

# Analyse semi-classique

## problèmes, méthodes, résultats

Yves Colin de Verdière \*

May 13, 2004

\*Institut Fourier (Grenoble), [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/)

- Un paradigme : l'asymptotique des grandes valeurs propres du **laplacien** sur une variété riemannienne compacte et des fonctions propres associées
- **Mécanique classique et mécanique quantique** sur une variété riemannienne
- **Microlocalisation** : microfonctions, opérateurs pseudo-différentiels avec petit paramètre, mesures de Wigner, OIF
- **Localisation des fonctions propres** (Chaotique vs intégrable)
- **Formules de traces semi-classique**
- **Chaos quantique**

## Un paradigme : le laplacien sur une variété riemannienne compacte

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte connexe sans bord (par exemple une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  munie de la métrique induite). En coordonnées locales, la métrique riemannienne  $g$  est donnée par  $g = g_{i,j} dx^i dx^j$ .

*Une grande partie de ce que je vais raconter s'adapte au cas à bord (par exemple les domaines euclidiens de  $\mathbb{R}^d$ ) mais c'est plus délicat à cause des rayons rasants*

Il existe sur  $X$  un

unique opérateur différentiel du second ordre  $\Delta_g$  ayant les propriétés suivantes :

1.  $\Delta_g$  est à coefficients réels
2.  $\Delta_g$  est formellement symétrique sur  $L^2(X, dv_g)$
3. Le symbole principal est  $\sum g^{i,j}(x)\xi_i\xi_j$  où  $(g^{i,j})$  est l'inverse de la métrique  $g$
4.  $\Delta_g 1 = 0$

Pour  $(\mathbb{R}^d, \text{Euclidien})$ ,  $\Delta = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ . En général, si  $|g| = \det(g_{i,j})$  :

$$\Delta_g = -|g|^{-1} \partial_i |g| g^{i,j} \partial_j .$$

Il est classique que  $\Delta_g$  est essentiellement auto-adjoint à résolvante compacte et admet donc un spectre discret

$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

avec  $\lambda_k \rightarrow +\infty$ . On notera  $\varphi_k$  une base orthonormale de  $L^2(X)$  formée de fonctions propres ( $\Delta_g \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ ).

*Exemples :*

- Si  $X = (\mathbb{R}^2/\Gamma, \text{Eucl})$  est un tore euclidien et  $\Gamma^*$  est le réseau dual ( $\Gamma \cdot \Gamma^* = 2\pi\mathbb{Z}$ ), les valeurs propres sont les  $|\gamma^*|^2$ ,  $\gamma^* \in \Gamma^*$  avec les fonctions propres  $\exp(i \langle \gamma^* | x \rangle)$  (séries de Fourier).  
Par exemple, si  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ ,  $\lambda_{m,n} = 4\pi^2(m^2 + n^2)$  (arithmétique).
- Si  $X = S^2$ , les fonctions propres sont les harmoniques sphériques, les valeurs propres les entiers  $l(l+1)$  avec multiplicité  $2l+1$ .

L'étude de la suite  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  se sépare naturellement en 2 sujets :

1. Les premières valeurs propres (majorations et minorations en fonction de quantités géométriques, multiplicités possibles)
2. Les dernières, i.e. le comportement asymptotique de la suite  $(\lambda_k, \varphi_k)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Les 2 parties ont connues des progrès spectaculaires durant les 30 dernières années. Je vais discuter surtout le 2ème sujet qui relève des méthodes semi-classiques.



Pour ce qui est du 1er sujet, voilà 2 résultats typiques :

- Cheng (1976) :

la multiplicité de  $\lambda_2$  est  $\leq 3$

pour une métrique arbitraire sur  $S^2$ .

