SPECTRE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR LES GRAPHES*

Y. Colin de Verdière**

7 juin 1999

* "Random walks and discrete potential theory" (Cortona, 22-28 june 1997), Proceedings à paraitre.

** Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UJF 5582
BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex (France)
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

Abstract

Dans cet exposé de survol, nous commençons par présenter des ensembles naturels d'opérateurs de type Schrödinger associés à un graphe fini.

Nous étudions ensuite les limites singulières (au sens de la $\Gamma-$convergence) de tels opérateurs et montrons qu'elles sont associées à des relations naturelles entre graphes (mineurs, transformation étoile-triangle) ou à des limites d'un intérêt indépendant (processus de Markov (recuit simulé), réseaux électriques).

Cela conduit à introduire la notion de stabilité structurelle pour une valeur propre multiple d'un opérateur d'une famille en utilisant la transversalité dans les espaces d'opérateurs symétriques.

Les invariants numériques de graphes ainsi construits sont liés à des problèmes classiques de la combinatoire des graphes : planarité, genre, plongement non-noué dans $\mathbb{R}^3$, largeur d'arbre.

Mots clés : graphes, opérateurs de Schrödinger, mineurs, étoile-triangle, arbres, limites singulières

AMS Subject Classification : 05C10, 05C50, 35B25, 35J10.

1 Introduction

La théorie spectrale des opérateurs différentiels dont le prototype est le laplacien sur une variété riemannienne compacte a connu un grand développement durant les 30 dernières années. En particulier, l'asymptotique des grandes valeurs propres, liée à la dynamique classique (géodésiques périodiques) a fait l'objet de nombreux travaux. Les propriétés purement spectrales (i.e. non asymptotiques, purement quantiques) présentent également un grand intérêt ; il se trouve, ainsi que cette conférence le montre bien, qu'un cadre, a priori plus simple, se prête bien à l'étude spectrale des opérateurs différentiels : il s'agit de comprendre le spectre des opérateurs différentiels de type laplacien ou Schrödinger sur les graphes. En retour, on attend en particulier de nouveaux résultats pour le cas continu !!

Les *ensembles* d'opérateurs considérés dans la suite se rencontrent dans de nombreux domaines des mathématiques (discrétisation par éléments finis [8],[11], effet tunnel semi-classique [21], processus de Markov [12], limites de laplaciens de surfaces de Riemann à courbure -1 lorsque certaines géodésiques fermées simples ont des longueurs qui tendent vers 0 [9]) et de la physique (supraconducteurs [35], physique quantique [30], spectres moléculaires [24] ou même plus anciennement [29]).

A chaque graphe fini $G = (V, E)$ (on pose $n = |V|$), on associe des *ensembles* d'opérateurs différentiels auto-adjoints sur l'espace de Hilbert (de dimension finie) $H_G = \mathbb{C}^V$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \sum_{i \in V} f(i)\bar{g}(i) \ .$$

Un *opérateur différentiel* sur G est un endomorphisme linéaire A de H_G qui est *local*, c'est-à-dire que $Af(i) = \sum_j a_{i,j} f(j)$ où les $a_{i,j}$ sont nuls si $\{i, j\}$ n'est pas une arête et $i \neq j$ (on peut considérer qu'il y a des arêtes $\{i, i\}$ pour chaque $i \in V$) ; autrement dit $Af(i)$ ne dépend que de $f(j)$ pour j voisin de i.

Un opérateur différentiel A sur G est dit *elliptique* si $a_{i,j} \neq 0$ pour toute arête $\{i, j\}$, $i \neq j$.

A est dit *auto-adjoint* s'il l'est comme opérateur sur H_G.

M_G est l'ensemble de tous les opérateurs elliptiques auto-adjoints sur G ; on dira d'un élément de M_G que c'est un *opérateur de Schrödinger avec champ magnétique* sur G. M_G est une sous-variété de dimension $|V| + 2|E|$ de l'espace des matrices hermitiennes $V \times V$.

O_G est le sous-ensemble de M_G formé des matrices symétriques réelles dont les coefficients $a_{i,j}$ sont < 0 pour toute arête $\{i, j\}$. On dira d'un élément de O_G que c'est un *opérateur de Schrödinger* sur G. O_G est une sous-variété de dimension $|V| + |E|$ de $S(H_G)$, l'espace des endomorphismes symétriques de H_G.

L_G est le sous-ensemble des $A \in O_G$ tels que $A1 = 0$. Ce sont les *laplaciens*. L_G est de dimension $|E|$.

Les laplaciens canoniques habituellement considérés

$$\Delta_0 f(i) = \sum_{\{i,j\}\in E} (f(i) - f(j)),\ \Delta_1 f(i) = -\sum_{\{i,j\}\in E} f(j)\ ,$$

sont des éléments de O_G, et pour Δ_0 de L_G. Le laplacien

$$\Delta_2 f(i) = \frac{1}{d_i} \sum_{\{i,j\}\in E} (f(i) - f(j))\ ,$$

n'est pas auto-adjoint pour la métrique canonique sur H_G sauf si le degré d_i du sommet i est constant. Il est auto-adjoint pour la métrique $\sum d_i x_i^2$ sur H_G. On peut le rendre auto-adjoint pour la métrique canonique par la transformation $(Ux)_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} x_i$; alors $U^{-1}\Delta_2 U$ est dans O_G.

Des généralisations possibles de ces ensembles sont les suivantes :

a) on attribue à chaque arête un signe $\pm$ et on impose le signe correspondant aux $a_{i,j}$. Le lien avec les diagrammes de noeuds et les invariants associés reste alors à éclaircir : le graphe médial d'un diagramme de noeud est de façon naturelle un graphe planaire avec des signes $\pm$ sur chaque arête qui indique quel brin passe dessus ou dessous.

b) On considère le cas vectoriel, i.e. celui où $H_G^N = \oplus_{i\in V}\mathbb{C}^N$. Cela intervient aussi comme outil lorsque l'on considère des produits de graphes.

c) Le cas des graphes infinis : on doit alors bien préciser les conditions de croissance des coefficients si possible de façon à avoir un spectre discret.

d) Dans le cas de M_G, il peut être utile de considérer des arêtes doubles et, si $\{i,j\}$ double, le coefficient $a_{i,j}$ de $A \in M_G$ peut être nul ($a_{i,j} = a + (-a),\ a \neq 0$).

Soit $G = (V, E)$ donné. Le problème de départ est le suivant :

étant donné une suite $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et un des 3 ensembles précédents notés de façon générique Z_G, existe-t-il $A \in Z_G$ dont le spectre soit la suite précédente ?

Je vais commenter ce programme :

1) Tel quel le problème est mal posé (ou trop difficile), car non monotone par rapport à la complexité du graphe : la réponse est triviale pour un graphe sans arête, car $O_G = M_G$ est l'ensemble des matrices diagonales réelles, tout spectre est alors possible pour un opérateur convenable de O_G.

On sait par ailleurs que, si G est connexe et $A \in O_G$ la première valeur propre est de multiplicité 1 (Perron-Frobenius).

2) On va insister sur l'aspect ensemble d'opérateurs : ce n'est pas tant un opérateur isolé qui va nous intéresser, mais la position relative de Z_G et

d'une variété W donnée par des conditions spectrales, par exemple $\lambda_2 = \lambda_3$. Cela permet d'introduire des idées de transversalité et donc de gagner une monotonie : tout ce qu'on peut faire avec un graphe G doit pouvoir être fait avec tout graphe G' plus complexe que G. On peut aussi rapprocher cela de la théorie des discriminants (Arnold, Vassiliev), qui consiste à regarder les objets singuliers de l'ensemble considéré, ici l'ensemble des opérateurs dont au moins une valeur propre est multiple.

3) Les arguments de transversalité permettent ainsi de construire des nouveaux invariants des graphes qui sont reliés à la théorie classique des graphes : plongements dans les surfaces, arbres, mineurs.

4) Un argument simple permet de montrer que toute suite $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ de n nombres distincts est le spectre d'un $A \in O_G$:

on considère les applications

$$\Phi_\varepsilon : \{u_1 < u_2 < \cdots < u_n\} \to \lambda_1(\varepsilon) < \cdots < \lambda_n(\varepsilon)$$

où les $\lambda_i(\varepsilon)$ sont les valeurs propres (simples pour $\varepsilon > 0$ petit) de la forme quadratique

$$q_{\varepsilon,u} = \sum u_i x_i^2 + \varepsilon \sum_{\{i,j\}\in E} (x_i - x_j)^2 \ .$$

Pour $\varepsilon = 0$, $\Phi_\varepsilon = Id$ et donc l'application du théorème des fonctions implicites donne le résultat.

Le problème se concentre donc sur les multiplicités.

