Université de Strasbourg

Licence 2 Mathématiques
Algèbre S3, Printemps 2012

Feuille 2 : Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, on pose :

(a) $\varphi_1(x, y, z) = x_1 + y_2 + z_3$
(b) $\varphi_2(x, y, z) = x_1y_2 + y_2z_1 + z_3x_2$
(c) $\varphi_3(x, y, z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
(d) $\varphi_4(x, y, z) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
(e) $\varphi_5(x, y, z) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
(f) $\varphi_6(x, y, z) = (x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 - z_2)$
(g) $\varphi_7(x, y, z) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies ci-dessus sont-elles multi-linéaires ?

Exercice 3. Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer sans le calculer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est un entier divisible par 17.

Exercice 4. Soit a, b et c des réels quelconques. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\det A = -b(a+b)(a-b)^2$, $\det B = -4bc + (a-b-c)^2$ et $\det C = (a+b+c)^3$.

Exercice 5. Montrer que l'on a

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \sin\left(\frac{c-b}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \sin\left(\frac{a-c}{2}\right).$$

Exercice 6. 1. Exprimer le déterminant suivant sous la forme d'un produit : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

2. En déduire une expression simple du déterminant suivant $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$

Exercice 7. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans k. On définit la fonction suivante :

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $V_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x)$ est un polynôme en x et calculer son degré.
2. Déterminer ses racines et le coefficient de son terme de plus haut degré.
3. En déduire une expression de $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Exercice 8. Soient $A \in \mathcal{M}_p(k)$, $B \in \mathcal{M}_q(k)$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(k)$.

1. Calculer le déterminant des matrices définies par blocs $N = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$.
2. En déduire le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & (n-1) & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 10. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \geq 2$ entier, on définit le déterminant de taille n :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}.$$

1. Exprimer B_n en fonction de B_{n-1} et B_{n-2}.
2. Montrer que $B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

Exercice 11. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. On définit la famille de vecteurs $(y_1, \dots, y_n)$ par

$$\begin{cases} y_i = e_i + e_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ y_n = e_n + e_1 \end{cases}$$

La famille $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est-elle une base de E ?

Exercice 12. Soient α, β et γ des réels. On note

$$D(x) = \begin{vmatrix} \gamma + x & \beta + x & \beta + x & \cdots & \beta + x \\ \alpha + x & \gamma + x & \beta + x & \cdots & \beta + x \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha + x & \alpha + x & \alpha + x & \cdots & \gamma + x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré 1 en x.
2. Calculer $D(-\beta)$ et $D(-\alpha)$
3. En déduire la valeur de $D(0)$ lorsque $\alpha \neq \beta$.
4. Calculer $D(0)$ losrque $\alpha = \beta$.

Exercice 13. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit l'application $T_M : \mathcal{M}_2(\mathcal{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $T_M(A) = AM$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que T_M est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de T_M dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en fonction des réels a, b, c et d.
3. Calculer le déterminant et le rang de T_M.

Exercice 14. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
(a) Deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$ sont semblables si et seulement si elles ont même rang.
(b) Deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$ sont semblables si et seulement si elles ont même déterminant.
(c) Le déterminant est une application linéaire.
(d) Un produit de matrices carrées est une matrice inversible si et seulement si chacune des matrices facteurs du produit est inversible.
(e) Une matrice nilpotente n'est pas inversible.
(f) L'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est à coefficients entiers.
(g) L'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ est à coefficients rationnels.
(h) Une matrice de $\mathcal{M}_n(k)$ est de rang n si et seulement si son déterminant est non nul.
(i) Une matrice est de rang r si et seulement s'il existe un sous-déterminant non nul de taille r.
(j) Une matrice est nilpotente si et seulement si elle est de rang 0.
(k) Un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie est toujours au moins injectif.
(l) Un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie injectif est bijectif.
(m) Un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie injectif est surjectif et réciproquement.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(k)$. On note $\mathsf{com}A$ sa comatrice. Déterminer $\det(\mathsf{com}A)$ et calculer $\mathsf{com}(\mathsf{com}(A))$.

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$.

1. Que dire de $\mathsf{com}A$ si A est triangulaire ?
2. Quel est le rang de $\mathsf{com}A$ si $\mathrm{rg}A = n$?
3. Quel est le rang de $\mathsf{com}A$ si $\mathrm{rg}A = n - 1$?

4. Quel est le rang de $\mathsf{com}A$ si $\mathrm{rg}A = n-2$?

Exercice 17. 1. On définit les vecteurs $x_1 = e_1 - e_3$, $x_2 = 2e_1 - e_3$ et $x_3 = e_1 + e_2 + e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant de (x_1, x_2, x_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire que (x_1, x_2, x_3) est une base. Est-elle directe ? indirecte ? En déduire le volume du parallelepipède engendré par x_1 x_2 et x_3.

2. On définit les points $O = (0,0)$, $A = (3,1)$ $B = (4,3)$, $C = (1,2)$ et $D = (-1,-1)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'aire du parallélogramme $OABC$? Et celle du parallélogramme $ABCD$?

Exercice 18. 1. On définit les vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'équation du plan engendré par f_1 et f_2.

2. On définit les vecteurs $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$. Determiner des équations linéaires définissant le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par g_1 et g_2.

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f une forme n-linéaire alternée sur E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on définit

$$f_u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

1. Montrer que f_u est une forme n-linéaire alternée sur E.
2. En déduire qu'il existe un réel $\lambda_{f,u}$ tel que $f_u = \lambda_{f,u} f$. Montrer que ce réel ne dépend pas de f.
3. Montrer que $f_u = \mathrm{tr}\,(u).f$.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré p et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré q. On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rl} \Phi_{P,Q} : \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \to \mathbb{R}_{p+q-1} \\ (U,V) & \mapsto PU + QV \end{array}$$

1. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ est linéaire et calculer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée.
2. On pose $R(P,Q) = \det \Phi_{P,Q}$ (c'est le résultant des polynômes P et Q). Montrer que si $R(P,Q) \neq 0$ alors P et Q sont premiers entre eux.
3. Montrer que si $R(P,Q) = 0$ alors P et Q ont un facteur commun.
4. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$. Calculer la matrice de $\Phi_{P,P'}$ dans la base canonique. On note $\Delta(P) = -\frac{1}{a} R(P,P')$. Calculer $\Delta(P)$.
5. Montrer que si $P(X) = X^3 + bX + c$, alors $\Delta(P) = -R(P,Q) = -4b^3 - 27c^2$.