Université de Strasbourg

Licence 2 Mathématiques
Algèbre S3, Printemps 2012

Feuille 3 : Diagonalisation

Exercice 1. Diagonaliser les matrices suivantes (en donnant les matrices de passage) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et calculer les matrices de passage.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, avec a, b, et c réels. Montrer que A est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Calculer les puissances n-ièmes des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme défini par $f(M) = AM$ où $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser f.

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que l'application de dérivation est linéaire. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que si x est un vecteur propre de $u \circ v$ de valeur propre non nulle, alors $v(x)$ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. En déduire que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Exercice 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme inversible. Décrire $\mathrm{Spec}(u^{-1})$ en fonction de $\mathrm{Spec}(u)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant une unique valeur propre réelle. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que A soit semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $n-1$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de f est de la forme $X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(f))$ où $\mathrm{tr}(f)$ est la trace de f.
2. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^2 \neq 0$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 12. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $A_m = \begin{pmatrix} m(3-m) & 0 & 2m(m-2) \\ -m & m-1 & 2m \\ m(2-m) & 0 & m(2m-3) \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. Déterminer l'ensemble D des m tels que A_m est diagonalisable.
3. Pour $m \in D$, diagonaliser A_m.
4. Même questions avec la matrice $B_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

Applications aux systèmes dynamiques discrets

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par récurrence :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n - v_n. \end{cases}$$

Calculer les termes généraux u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 14.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

   $$u_0 = 3, \quad u_1 = 1 \quad \text{et } u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

   Exprimer u_n en fonction de n.
2. Même question avec

   $$v_0 = 1, \quad v_1 = 2 \quad \text{et } v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n.$$

Exercice 15. On veut étudier l'évolution épidémiologique d'une maladie causée par une piqûre d'insecte. Dans la population, les individus sont dans 3 états possibles : immunisés, porteurs du virus sains, ou malades. D'un mois à l'autre, l'état d'un individu peut changer de la manière suivante :

– 90% des individus immunisés le restent, les autres deviennent porteurs sains.
– 50% des individus porteurs sains le restent, les autres tombent malades.
– 20% des malades le restent, les autres guérissent et sont alors immunisés.

Sachant que la population est totalement immunisée au début de l'épidémie. Quelle sera la proportion de gens malades au bout de 1 mois ? 2 mois ? 1 an ?

Exercice 16. Dans ce pays, il ne fait jamais beau 2 jours de suite. S'il fait beau un jour, il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain. S'il fait mauvais (=pluie ou neige), il y a une chance sur deux que ça ne change pas le lendemain, et quand ça change, alors le changement se fait seulement une fois sur deux vers le beau temps. Quelle est la proportion des jours de beau temps ?