On notera $W_{l,k}$ la sous-variété de $S(H)$ formée des opérateurs A dont le spectre vérifie :

$$\cdots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k = \cdots = \lambda_{k+l-1} < \lambda_{k+l} \leq \cdots \ .$$

On note $W_l = \cup_k W_{l,k}$.

On note aussi $m_k^Z(G)$ le plus grand l tel que $Z_G \cap W_{l,k} \neq \emptyset$.

Par exemple $m_1^O(G)$ est le nombre de composantes connexes de G ; $m_2^O(G)$ est déjà un invariant moins trivial (voir plus loin).

Exemple 1.1 : les chemins.

Soit P_n le chemin à n sommets $\{1, \cdots, n\}$ et les arêtes $\{i, i+1\}$, $1 \leq i \leq n-1$. Toutes les valeurs propres d'un opérateur quelconque de M_{P_n} sont simples, car un vecteur propre x est entièrement déterminé par x_1.

Exemple 1.2 : les graphes cycliques.

Les sommets de ce graphe C_n sont les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les arêtes joignent i à $i \pm 1$ (mod n). On alors, pour tout $A \in O_{C_n}$ ([21]) :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \cdots \ .$$

Listes de graphes vus plus loin :

$$P_n,\ C_n,\ K_n,\ E_{n+1},\ K_{3,3},\ S_{2n-1},\ T_{\frac{n(n+1)}{2}}\ ,$$

où l'indice désigne le nombre de sommets.

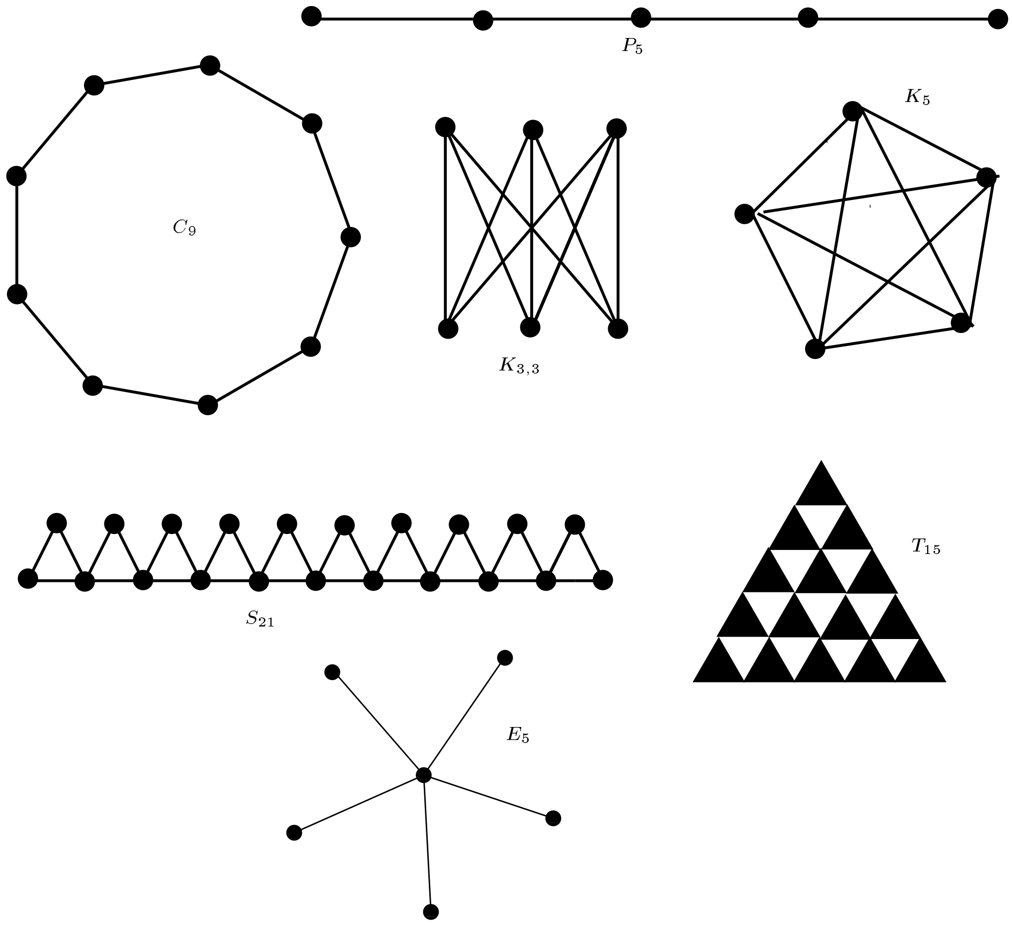

Figure 1: graphes

2 Stabilité structurelle

2.1 Perturbations des valeurs propres multiples

Soit H un espace euclidien de dimension n et $\varepsilon \to A_\varepsilon$ une application C^2 d'un voisinage de 0 à valeurs dans $S(H)$ l'espace des endomorphismes symétriques de H.

Soit λ_0 une valeur propre de A_0 et $E_0 \subset H$ l'espace propre associé de dimension l.

Soit I un intervalle fermé de centre λ_0 et tel que $\sigma(A_0) \cap I = \{\lambda_0\}$; alors pour ε assez petit, I contient exactement l valeurs propres de A_ε (comptées avec multiplicités) et notées :

$$\lambda_1(\varepsilon) \leq \cdots \leq \lambda_l(\varepsilon) \ .$$

Soit $B = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} A_\varepsilon$ et q_B la forme quadratique sur E_0 définie par

$$q_B(x) = < x|B|x > \ ,$$

et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_l$ le spectre de q_B.

Alors, on a [21] :

$$\forall i \text{ tel que } 1 \leq i \leq l, \ \lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\mu_i + O(\varepsilon^2) \ .$$

Soit $W_l^{\lambda_0} = \{A \in S(H) \mid \dim\ker(A - \lambda_0) = l\}$, alors $W_l^{\lambda_0}$ est une sous-variété de $S(H)$ dont l'espace tangent $T_{A_0} W_l^{\lambda_0}$ est formé des $B \in S(H)$ tels que $q_B = 0$. En particulier, $W_l^{\lambda_0}$ est de codimension $\frac{l(l+1)}{2}$.

Notations :

on note aussi $W_l^{\lambda_0} = \cup_k W_{l,k}^{\lambda_0}$, où $A \in W_{l,k}^{\lambda_0}$ si $\lambda_{k-1}(A) < \lambda_k(A) = \cdots = \lambda_{k+l-1}(A) \ (= \lambda_0) < \cdots$, et $W_{l,k} = \cup_{\lambda_0} W_{l,k}^{\lambda_0}$.

$W_{l,k}$ est de codimension $\frac{l(l+1)}{2} - 1$.

Pour $l = 2$, cette dernière codimension vaut 2 : l'observation que la condition d'avoir une valeur propre double pour une matrice symétrique réelle est de codimension 2 remonte aux années 1930 (Wigner-Von Neumann [41], voir aussi [1], [3]). Donc, si $t \to A_t$ est un chemin générique dans $S(H)$, il n'y aura de valeurs propres multiples pour A_t pour aucun t. On aura typiquement une évolution des valeurs propres faisant apparaitre des *croisements évités.*

Soit maintenant $\Phi \ : (u,v) \to A_{u,v}$ une famille à 2 paramètres de matrices symétriques. Supposons que Φ coupe tranversalement $W_{2,k}$ en (u_0, v_0) ; on a donc, en notant $A_0 = A_{u_0,v_0}$, le spectre de A_0 qui vérifie

$$\cdots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} < \cdots \ ,$$

et le graphe simultané de λ_k et λ_{k+1} a l'allure d'un cône.

Soit γ un lacet du plan des (u,v) qui entoure (u_0, v_0) sans entourer d'autres points (u,v) avec $A_{u,v} \in W_{2,k}$, soit $\phi_k(t)$ un vecteur propre de $A_{\gamma(t)}$ correspondant à la valeur propre simple $\lambda_k(A_{\gamma(t)})$ supposé réel et de norme 1 et que l'on peut donc suivre par continuité autour de γ ; lorsqu'on fait un tour, $\phi_k(t)$ se transforme en $-\phi_k(t)$. Le fibré réel de dimension 1 donné par l'espace propre $\ker(A_{\gamma(t)} - \lambda_k(t))$ est donc non trivial (ruban de Möbius).

