to k[X]/(Q)$.

8. (a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} K^\times \times K &\longrightarrow K \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

définit une action de $K^\times$ sur K.

(b) Combien cette action a-t-elle d'orbites ? Est-elle transitive ?

(c) L'action est-elle fidèle ?

(d) On note $\varphi : K^\times \to \mathfrak{S}_8$ le morphisme associé à l'action. Montrer que $\varphi(\pi(X))$ est un 7-cycle.

Exercice 3. On rappelle que toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{ou } S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et qu'on a les relations suivantes pour tous $\theta, \theta', \varphi, \varphi' \in [0, 2\pi[$

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'},\ S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta},\ R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi} \text{ et } S_\varphi S_{\varphi'} = R_{\varphi-\varphi'}.$$

1. (Question de cours) Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathcal{U}, .)$ où $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1\}$.
2. Soit G un sous-groupe fini d'ordre n de $SO_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que que G est isomorphe au sous-groupe

   $$\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* |\ z^n = 1\}.$$

   (b) En déduire que G est cyclique.
3. Soit G est sous-groupe abélien de $O_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas entièrement contenu dans $SO_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer qu'il existe φ tel que $G = \langle S_\varphi \rangle$ ou $G = \langle R_\pi, S_\varphi \rangle$.

(b) Le groupe $G = \langle R_\pi, S_\varphi \rangle$ est-il cyclique ? Montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans la suite de l'exercice, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

4. Soit f une isométrie positive de E (c'est à dire un élément de $SO(E)$).

   (a) Montrer que si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

   (b) Montrer que si λ est une valeur propre (réelle) de f, alors $\lambda = \pm 1$.

5. On suppose de plus que $f^2 \neq \mathrm{Id}_E$.

   (a) Montrer que f une valeur propre (réelle) et notons $V = \mathrm{vect}(v)$ le sous-espace engendré par un vecteur propre associé.

   (b) Montrer que f restreint au sous-espace $V^\perp$ est une isométrie de $V^\perp$.

   (c) Montrer qu'il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et un unique $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (d) En déduire que $V = V_1(f)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et que la seule droite vectorielle stable par f est V.

6. Soit H un sous-groupe abélien fini non réduit à $\{\mathrm{Id}_E\}$ de $SO(E)$ n'ayant aucun élément d'ordre 2. On fixe $f \neq \mathrm{Id}_E$ un élément de H. On note $V = V_1(f)$ et $W = V^\perp$.

   (a) Montrer que pour tout $h \in H$, V et W sont stables par h.

   (b) En déduire que si $h \neq \mathrm{Id}_E$, alors $V = V_1(h)$.

   (c) Montrer que l'ensemble H_W des $h_{|W}$ où $h \in H$ est un sous-groupe abélien fini de $SO(W)$.

   (d) En utilisant la question 1., déduire que H est cyclique.