Estimation optimale par les harmoniques sphériques

- Y CdV (1985) :

pour tout entier  $N \geq 1$ , il existe,

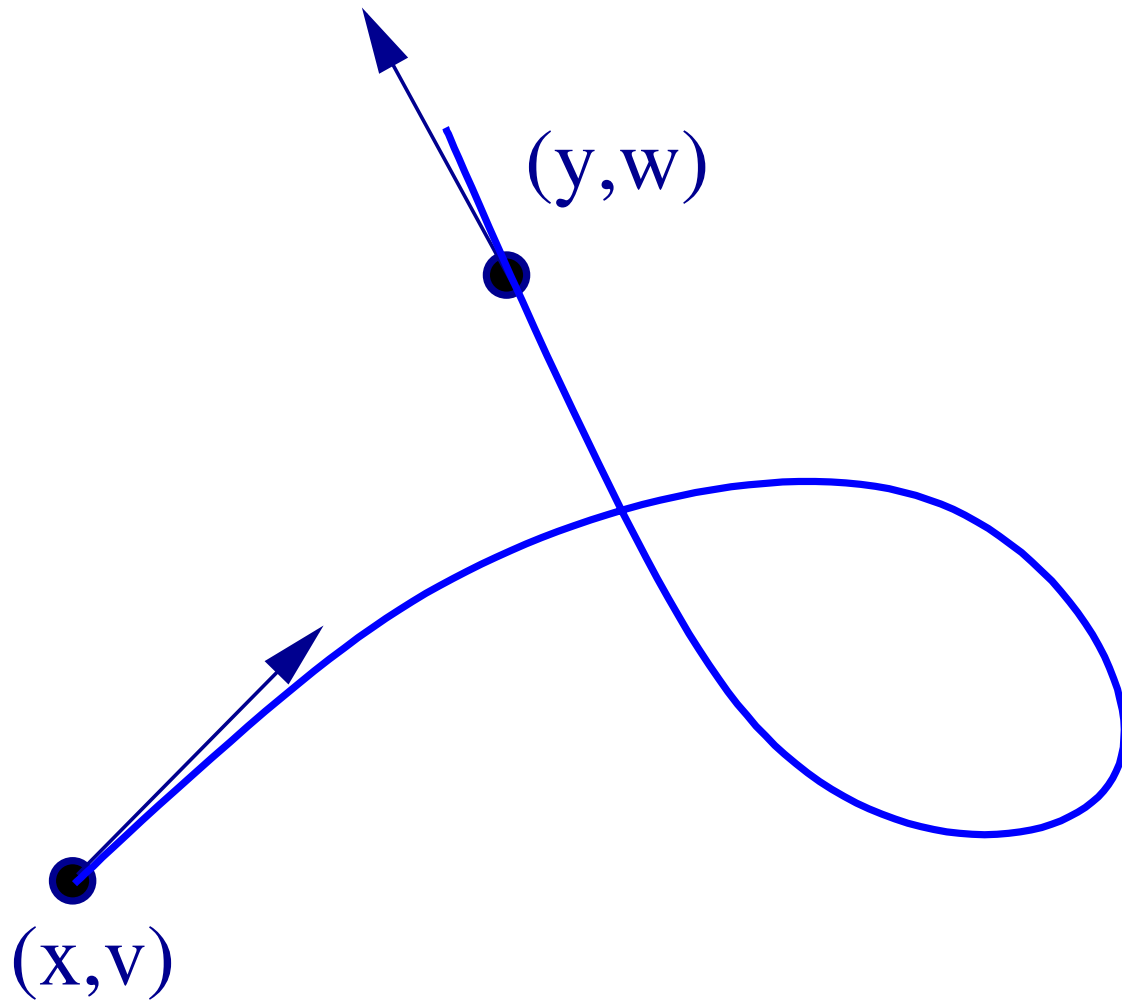
sur la sphère  $S^3$ , des métriques telles

que  $\lambda_2$  est de multiplicité  $N$

## Mécanique classique et mécanique quantique

Sur la variété riemannienne  $(X, g)$ ,

la **mécanique classique** est donnée par le flot géodésique : si  $T^*X$  est le fibré cotangent de  $X$  (qu'on peut identifier au fibré tangent par  $g$ ), le flot géodésique est défini par  $G_t(x, v) = (y, w)$  où  $y$  est le point de paramètre  $t$  sur la géodésique  $\gamma$  telle que  $\gamma(0) = x$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$  et  $w = \dot{\gamma}(t)$ .  $G_t$  est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $T^*X$  qui préserve le fibré tangent unitaire  $U^*X$ . Ce flot est le *flot hamiltonien* de l'hamiltonien  $H(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum g^{i,j}(x) \xi_i \xi_j$ . De ce caractère hamiltonien résulte l'existence d'une mesure invariante naturelle sur  $U^*X$ , la **mesure de Liouville**.