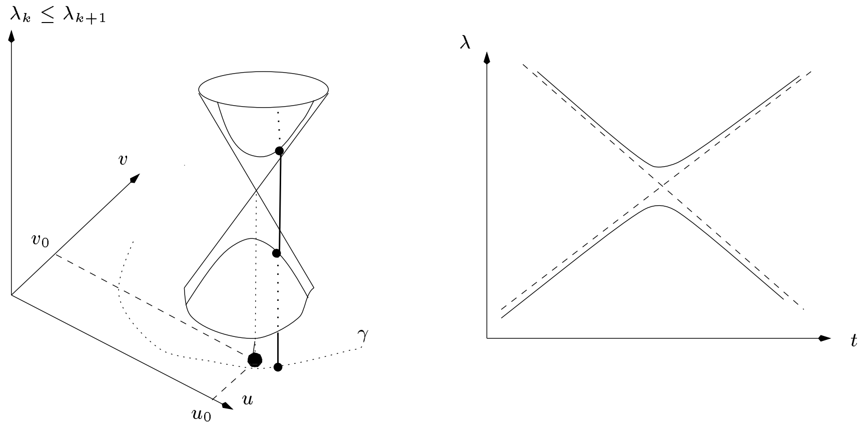

Figure 2: point diabolo

Ce fait peut être mise à profit pour détecter des valeurs propres multiples dans une famille d'opérateurs dépendant de 2 paramètres. Voir [6]. La transversalité joue un grand rôle ici : sans elle, la monodromie pourrait être triviale !! C'est cette situation que nous allons généraliser maintenant.

Le cas hermitien complexe peut être traité de façon analogue. Il faut alors remplacer $\frac{l(l+1)}{2}$ par l^2, la dimension de l'espace des matrices hermitiennes $l \times l$. La variété $W_{2,k}$ est alors de codimension 3 et l'argument avec le lacet γ doit être remplacé par un argument avec une petite sphère plongée. Le fibré associé à une valeur propre simple est alors un fibré de rang 1 complexe dont la classe de Chern est 1 si la sphère entoure exactement un point de W_2. Voir [13] .

2.2 Stabilité structurelle des valeurs propres

On est ainsi conduit à donner une définition générale de la stabilité structurelle d'une valeur propre relativement à une variété Z d'opérateurs.

Définition 1 *Soit $A \in Z \subset S(H)$, où Z est une sous-variété. Supposons que $A \in Z_G \cap W_{l,k}$. On dit que la valeur propre λ_k de A est $Z-$structurellement stable si $W_{l,k}$ et Z se coupent transversalement en A. Autrement dit, l'apparition d'une valeur propre de multiplicité l dans Z est un phénomène stable par perturbation de Z.*

On peut tester de façon purement algébrique cette condition de stabilité si on connait l'espace propre :

si $\Phi : T_A Z \to S(E_0)$ (où E_0 est l'espace propre de A considéré) est donnée par

$$\Phi(B)(x) = < x|B|x > \quad ,$$

la condition de stabilité structurelle équivaut à la surjectivité de Φ.

2.3 Exemples

Exemple 2.1 *Si $Z = O_G$, la première valeur propre λ_1 n'est stable que si elle est de multiplicité 1.*

Exemple 2.2 *Soit E_N l'étoile à N branches, $A \in O_{E_N}$ où $-A$ est la matrice d'adjacence. La 2ème valeur propre de A est de multiplicité $N-1$ et n'est stable que si $N \leq 3$.*

Exemple 2.3 : graphes complets. *Il s'agit des graphes K_n dont toute paire de sommets est connectée par une arête. Si A est le laplacien canonique, la seconde valeur propre est de multiplicité $n-1$ et $O_{K_n}-$stable et même $L_{K_n}-$stable.*

Exemple 2.4 : graphe de Kuratowski. *Il s'agit du graphe noté $K_{3,3}$ dont l'ensemble des sommets est $V_1 \cup V_2$ (union disjointe), avec $|V_i| = 3$, et les 9 arêtes joignent les sommets de V_1 à ceux de V_2.*

Si $A = \Delta_0$ est le laplacien canonique, son spectre est

$$0 < 3 = 3 = \cdots = 3 < 6 \ ,$$

et la valeur propre 3 de multiplicité 4 est $O_{K_{3,3}}-$stable.

Exemple 2.5 : cas complexe. *Dans le cas hermitien complexe ($A \in M_G$), le théorème de Perron-Frobenius ne s'applique pas et on peut regarder la stabilité de λ_1.*

Soit d'abord S_{2n-1} le graphe planaire formé de $n-1$ triangles recollés en une chaine tel que chacun a un sommet commmun avec le suivant. Soit A tel que la forme quadratique associée est

$$q(x) = \sum |x_i + x_j + x_k|^2 \ ,$$

où la somme porte sur les triangles $\{i, j, k\}$. On voit facilement que $\ker A = q^{-1}(0)$ est de dimension n et n'est pas M_G-stable.

Soit ensuite $T_{n(n+1)/2}$ le graphe formé en subdivisant un triangle équilatéral en petits triangles équilatéraux grâce à une subdivision des côtés du triangle initial en $n-1$ intervalles égaux. Colorions en noir ou en blanc les petits triangles suivant qu'ils pointent vers le haut ou le bas. La même recette que précédemment, en sommant sur les triangles noirs, donne lieu à un fondamental de multiplicité n qui est M_G-stable.

2.4 Les invariants $\mu_k^Z(G)$

On définit maintenant une famille d'invariants numériques d'un graphe G grâce à une version stabilisée de $m_k^Z(G)$.

Définition 2 *Si Z_G est un des 3 ensembles d'opérateurs M_G, O_G, L_G définis plus haut, on définit*

$$\mu_k^Z(G)$$

comme le sup des entiers l tels qu'il existe $A \in Z_G$ avec $\cdots < \lambda_k = \cdots = \lambda_{k+l-1} < \cdots$ et $\lambda_k(A)$ est Z_G-stable.

Exemple 2.6 *Pour tout G, $\mu_1^O(G) = 1$.*

Exemple 2.7 $\mu_2^O(K_n) = n - 1$.

Exemple 2.8 $\mu_2^M(T_{n(n+1)/2}) = n$.

Exemple 2.9 $\mu_2^O(K_{3,3}) = 4$.

Exemple 2.10 $\mu_2^O(E_3) = 2$ *et, pour* $N \geq 2$, $\mu_2^O(E_N) = 2$.

Exemple 2.11 $\mu_k^O(C_n) = 1$ *si k est impair et 2 si k est pair.*

3 Mineurs des graphes et limites singulières d'opérateurs

3.1 Monotonie par mineurs

La propriété principale des invariants introduits précédemment est la monotonie par mineur.

Définition 3 *Un graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ est dit mineur de $G_2 = (V_2, E_2)$ si G_1 peut être construit à partir de G_2 de la façon suivante : si*

$$V_2 = \cup_{\alpha \in B} W_\alpha$$

est une partition de V_2 en sous-ensembles connexes, V_1 est un sous-ensemble de B et E_1 vérifie la condition suivante :

$$\{\alpha, \beta\} \in E_1 \text{ implique qu'il existe } i \in W_\alpha,\ j \in W_\beta \text{ tels que } \{i, j\} \in E_2 \ .$$

On peut aussi dire que G_1 est un mineur de G_2 si on passe de G_2 à G_1 par une suite finie des opérations élémentaires suivantes : ôter une arête, contracter une arête, ôter un sommet isolé.

On a alors le :

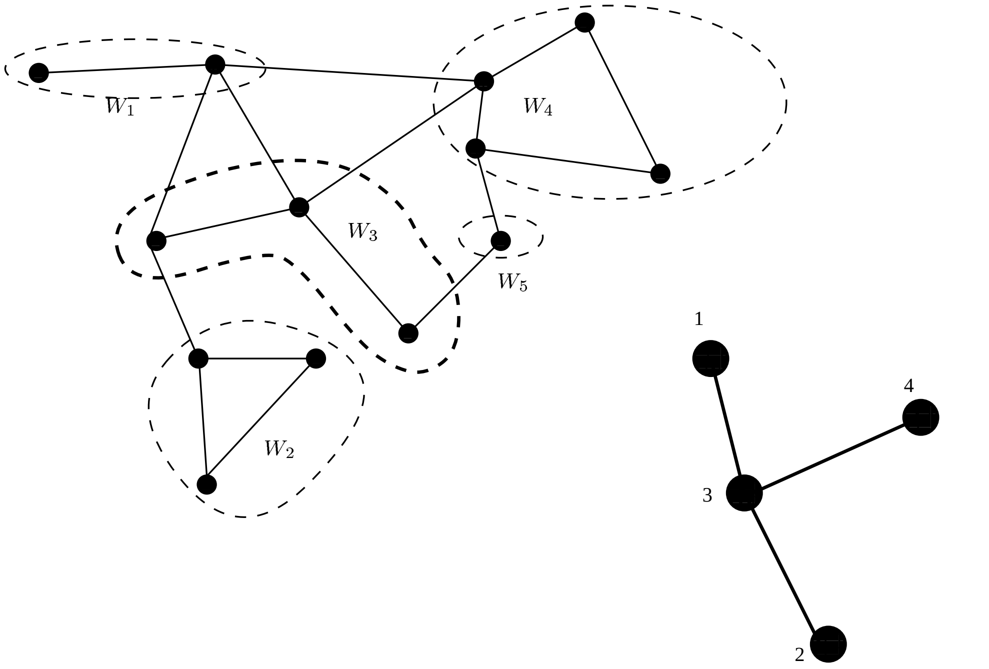

Figure 3: mineurs

Théorème 1 *Pour chaque ensemble $Z = M, O$, si G_1 est un mineur de G_2 :*

$$\mu_k^Z(G_1) \leq \mu_k^Z(G_2) \ .$$

Pour montrer ce théorème, il suffit de le montrer dans les cas particuliers où l'on ôte ou contracte une arête de G_1.

