Controle Continu d'agbèbre. 1.
L1S2. Licences PSI.

Nom, prénom, groupe :

1 Consignes (à lire absolument).

- Tout document et appareil électronique (notamment votre téléphone portable) doivent rester dans votre sac. Il y a une horloge disponible en face de vous.
- Répondez sur l'énoncé. Tous les cadres sont à remplir : ils ont tous une taille suffisante. Les petits cadres , , ... sont destinés à des petites réponses $\boxed{\text{oui}}$, $\boxed{\text{faux}}$, $\boxed{3}$ ... Il est inutile de mettre des justifications quand elles ne sont pas demandées. Il est inutile d'écrire les étapes de calcul.
- Si vous voulez changer votre réponse, barrez clairement et réécrire dans le même cadre ou à côté de ce cadre. Vous pouvez aussi redemander un nouvel énoncé.
- Lisez attentivement chaque exercice jusqu'au bout : **une aide est parfois proposée.**
- Il n'y a peu de calculs difficiles. N'hésitez pas à sauter un exercice qui vous parait trop dur ou trop long.
- Le barème est indiqué sur chaque exo (ex : 3+3+3 signifie que l'exercice comporte 3 cadres et que chaque cadre peut rapporter 3 points). Pour les QCM, c'est 1 point par bonne réponse, -1 par mauvaise, et 0 si on ne se prononce pas. Les QCM peuvent comporter plusieurs bonnes réponses et plusieurs mauvaises réponses.
- Le barème est sur 86 points. Vous n'avez pas le même sujet que votre voisin. Bon courage.

2 Début

Exercice 2.1 (2+3+2) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3A - A^2$:

En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un «polynôme en fonction de A» (voir aide).

Calculer A^{-1}:

AIDE : la matrice $3A - A^2$ est diagonale. Si K est une matrice, un «polynome en fonction de K» c'est par exemple $\frac{1}{2}K^3 + 2K^2 + \frac{3}{4}K - 3I$.

Exercice 2.2 (5) Calculer l'inverse de la matrice suivante: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. (On ne demande que le résultat.)

QCM 2.3 (6) Dans tout ce QCM, les matrices A et B sont des matrices carrées inversibles.

(a). Si $AB = BA$ alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(b). Si $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ alors $AB = BA$.

(c). $(A^\top B^\top)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^\top$

(d). Il existe des matrices carrées C non nulles telles que $C^2 = 0$.

(e). si $A^2 = B^2$ alors $A = B$ ou $A = -B$

(f). si $AB = 0$ alors A ou B est nul

Exercice 2.4 (3) Donner la définition d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 2.5 (9) Voici un théorème et sa démonstration. Compléter les cadres et encadrer la bonne option dans les accolades, exemple : $\begin{cases} \boxed{A_{i\ell} = 0} \\ A_{i\ell} > 0 \\ B_{\ell j} = 0 \\ B_{\ell j} > 0 \end{cases}$

Théorème 2.1 Soient A et B des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont triangulaires supérieures. Alors leur produit $C = AB$ est $\boxed{}$.

Démonstration : Tous les indices entiers de la démonstration sont entre 1 et n.

Rappelons tout d'abord que le coefficient (i, j) de la matrice C est donné par l'expression

$C_{ij} = \sum_{\ell} \boxed{}$

Fixons maintenant i et j tels que $i > j$. Etudions le coefficient $A_{i\ell}B_{\ell j}$ en fonction de la position de ℓ :

- Si $\ell < i$ alors on a $\begin{cases} A_{i\ell} = 0 \\ A_{i\ell} > 0 \\ B_{\ell j} = 0 \\ B_{\ell j} > 0 \end{cases}$. Par conséquent $A_{i\ell}B_{\ell j}$ $\boxed{}$.
- Si $\ell \geq i$ alors nécessairement $\begin{cases} \ell < j \\ \ell \leq j \\ \ell \geq j \\ \ell > j \end{cases}$ et alors on a $\begin{cases} A_{i\ell} = 0 \\ A_{i\ell} > 0 \\ B_{\ell j} = 0 \\ B_{\ell j} > 0 \end{cases}$. Par conséquent $A_{i\ell}B_{\ell j}$ $\boxed{}$.
- Ainsi, quelque soit ℓ on a $\boxed{}$ et on en déduit que $C_{ij} = \boxed{}$.

Conclusion : Ceci étant vrai pour tout $i > j$, la matrice C est triangulaire supérieure.

Exercice 2.6 (2+5) On veut trouver une matrice M à coefficients réels, telle que $MA = B$ où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la taille de M ? (Justifier votre réponse)

Ecrivez un système linéaire qui permet de trouver M.

Donnez M explicitement (pas d'étape de calcul).

Aide: Quand on cherche une matrice inconnue, il faut l'écrire avec des variables (ex $x, y, ...$).

Exercice 2.7 (8) On considère le système linéaire $AX = B$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2+b \\ 7 \\ 5+b \end{bmatrix}$, où a et b sont des réels. Remplir les cadres suivants pour indiquer le nombre de solutions du système en fonction des paramètres a et b.

(a). Si $a \neq 0$, le système ☐

et la matrice A ☐ .

(b). Si $a = 0$ et b ☐, le système ☐ et la matrice A ☐ .

(c). Si $a = 0$ et b ☐, le système ☐

et la matrice A ☐ .

Exercice 2.8 (2+2+2) Donner la forme bien échelonnée de la matrice suivante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

☐

Quelles sont les solutions du système linéaire suivant?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - 3z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

☐

Quelles sont les solutions du système suivant?

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

☐

QCM 2.9 (8) On rappelle qu'une matrice symétrique est une matrice A telle que $A = A^\top$.

(a). Une matrice symétrique est toujours carré.

(b). Un matrice symétrique est toujours inversible.

(c). Une matrice inversible est toujours carrée.

(d). Une matrice carrée est toujours inversible.

(e). L'inverse d'une matrice symétrique est symétrique.

(f). Le rang d'une matrice bien échelonnée est son nombre de colonnes non nulles.

(g). Le rang d'une matrice bien échelonnée est son nombre de lignes non nulles.

(h). Le rang d'une matrice inversible est son nombre de lignes.

Exercice 2.10 (2+2+2) Si l'on permute 2 lignes d'une matrice inversible A, elle reste inversible. Justifiez.

Si l'on permute 2 colonnes d'une matrice inversible A, elle reste inversible. Justifiez.

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont la troisième et la quatrième lignes sont identiques. Donnez une matrice élémentaire E telle que la quatrième ligne de EA soit nulle. Que peut-on en déduire sur l'inversibilité de A ? Justifiez brièvement.

Exercice 2.11 (6+4) (Lisez l'aide) Calculez le rang de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

(on écrira les différentes étapes de l'écholonnage). Puis résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} mx & & +z & = m \\ x & & +mz & = m \\ & y & +z & = m \end{cases}$

ADIE : On rappelle qu'il ne faux pas diviser une ligne par zéro. Par contre on peut toujours remplacer une ligne L_i par $L_i - mL_j$ (même quand m est nul). Dans cet exercice, on fera attention aux cas $m = +1$ et $m = -1$.

Exercice 2.12 (7) Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Démontrez par récurrence que

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-2^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On soignera tout particulièrement la rédaction.

QCM 2.13 (4) Les matrices suivantes sont-elles bien échelonnées?

(a). $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$