Université de Strasbourg

Licence 2 Mathématiques
Algèbre S3, Printemps 2012

Feuille 1 : Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. On définit les sous-ensembles suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z + 1 = 0\},$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2 + x_3 + x_4 = 0\},$$

$$E_4 = \mathrm{vect}((1, 2, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (1, 3, 0, 0))$$

$$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y = 3z\}$$

$$\text{et} \quad E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0, z + 2x = 0\}$$

1. Déterminer si E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 sont des espaces vectoriels.
2. Trouver une base pour ceux qui sont des espaces vectoriels.
3. Ecrire E_4 comme l'ensemble des zéros d'un système d'équations linéaires.

Exercice 2. Soient $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 2, -1)$, et $e_3 = (0, -4, 2, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-elle libre ?
2. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Soient $e_1 = (0, 1, -2, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2, -1)$, $e_3 = (3, 2, 2, -1)$, $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_5 = (0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{vect}(e_1, e_2) \cap \mathrm{vect}(e_2, e_3, e_4)$.
3. $\mathrm{vect}(e_1, e_2) + \mathrm{vect}(e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$.
4. $\mathrm{vect}(e_4, e_5)$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Prouver que $((X+1)^2, X^2, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Exprimer les coordonnées de $aX^2 + bX + c$ dans cette base.

Exercice 5. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0\}.$$

1. Montrez que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminez des bases et les dimensions de E, F et $E \cap F$.
3. La réunion $E \cup F$ est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
4. A-t-on $E + F = \mathbb{R}^4$? A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
5. Déterminez deux sous-espaces vectoriels $E' \subset E$ et $F' \subset F$ tels qu'on ait $E' \oplus F = F' \oplus E = \mathbb{R}^4$.

6. Existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $\operatorname{Ker} f = E$ et $\operatorname{Im} f = F$? Tel que $\operatorname{Ker} f = E$ et $\operatorname{Im} f = F'$.

Exercice 6. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim E = \dim F$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^n$ tel que $E \oplus G = F \oplus G = \mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et N deux sous-espaces vectoriels de E. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire f de E dans E vérifiant : $f(E) = F$ et $\ker(f) = N$.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes
(a) $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$,
(b) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$,
(c) $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Exercice 10. Soit p et u des endomorphismes de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(a) $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$
(b) $u$et v sont des projecteurs et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et soit λ un paramètre réel.

1. Démontrez que la donnée de

$$\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 \quad \varphi(e_2) = 2e_1 - e_2 \quad \varphi(e_3) = -e_1 + \lambda e_3$$

   définit une application linéaire φ de E dans E.
2. Quelle est l'image par φ du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \in \mathbb{R}$.
3. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{K}[X]_n$. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im}(f)$. Montrez qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{pmatrix}$ où m est un paramètre complexe. Soit $f_m \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1. Déterminez l'image et le noyau de f_m en fonction du paramètre m.
2. Discutez de l'existence de solution de l'équation $AX = \begin{pmatrix} 2m \\ 2m \\ 1-m \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$.

1. Construisez des exemples de telles applications.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrez que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminez la matrice de φ dans cette base.

Exercice 15. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Calculer le rang de A en fonction des paramètres a, b, c.
2. Même question avec
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
(Indication : On pourra écrire $A = (a-b)I_n + bM$ et faire un changement de base.)

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{K}$ de base $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ défini par la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}' = \{e_1', e_2'\}$ où $e_1' = e_1 - 2e_2$ et $e_2' = -e_1 + e_2$.
2. En déduire une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 18. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -8 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f l'application linéaire qui lui est associée dans la base canonique $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs $u = e_1 + e_2$, $v = e_2 - e_3$ et $w = e_1 + 2e_2 + e_3$. Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice B associée à f dans cette base.
2. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $B^3 - 2B^2 - B$. En déduire la représentation matricielle de $f^3 - 2f^2 - f$ dans la base canonique.