Le cas où l'on ôte une arête est simple, car $H_{G_1} = H_{G_2}$. On utilise alors la conservation d'une intersection transversale par perturbation C^1.

Donnons l'argument plus précis dans le cas de O_G. Soit H l'espace de Hilbert considéré et supposons que l'on a numéroté les sommets de G_2 de façon que G_1 s'obtienne en ôtant l'arête $\{1, 2\}$ de G_2. Soit $Z_\varepsilon = O_{G_1} + \varepsilon(x_1 - x_2)^2$ (où on a écrit les opérateurs comme des formes quadratiques), alors $Z_\varepsilon \subset O_{G_2}$ pour $\varepsilon > 0$.

On conclut ainsi : si $Z_0 = O_{G_1}$ et $W_{l,\lambda}$ se coupent transversalement en A, il en est de même pour Z_ε et $W_{l,\lambda}$ en A_ε et donc de O_{G_2} et $W_{l,\lambda}$ en A_ε. Il reste à vérifier que le numéro de la valeur propre λ ne change pas.

Le cas où l'on contracte l'arête $\{1, 2\}$ est plus délicat, car il n'est plus vrai que $H_{G_1} = H_{G_2}$; on a seulement une inclusion $H_{G_1} \subset H_{G_2}$ en identifiant H_{G_1} au sous-espace de $\mathbb{C}^{V_2}$ dont les éléments sont les vecteurs x tels que $x_1 = x_2$.

On doit pour faire marcher l'argument précédent mettre dans une même variété les opérateurs non partout définis. C'est le but du § suivant. Une autre difficulté est que la structure hilbertienne du sous-espace de H_{G_2} n'est pas la structure canonique de H_{G_1}.

Cela empêche de montrer le théorème pour $Z = L$.

Pour les autres ensembles, on se débrouille par changement de jauge ou plus simplement par translation par λId qui ramène à la valeur propre 0 indépendamment de la structure hilbertienne considérée.

3.2 $\Gamma-$convergence

Soit H un espace euclidien de dimension finie n. Soit A un opérateur symétrique sur H. On note q_A la forme quadratique associée.

Soit $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in H\} \subset H \oplus H$ le graphe de A.

Soit $Y \subset H$ un sous-espace euclidien de H et $B : Y \to Y$ un opérateur symétrique sur Y, on dira que le couple (Y, B) est un opérateur non borné sur H si $Y \neq H$. On étend la définition du graphe aux opérateurs non bornés de la façon suivante.

$$\Gamma(Y, B) = \{(y, z) \in Y \oplus H \mid \forall w \in Y, < z|w >=< By|w > \ \} .$$

Comme cas particulier, $\Gamma(A) = \Gamma(H, A)$. Il est clair que $\Gamma(Y, B)$ est toujours un sous-espace de dimension n de $H \oplus H$.

Soit ω la forme symplectique définie par

$$\omega((x, y), (x', y')) =< y'|x > - < x'|y > \ .$$

Un sous-espace de $H \oplus H$ de dimension n, qui est isotrope pour la forme symplectique ω est dit *lagrangien*.

On vérifie que tout sous-espace lagrangien est le graphe d'un unique opérateur symétrique, borné ou non, et que réciproquement tout graphe $\Gamma(Y, B)$ est lagrangien. L'ensemble des opérateurs symétriques avec domaine sur H est ainsi une compactification Λ_H de l'espace $S(H)$ des endomorphismes symétriques de H en une variété compacte de classe C^∞.

On dira que (Y, B) est *inversible* si $\sigma(\Gamma(Y, B))$, où $\sigma(x, y) = (y, x)$, est le graphe d'une application de H dans $Y \subset H$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit

$$(Y, \lambda I - B)$$

par son graphe

$$\Gamma(Y, \lambda I - B) = \{(y, \lambda y - \xi) \ , \ (y, \xi) \in \Gamma(Y, B)\} \ .$$

Ceci définit du même coup les deux notions de résolvante (inverse de $\lambda I - B$) et de spectre (valeurs singulières de λ). Ainsi le spectre de (Y, B) est réunion du spectre de B et de la valeur propre ∞ répétée $(n - \dim Y)$ fois.

Remarque : seul un ordre cyclique sur les valeurs propres est pertinent ; on ne peut pas distinguer $-\infty$ de $+\infty$ sans perdre la continuité du spectre. Si A décrit un lacet de Λ_H les valeurs propres font collectivement un nombre de tours égal à l'indice de Maslov du chemin ([4]).

Définition 4 *On dira qu'une famille A_ε, $\varepsilon > 0$ d'opérateurs symétriques sur H $\Gamma-$converge vers (Y, B) si $\Gamma(A_\varepsilon)$ converge vers $\Gamma(Y, B)$ quand $\varepsilon \to 0$ au sens de la topologie naturelle de la grassmannienne des sous-espaces de dimension n de $H \oplus H$.*

On note

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) \ .$$

Le résultat suivant étend au cadre de la $\Gamma-$convergence les résultats classiques de Kato [32] sur la convergence des spectres de formes quadratiques.

Théorème 2 *Supposons $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$. Soient*

$$\lambda_1(\varepsilon) \leq \cdots \leq \lambda_n(\varepsilon)$$

les valeurs propres de A_ε. Alors le spectre de A_ε converge vers celui de (Y, B) au sens de la topologie de $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \infty$.

L'existence de $\Gamma-$limites n'est pas exceptionnelle.

Proposition 1 *Soient $A_i : X \to X$ des applications linéaires symétriques, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ et, pour $\varepsilon > 0$:*

$$A_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} A_i \varepsilon^{\alpha_i} \ .$$

Soit Z la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de dimension n de $X \oplus X$ et $C_\varepsilon \in Z$ le graphe de A_ε.

Alors l'application $\varepsilon \to C_\varepsilon$ de $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ dans Z se prolonge par continuité en $\varepsilon = 0$.

De plus, si les α_i sont entiers, le prolongement est analytique réel.

La $\Gamma-$convergence étant assurée dans de nombreux cas d'intérêt pratique, on cherchera à caractériser une $\Gamma-$limite (Y, B) en décrivant le domaine Y et les coefficients de la matrice B.

Dans toute la suite, les opérateurs symétriques sont toujours supposés positifs.

Définition 5 *On note $x_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{s}} x_0$ si x_ε converge vers x_0 avec $Q_\varepsilon(x_\varepsilon) = O(1)$.*

Lemme 1 *Si $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y,B)$, $x_0 \in Y$ ssi il existe x_ε tel que $x_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{s}} x_0$.*

Lemme 2 *Soit Y_ε un sous-espace vectoriel de dimension p de X tel que Y_ε tend vers Y et que, pour $\varepsilon \neq 0$, la norme de la restriction de A_ε à Y_ε est bornée.*

Soit ϕ_ε un isomorphisme de Y dans Y_ε tel que pour tout $y \in Y$, lorsque $\varepsilon \to 0$, $\phi_\varepsilon(y)$ tend vers y et

$$Q_\varepsilon(y) =< \phi_\varepsilon(y)|A_\varepsilon|\phi_\varepsilon(y) > \ .$$

Alors Q_ε admet une limite Q_0 comme forme quadratique sur Y et si B est l'opérateur associé, on a :

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y,B) \ .$$

Remarquons que l'hypothèse que la norme de la restriction de A_ε est bornée entraîne que $\phi_\varepsilon(y) \xrightarrow{\mathbf{s}} y$. Une version pratique de ce lemme est la suivante : soit (y_i) une base de Y et $y_{i,\varepsilon}$ convergents vers y_i avec $A_\varepsilon y_{i,\varepsilon} = O(1)$, alors la matrice de $b_{i,j} =< y_i|B|y_j >$ de B est donnée par :

$$b_{i,j} = \lim < y_{i,\varepsilon}|A_\varepsilon|y_{j,\varepsilon} > \ .$$

Attention : il ne faut pas prendre pour définition de Q_ε

$$Q_\varepsilon(y) =< y|A_\varepsilon|y > \ ,$$

qui pourrait ne pas avoir de limite ou une limite incorrecte !

Exemple 3.1 : contraction d'une arête.

Soit $q_\varepsilon(x) = Q(x) + \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x_2)^2$. Lorsque $\varepsilon \to 0$, $q_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y,B)$ où $Y = \{x_1 = x_2\}$ et q_B est la restriction de Q à Y.

Cet exemple permet de traiter la contraction d'une arête comme le cas où l'on ôte une arête.

Exemple 3.2 : transformations étoile-triangle.

Voir [5] pour ce qui suit.

Plaçons-nous sur $H = \mathbb{R}^4$, avec la forme quadratique

$$Q_\varepsilon(x) =< x|A_\varepsilon|x >= \sum_{i=1}^{3}(x_i - \frac{x_0}{\varepsilon})^2 \ .$$

Prenons $p = 3$ et $Y_\varepsilon = \{y_0 = (\varepsilon/3)(y_1 + y_2 + y_3)\}$. Alors $Q_0(y) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(y_i - y_{i+1})^2$ et non $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} y_i^2$.

On dit que G' s'obtient de G par une transformation *étoile-triangle* si on remplace un sommet 0 de degré 3 de G et les arêtes $\{0,i\}$, $1 \leq i \leq 3$, qui s'y accrochent par le triangle $(1,2,3)$.

$O_{G'}$ est alors une strate de l'adhérence de O_G dans Λ_{H_G}.

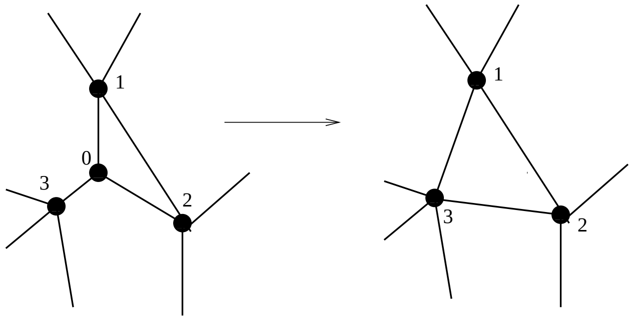

Figure 4: transformation étoile-triangle

Exemple 3.3 : recuit simulé.

Une présentation détaillée de cet exemple est donnée dans [12].

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe fini et $H : V \to \mathbb{N}$ une fonction (énergie). On suppose $V_0 \neq \emptyset$. On suppose aussi que, si $\{i, j\} \in E$, $|H(i) - H(j)| \leq 1$.

Soit $T > 0$ et $\varepsilon = e^{-\frac{1}{2T}}$. On considère la mesure de probabilité de Gibbs π_T sur V, à température T donnée par $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H(i)}{T}}$. Lorsque $T \to 0^+$ cette mesure de probabilité converge vers la probabilité uniforme sur l'ensemble V_0 des minimas absolus de H.

On peut donc espérer trouver ces minimas en simulant un processus de Markov ayant π_T comme mesure d'équilibre et en faisant tendre T vers 0 à une vitesse judicieusement choisie : c'est le principe de base de l'algorithme dit de *recuit simulé.*

On définit le processus de Markov par un opérateur Λ_T défini par

$$(\Lambda_T x)_i = \sum_{j \sim i} \lambda_{i,j}(x_i - x_j) \ ,$$

avec $\lambda_{i,j} = 0$ si $\{i, j\} \notin E$ et :

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } H(j) \leq H(i) \ ; \\ e^{-\frac{H(j)-H(i)}{T}}, & \text{si } H(j) > H(i) \ . \end{cases} \tag{1}$$

L'opérateur Λ_T est symétrique sur $l^2(V, \pi_T)$. Posant $y_i = \sqrt{p_i} x_i$, on obtient un opérateur de O_G noté A_ε, unitairement équivalent à Λ_T, associé à la forme quadratique

$$Q_\varepsilon(x) = \sum_{\{i,j\} \in E,\ H(i) < H(j)} (\varepsilon^{H(j)-H(i)} x_i - x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in E,\ H(i) = H(j)} (x_i - x_j)^2 \ .$$

On note

$$\lambda_1(\varepsilon) = 0 < \lambda_2(\varepsilon) \leq \cdots \leq \lambda_n(\varepsilon) \ ,$$

les valeurs propres de Λ_ε (et donc de A_ε).

On souhaite donner une description précise du comportement asymptotique des $\lambda_i(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0, et en particulier du gap $g(\varepsilon) = \lambda_2(\varepsilon)$.

On a une filtration

$$\cdots \subset \mathcal{H}_l \subset \cdots \subset \mathcal{H}_0 = \mathbb{R}^V$$

où $\mathcal{H}_l$ est l'espace engendré par les fonctions propres de valeurs propres $O(\varepsilon^{2l})$.

Le but est de décrire cette filtration et l'asymptotique des valeurs propres associées. L'existence de la filtration résulte de Kato et du fait que $Q_\varepsilon \geq 0$ est isospectral à $Q_{-\varepsilon}$: en effet si $U : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ est l'opérateur unitaire qui consiste à changer x_i en $-x_i$ lorsque $H(i)$ est impair, on a : $Q_\varepsilon(Ux) = Q_{-\varepsilon}(x)$.

$\varepsilon^{-2l}Q_\varepsilon$ admet une $\Gamma-$limite $R_l = (\mathcal{H}_l, S_l)$ qui s'identifie à un élément de O_{G_l} que l'on va décrire.

Décrivons maintenant les graphes G_l et les espaces $\mathcal{H}_l$ (les domaines) par récurrence sur l :

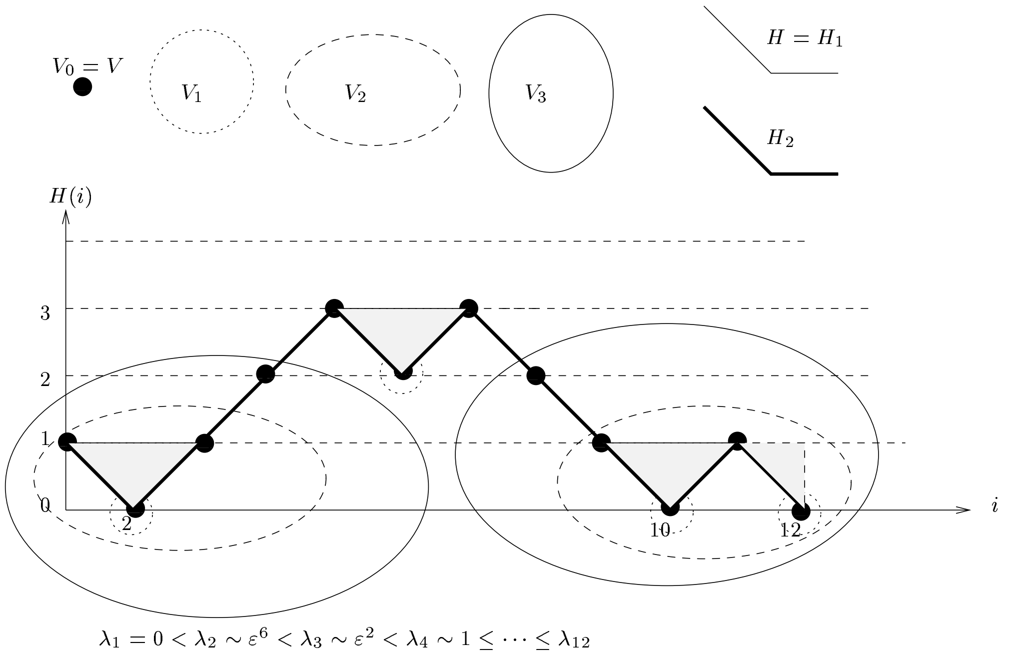

Figure 5: les graphes G_l

(i) $G_1 = (V_1, E_1)$ est ainsi défini: $i \in V$ sera dit minimum local de H s'il existe $A \subset V$ connexe, $i \in A$ tel que H est constante sur A et vaut $H(i) + 1$ sur les voisins d'un sommet de A qui ne sont pas dans A. L'ensemble des ces parties connexes A est l'ensemble V_1. Si $\alpha \in V_1$, on note $A_\alpha \subset V$ la composante connexe du minimum local correspondante : les A s'appelle puits d'ordre 1.

$\mathcal{H}_1$ est l'espace des fonctions constantes sur les $A \in V_1$ et nulles ailleurs. Sa dimension est bien sûr $\# V_1$.

(ii) On remplace alors $H = H_1$ par $H + 1$ sur chacune de ces parties de V_1, on obtient une énergie H_2 et on construit ainsi un ensemble de parties V_2 en considérant de même les minimas locaux de H_2 ; les sommets d'une composante d'un minima de H_2 s'appellent puits d'ordre 2 ; 2 éléments A, B de V_1 (éventuellement confondues) sont connectés par une arête de G_1 s'ils sont contenus dans un même puits C de V_2 : le graphe G_l est donc un graphe avec des boucles.

Et on itère la construction :

(ii) on remplace H_2 par $H_2 + 1$ sur les ensembles de V_2, etc...

Soit $Q_l = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2l} Q_\varepsilon$, alors Q_l s'identifie naturellement à un opérateur de type Schrödinger sur G_l avec un potentiel ≥ 0 nul seulement aux sommets qui ont des boucles.

De ceci, on peut calculer le nombre de valeurs propres qui sont $O(\varepsilon^{2l})$ qui est donné par le nombre de sommets de G_l, i.e. le nombre de puits d'ordre l.

En fait les formes Q_l sont déterminées entièrement en restreignant Q_ε à un sous-graphe de G : celui formé des sommets des $A \in V_l$ et des sommets inondés si on augmente H_l de η, $\eta > 0$ petit sur les $A \in V_l$.

Tout ceci détermine l'ordre de grandeur du gap :

$$g(\varepsilon) = C\varepsilon^{2k}(1 + O(\varepsilon^2)) \ ,$$

où k est la *hauteur du col le plus haut* ; un col est un chemin γ entre 2 minimas locaux a et b dont l'altitude maximale $h = \sup_{x \in \gamma} H(x)$ est minimale parmi tous les chemins qui joignent ces 2 minimas. La hauteur de ce col est

$$H(a, b) = \inf(h - H(a), h - H(b)) \ .$$

k est aussi le sup des l tels qu'il existe au moins 2 puits d'ordre l ($= 0$ s'il n'existe qu'un minimum local).

Cette description n'est pas nouvelle. On la déduit classiquement de la théorie de Freidlin et Wentzell ([27]).

Exemple 3.4 : limites croissantes.

Dans le cas particulier d'une suite croissante de formes quadratiques positives, la notion de $\Gamma-$limite se ramène à celle de limite simple.

Proposition 2 *Soit A_n une suite croissante de formes quadratiques positives définies sur X et $q_n(x) =< x|A_n|x >$ la suite croissante des formes* *quadratiques associées. Soit*

$$q_\infty : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$$

la limite simple des q_n, et

$$Y = \{x \in X \mid q_\infty(x) < \infty\} \ .$$

Soit (Y, B) la forme quadratique avec domaine associée (si $y \in Y$, $q_\infty(y) =< y|B|y >$). Alors

$$A_n \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) \ .$$

On en déduit en particulier le :

Théorème 3 *L'adhérence dans Λ_{H_G} de l'ensemble L_G est la réunion des $L_{G'}$ pour G' mineur de G (attention la structure euclidienne sur les $\mathbb{R}^{V'}$ n'est pas la structure canonique).*

Cette proposition est en particulier utilisée dans [19] et [10] pour montrer que la réponse d'un réseau électrique varie continument lorsque le réseau dégénère.

Exemple 3.5 *:* **réseaux électriques.**

Un *réseau électrique* est un quadruplet $R = (V_0, V_1, E, \rho)$ où V_0 et V_1 sont 2 ensembles finis disjoints, $G = (V = V_0 \cup V_1, E)$ est un graphe fini et $\rho = (\rho_{i,j}) \in (\mathbb{R}^+ \setminus 0)^E$ est l'ensemble des conductances des arêtes. V_0 est l'ensemble des sommets terminaux, V_1 l'ensemble des sommets intérieurs. L'énergie électrique d'un potentiel $u \in \mathbb{R}^V$ est donnée par

$$e(u) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\{i,j\}\in E} \rho_{i,j}(u_i - u_j)^2\Big) \ .$$

Un *potentiel d'équilibre* de R est un élément de $u = (u_i) \in \mathbb{R}^V$ tel que, pour tout $i \in V_1$,

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \rho_{i,j}(u_i - u_j) = 0 \ .$$

Les réponses de R sont les couples $(u_0, w_0) \in \mathbb{R}^{V_0} \oplus (\mathbb{R}^{V_0})^\star$, où u_0 est la restriction d'un potentiel d'équilibre u à V_0 et $(w_0)_i = \sum_{\{i,j\}\in E} \rho_{i,j}(u_i - u_j)$. On note $\Phi(R)$ l'ensemble des réponses de R.

Si $L_e \subset \mathbb{R}^V \oplus (\mathbb{R}^V)^\star$ est le graphe de la différentielle de e, l'ensemble des réponses est obtenue de L_e par réduction symplectique et donc $\Phi(R)$ est un sous-espace lagrangien de $\mathbb{R}^{V_0} \oplus (\mathbb{R}^{V_0})^\star$.

Soit maintenant $\rho \in [0, +\infty]$. A ce ρ, on associe un nouveau réseau électrique (G', ρ') dont le graphe G' sous-jacent est le mineur de G obtenu en contractant les arêtes telles que $\rho_{i,j} = \infty$ et en ôtant celles telles que $\rho_{i,j} = 0$. ρ' est défini à partir de e par restriction à $\mathbb{R}^{V'} \subset \mathbb{R}^{V}$.

On montre ([19]) que l'application Φ s'étend continument comme application de $[0, \infty]^V$ dans la grassmannienne lagrangienne de $\mathbb{R}^{V_0} \oplus (\mathbb{R}^{V_0})^\star$.

Exemple 3.6 : limites d'éléments de O_G.

Le théorème suivant montre que toute $\Gamma-$ limite d'éléments de O_G est de façon naturelle élément d'un $O_{G'}$, où G' est un mineur généralisé de G. On notera $G' << G$ cette relation d'ordre.

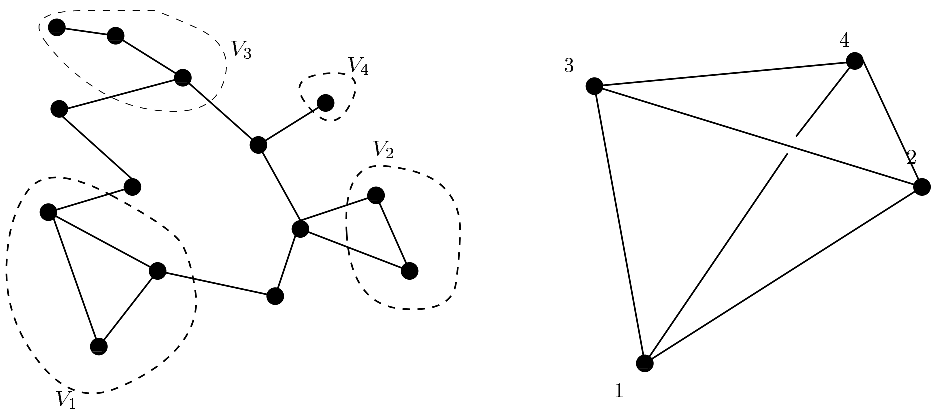

Figure 6: G et G'

Théorème 4 *Soit $A_\varepsilon \in O_G$. Supposons que $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$ avec $p = \dim Y$.*

Description de Y :

il existe une partition (définie par A_ε)

$$V = W_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_p \ ,$$

où les V_i, $i \geq 1$ sont connexes, telle que si $F_i = \{y \in Y t.q.\ Supp(y) \subset V_i\}$, les F_i, $i \geq 1$ sont de dimension 1 et $Y = \oplus_{i=1}^p F_i$.

Chaque F_i est engendré par une fonction $\varphi_i \geq 0$ de norme 1. Ces ϕ_i forment donc une base orthonormée de Y.

Description de B :

la matrice $(b_{i,j})$ de B dans la base des ϕ_i est un élément de O_{G_0} où $V(G_0) = \{1, \cdots, p\}$ et, si $\{i,j\} \in E(G_0)$, il existe un chemin γ de G qui joint V_i à V_j sans rencontrer les autres V_l.

On a donc les inclusions :

$$\cup_{G' < G} O_{G'} \subset \bar{O}_G \subset \cup_{G" << G} O_{G"} \ .$$

3.3 Stabilité structurelle pour les opérateurs non bornés

On se ramène au cas où $\lambda_0 = 0$. L'adhérence dans Λ_H de W_l^0 est une sous-variété lisse. En effet, si $L = H \oplus 0$, $A \in W_l^0$ si et seulement si $\Gamma(A) \cap L$ est de dimension l. L'adhérence de W_l^0 est donc l'ensemble des espaces lagrangiens définis par cette condition de dimension. C'est une sous-variété lisse de Λ_H.

Pour l'étude de ces variétés et de la stratification correspondante, voir [2].

On peut ainsi étendre aux opérateurs non bornés la théorie de Kato et la notion de stabilité structurelle.

4 Plongements de graphes dans les surfaces

4.1 Le théorème de Cheng et sa réciproque

Dans [7], Cheng a prouvé le résultat suivant :

Théorème 5 *Si $A = \Delta_g + V$ est un opérateur de Schrödinger sur S^2 munis d'une métrique riemannienne g, la multiplicité de $\lambda_2(A)$ est inférieure ou égale à 3 ; cette borne est optimale (cas $V = 0$ et $g = g_{can}$).*

Les ingrédients de la preuve sont le théorème de Jordan et le théorème de Courant sur les domaines nodaux. La preuve s'appuie sur la structure locale des lignes nodales des fonctions propres.

Voici une esquisse de la preuve du théorème de Cheng : soit A un opérateur de Schrödinger sur S^2 tel que, si $F = \ker(A - \lambda_2(A))$, $\dim F \geq 4$.

Soit $x_0 \in S^2$, par un argument d'algèbre linéaire, il existe $\varphi \in F \setminus 0$ telle que

$$\varphi(x_0) = 0,\ \nabla\varphi(x_0) = 0\ .$$

Soit $C = \varphi^{-1}(0)$. On montre que C est un graphe plongé dans S^2 dont tous les sommets sont de degré pair (les branches issues d'un sommet s forment un système équiangulaire dont le degré est $2p$ si p est l'ordre d'annulation de φ en s). La formule d'Euler montre alors que le nombre de composantes connexes de $S^2 \setminus C$ est ≥ 3 dès que C a au moins un sommet de degré ≥ 4 ce qui est le cas pour le φ choisi.

Il reste à appliquer le théorème de Courant sur les ensembles nodaux qui affirme que, si $\varphi \in \ker(A - \lambda_k(A))$ où A est un opérateur de Schrödinger sur une variété quelconque X, alors le nombre de composantes connexes de $X \setminus \varphi^{-1}(0)$ est $\leq k$, ici 2.

L'extension du théorème de Courant au cas des graphes ne marche pas en toute généralité, mais H. van der Holst a remarqué qu'il s'applique pour

$\varphi \in \ker(A - \lambda_2(A)) = F$, avec $A \in O_G$, pourvu que le support de φ soit minimal dans $F \setminus 0$.

Ce théorème a été généralisé aux graphes par Hein van der Holst ([38] et [39]) en le

Théorème 6 *Si G est le 1-squelette d'une triangulation de S^2 et $A \in O_G$, la multiplicité de $\lambda_2(A)$ est au plus 3. Cette borne est optimale et atteinte pour la laplacien canonique de K_4.*

Utilisant le fait que tout graphe planaire est mineur du 1-squelette d'une triangulation de S^2, on en déduit que, si G est planaire, $\mu_2^O(G) \leq 3$.

En fait, en utilisant la théorème de Kuratowski qui caractérise les graphes non planaires comme ceux dont K_5 ou $K_{3,3}$ est mineur, on montre ([18]) le :

Théorème 7 *Un graphe G est planaire si et seulement si :*

$$\mu_2^O(G) \leq 3 \ .$$

4.2 Extension aux autres surfaces : Cheng, Besson, Nadirashvili, Sévennec

Des majorations de la multiplicité de la seconde valeur propre d'opérateurs de Schrödinger sur les surfaces ont été obtenues ensuite (voir par exemple [37]) ; par exemple, si S est orientable, la borne optimale est 6 pour le tore ; la borne prouvée est $4g$ en général, mais on ne sait pas si elle est optimale.

4.3 Les graphes ayant un plongement non-noué et le résultat de Lovász-Schrijver

Une généralisation intéressante de la classe des graphes planaires est la classe des graphes G admettant un plongement non noué dans $\mathbb{R}^3$, i.e. tel que 2 circuits disjoints quelconques de G ne soient pas entrelacés comme lacets de $\mathbb{R}^3$. L'exemple le plus simple est K_5 qui n'est pas planaire, mais n'admet aucune paire de circuits disjoints.

L'analogue du théorème de Kuratowski est que ces graphes admettent une caractérisation par mineurs exclus : les graphes exclus étant les transformés par étoile-triangle de K_6. On montre dans [5] que $\mu_2^O(G) = 5$ pour ces graphes et Lovász et Schrijver [31] ont réussi à montrer le joli :

Théorème 8 $\mu_2^O(G) \leq 4$ *si et seulement si G admet un plongement non-noué dans $\mathbb{R}^3$.*

5 Largeur d'arbre

Pour tout ce §, voir [23].

Les invariants $\mu_k^M(G)$ ne sont pas reliés aux propriétés topologiques des graphes. On peut s'en douter par analogie avec le cas continu : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant $Bdx \wedge dy$, $B > 0$, dans le plan $\mathbb{R}^2$,

$$H = (\frac{1}{i}\partial_x - By)^2 + (\frac{1}{i}\partial_y)^2$$

admet un spectre discret

$$B < 3B < 5B < \cdots$$

où chaque valeur propre est de multiplicité infinie (ces valeurs propres sont appellées *niveaux de Landau* en physique). Les graphes importants à considérer ici sont les arbres !

5.1 Transformations de jauge

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $D = (\varepsilon_i)_{i\in V}$ une matrice diagonale unitaire. Si $A = (a_{i,j}) \in M_G$, il en est de même pour $A_D = D^{-1}AD$ et $\sigma(A_D) = \sigma(A)$. On a :

$$(a_D)_{i,j} = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j a_{i,j} \ .$$

Si $\gamma = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ ($\forall m$ *tel que* $1 \leq m \leq k$, $\{i_m, i_{m+1}\} \in E$), le produit

$$h(A, \gamma) = (-1)^k a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_k,i_1}$$

vérifie :

$$h(A_D, \gamma) = h(A, \gamma) \ .$$

De plus, on a, bien sûr, $h(A, \gamma) > 0$ si $A \in O_G$ et la réciproque est vraie quitte à faire un changement de jauge.

Si $T = (V, E)$ est un arbre, il n'admet pas de circuit non triviaux et, pour tout $A \in M_T$, on peut trouver D tel que $A_D \in O_T$.

On en déduit, par application du théorème de Perron-Frobenius, que

$$m_1^M(T) = 1 \ .$$

5.2 Les $\mu_k^M(T)$

Les arguments suivants sont détaillés dans [23].

On a besoin des lemmes suivants :

Lemme 3 *Si $G = (V, E)$ est connexe et $\{1, 2\} \in E$ est telle que $G' = (V, E \setminus \{1, 2\})$ n'est pas connexe, si $A \in M_G$ et $F = \ker A$, si $r : F \to \mathbb{C}^2$ est définie par $r(x) = (x_1, x_2)$, l'image de r est de dimension ≤ 1.*

Preuve.–

Soit V_1 la composante connexe dans G' du sommet 1 et pour tout $x \in F$ soit x' la restriction à V_1 étendue par 0. On calcule explicitement le membre de droite de l'égalité :

$$0 =< Ax'|y' > - < x'|Ay' > \ ,$$

en fonctions des valeurs de x et y en 1 et 2.

On trouve :

$$0 = a_{1,2}(x_2\bar{y_1} - x_1\bar{y_2}) \ ,$$

d'où la conclusion.

□

Lemme 4 *Soit T un arbre dont les sommets sont de degré ≤ 3 et pour $\{i, j\} \in E(T)$, T' et T" les 2 arbres obtenus en ôtant l'arête $\{i, j\}$. On note F' et F" les restrictions à V' et V" de $\ker r$. Si $\dim F > 2$, il existe $\{i, j\} \in E(T)$ telle que $F' \neq 0$ et F" $\neq 0$.*

On en déduit la :

Proposition 3 *Si T est un arbre dont tous les sommets sont de degré ≤ 3,*

$$\forall k, \ \mu_k^M(T) \leq 2 \ .$$

Preuve.–

Soit $x' \in F' \setminus 0$ et $x" \in F" \setminus 0$, si on prend ces 2 vecteurs normalisés comme premiers vecteurs d'une base de F, on contredit la transversalité : $\forall B \in T_A M_G$, $q_B(x', x") = 0$.

□

Du fait que tout arbre est mineur d'un arbre dont les sommets sont de degré ≤ 3, on déduit le

Théorème 9 *Pour tout arbre T,*

$$\forall k, \ \mu_k^M(T) \leq 2 \ .$$

5.3 Largeur d'arbre

Définition 6 *Soit G un graphe fini, on définit la largeur d'arbre de G, notée $la(G)$ comme le inf des entiers k tel que G est mineur d'un graphe $T \times K$ avec $|V(K)| = k$.*

On peut alors montrer, à l'aide d'une version vectorielle des arguments précédents, le :

Théorème 10 *Pour tout graphe G, on a :*

$$\mu_1^M(G) \leq la(G) \ ,$$

et, $\forall k$, :

$$\mu_k^M(G) \leq 2la(G) \ .$$

On peut aussi montrer que $\mu_1^M(G) = 1$ si et seulement si G est une forêt. H. van der Holst ([40]) a trouvé une caractérisation des graphes G tels que $\mu_1^M(G) \leq 2$ (ce sont exactement ceux tels que $la(G) \leq 2$) et de ceux tels que $\mu_1^M(G) \leq 3$.

5.4 Fonctions holomorphes discrètes

Les majorations précédentes sont optimales, même dans le cadre des des graphes planaires : on a

$$\mu_1^M(T_{\frac{n(n+1)}{2}}) = n = la(T_{\frac{n(n+1)}{2}}) \ .$$

En fait, la majoration de la largeur d'arbre par n est simple et la minoration résulte du théorème précédent.

On peut donner une version géométrique d'un opérateur A dont le fondamental est de mutiplicité n et $M-$stable au moyen des fonctions holomorphes discrètes.

On prend comme forme hermitienne sur $\mathbb{C}^V$

$$q_A(x) = \sum |(x_k - x_i) - \omega(x_j - x_i)|^2 \ ,$$

où la somme porte sur les triangles noirs (i,j,k) orientés et $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Le noyau de A corespond à une notion de fonction holomorphe de G dans $\mathbb{C}$. L'image de chaque triangle noir par un $x \in \ker A$ prolongé affinement est un triangle équilatéral direct.

6 Problèmes

6.1 Nombres chromatiques

Le nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets d'un graphe de façon que 2 sommets voisins quelconques soient de couleurs différentes.

Le nombre chromatique $\chi(S)$ d'une surface compacte S est le sup des nombres chromatiques des graphes plongés dans S. Lorsque S n'est pas une sphère, ce nombre est donné par le sup des n tels que K_n se plonge dans S (cf [34]). Pour la sphère, le théorème des 4 couleurs affirme que $\chi(S^2) = 4$.

Un des problèmes les plus excitants est de relier nos invariants $\mu_k^Z(G)$ aux nombres chromatiques. Une conjecture possible est la suivante :

Conjecture *([17]) : pour tout graphe G, on a :*

$$\chi(G) \leq \mu_2^O(G) + 1 \ .$$

Cette conjecture qui implique le théorème des 4 couleurs est plus faible que la conjecture classique de Hadwiger qui dit que, si $\chi(G) = l$, K_l est un mineur de G.

6.2 Majoration optimale en terme du genre

Il résulte des travaux de Cheng, Besson, Nadirashvili et Sévennec que, pour une surface orientable compacte de genre g, on a pour $g \geq 2$:

$$\chi(S) - 1 = E[\ \frac{5}{2} + \sqrt{12g + \frac{1}{4}}\ ] \leq \mu_2^O(S) \leq m_2^O(S) \leq 4g \ ,$$

alors que pour $g = 0$ et $g = 1$, on a $\mu_2^O(S) = m_2^O(S) = \chi(S) - 1$.

Peut-on améliorer ces inégalités ?

6.3 Stabilisation de A. Schrijver

Soit $\nu_k^Z(G) = \inf_{G \leq G'} m_k^Z(G')$. On a bien sûr $\nu_k^Z(G) \geq \mu_k^Z(G)$.

A-t-on égalité ?

6.4 Perron-Frobenius quantitatif

Peut-on majorer la multiplicité de la première valeur propre $\lambda_1(A)$ pour $A \in M_G$ en fonction des arguments des holonomies $h(A, \gamma)$ pour les cycles de G ?

On peut trouver un analogue continu, le théorème de Aharonov-Casher, voir [25] p. 125-129.

References

[1] V. Arnold. Modes and quasi-modes. *Functional analysis and its applications*, 6:94-101, 1972.

[2] V. Arnold. The Sturm theorems and symplectic geometry. *Functional analysis and its applications*, 19:251-259, 1995.

[3] V. Arnold. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Sel. Math., New Ser.*, 1:1-19, 1995.

[4] V. Arnold. On a characteristic class intervening in quantization conditions. *Functional analysis and its applications*, 1:1-14, 1967.

[5] R. Bacher et Y. Colin de Verdière. Multiplicités de valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes *Bull. Soc. Math. Fr.*, 123:101-117, 1995.

[6] M. Berry, M. Wilkinson. Spectra of triangles. *Proc. Royal Soc. London*, A392:15-43, 1984.

[7] S.Y. Cheng. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51:432-55, 1976.

[8] Ph. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. *North Holland*, 1978.

[9] B. Colbois et Y. Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante. *Comment. Math. Helv.*, 63:194-208, 1988.

[10] Y. Colin de Verdière, I. Gitler, D. Vertigan. Réseaux électriques planaires II. *Comment. Math. Helvetici*, 71:144-167, 1996.

[11] Y. Colin de Verdière et A. Marin. Triangulations presque equilatérales des surfaces. *Journal of Diff. Geometry*, 32:199-207, 1990.

[12] Y. Colin de Verdière, Y. Pan, B. Ycart. Limites singulières d'opérateurs de Schrödinger et de processus de Markov. *Journal of Operator theory*, 41:151-173, 1999.

[13] Y. Colin de Verdière, N. Torki. Opérateur de Schrödinger avec champs magnétiques. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble*, 1992–1993.

[14] Y. Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien. *Comment. Math. Helv.*, 61:254-270, 1986.

[15] Y. Colin de Verdière. Spectre de variétés Riemanniennes et spectre de graphes. *Proc. Intern. Cong. Math. (Berkeley)*, 522:530, 1986.

[16] Y. Colin de Verdière. Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold. *Comment. Math. Helv.*, 63:184:193, 1988.

[17] Y. Colin de Verdière. Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. *Ann. scient. E.N.S.*, 20:599–615, 1987.

[18] Y. Colin de Verdière. Un nouvel invariant des graphes finis et application à un critère de planarité. *Journal of Combinatorial theory B*, 50:11-21, 1990.

[19] Y. Colin de Verdière. Réseaux électriques planaires I. *Commentarii Math. Helv.*, 69:351-374, 1994.

[20] Y. Colin de Verdière. Multiplicités de valeurs propres: laplaciens discrets et continus. *Rendiconti di Matematica*, VII,13:433-460, 1993.

[21] Y. Colin de Verdière. Spectres de graphes. *Livre publié par la Soc. Math. de France (smf@smf.univ-mrs.fr)* , 1998.

[22] Y. Colin de Verdière. Théorèmes de Courant et de Cheng combinatoires. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble*, 13:9-13, 1994–1995.

[23] Y. Colin de Verdière. Multiplicities of eigenvalues and tree-width of graphs. *J. Comb. Th., ser. B*, 74:121-146, 1998.

[24] F. Chung, S. Sternberg. Mathematics and the Buckyball. *American scientist*, 81:56-71, 1993.

[25] H. L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon. Schroedinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry. *Springer Study, Texts and Monographs in Physics*, 1987.

[26] A. Dal Maso. An introduction to Γ-convergence. *Birkhäuser*, 1993.

[27] M. Freidlin, A. Wentzell. Random perturbations of dynamical systems. *Springer (Berlin)*, 1984.

[28] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271-283, 1930.

[29] J.L. de Lagrange. Recherches sur la propagation du son. *Oeuvres (Gauthier-Villars)*, 1:39-.., 1867.

[30] E. Lieb. Fluxes and Dimers in the Hubbard model. *Proc. Internat. Congress of Math. (Zürich)*, 2:1279-1280, 1994.

[31] L. Lovász, A. Schrijver. A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessy embeddable graphs. *Proc. AMS.*, 126:1275-1285, 1998.

[32] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. *Springer (Berlin)*, 1976.

[33] N. Nadirashvili. Multiple eigenvalues of Laplace operators. *Math. USSR Sbornik*, 61:225-238, 1988.

[34] G. Ringel. Map color theorem. *Springer Grundlehren*, 1974.

[35] J. Rubinstein, M. Schatzman. Asymptotic for thin superconducting rings. *J. Maths. Pures et Appliquées (à paraitre).*

[36] J.P. Serre. Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p. *J. of the AMS*, 10:75-102, 1997.

[37] B. Sévennec. Multiplicité du spectre des surfaces: une approche topologique. *Prépublication ENS Lyon*, 1-16, 1994. *(http://umpa.ens-lyon.fr/UMPA/)*

[38] H. van der Holst. A short proof of the planarity characterization of Colin de Verdière. *J. Comb. Th B*, 65:269-272, 1995.

[39] H. van der Holst. Topological and Spectral Graph Characterizations. *Thèse (Amsterdam)*, 1-135, 1996.

[40] H. van der Holst. A Characterization of the class of graph G with $\nu(G) \leq 3$. *Preprint (Princeton)*, 1-15, 1997.

[41] E. Wigner, J. von Neumann. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. *Phys. Zeit.*, 30:467-470, 1929.

[42] A. Zuk. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:453-458, 1996.