La **quantification naturelle** de  $H$  est l'opérateur  $\hat{H} = h^2 \Delta_g$ . La dynamique unitaire associée est donnée par

$$U(t) = \exp(-ith\Delta_g)$$

opérant sur  $L^2(X, dv_g)$ .

L'équation aux valeurs propres (Schrödinger stationnaire)  $h^2 \Delta_g \varphi = E \varphi$  admet la solution  $\varphi_k$  si  $h^2 \lambda_k = E$ . Si  $E$  est fixé et  $h \rightarrow 0$  (la limite semi-classique), on a  $\lambda_k \rightarrow \infty$ .

Ainsi la limite  $\lambda_k \gg 1$  est la limite semi-classique :

**il doit y avoir des relations entre l'asymptotique**

**de  $\lambda_k$ ,  $\varphi_k$  quand  $k \rightarrow \infty$  et le flot géodésique.**

## BOITE À OUTILS SEMI-CLASSIQUE

### Localisation dans l'espace des phases : microfonctions

Soient  $u_h$  une famille de distributions dans  $\mathbb{R}^d$  dépendant de  $h \ll 1$  supposée “tempérée en  $h$ ”. suivant une idée de Hörmander, on définit le **microsupport**  $MS(u_h)$  de  $u_h$  comme le sous-ensemble fermé du cotangent  $T^*\mathbb{R}^d$  dont le complémentaire est l'ensemble des  **$(x_0, \xi_0)$**  tels que

$$\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\xi) = O(h^\infty) ,$$

pour  **$\xi$  voisin de  $\xi_0$**  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec  **$\varphi(x_0) \neq 0$** .

On écrira ainsi  $u = v + O(h^\infty)$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $T^*\mathbb{R}^d$ .

On peut montrer que le microsupport ne dépend pas des coordonnées locales choisies.

### *Exemples*

- $u_h(x) = a(x)e^{iS(x)/h}$  avec  $a, S \in C^\infty$  et  $S$  à valeurs réelles (Ansatz BKW). Le microsupport est la variété lagrangienne  $(x, S'(x))$ ,  $x \in \text{Supp}(a)$ .
- $u(x) = Y(x)$  (fonction d'Heaviside indépendante de  $h$ ). Le microsupport est la réunion de l'axe des  $\xi$  et du demi-axe  $> 0$  des  $x$ .

## Opérateurs pseudo-différentiels avec petit paramètre

Si  $a_h(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi)h^j$  est une fonction convenable de  $(x, \xi)$ , on définit le quantifié de Weyl de  $a_h$  par

$$(\text{Op}_W(a))(u)(x) = (2\pi h)^{-d/2} \int e^{i(x-y)\xi/h} a_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) |dy d\xi|.$$

L'opérateur précédent dépend des coordonnées locales, mais pas son symbole principal vu comme fonction sur le cotangent. Ainsi le symbole principal de  $h^2\Delta_g$  est  $\|\xi\|^2$ .



## Ellipticité

Si  $Pu_h = 0$ ,  $MS(u_h) \subset p^{-1}(0)$  où  $p$  est le symbole principal de  $P$ . En particulier, le microsupport des  $\varphi_k$  avec  $h^2\lambda_k = 1$  est contenu dans le fibré unitaire cotangent.

## O(pérateurs)I(ntégraux de)F(ourier), états lagrangiens (BKW)

On peut **quantifier** les transformations canoniques. Suivant les auteurs, on obtient l' **opérateur canonique** (Maslov), les **opérateurs intégraux de Fourier** (Duistermaat-Hörmander) ou plus simplement les **transformations canoniques quantifiées**. Il s'agit d'une vaste généralisation de la théorie des pseudo-diff. qui recouvre également comme cas particulier les Ansatz de type BKW pour l'équation des ondes ou l'équation de Schrödinger.

L'outil technique principal est la **méthode de la phase stationnaire** pour évaluer les intégrales oscillantes du type :

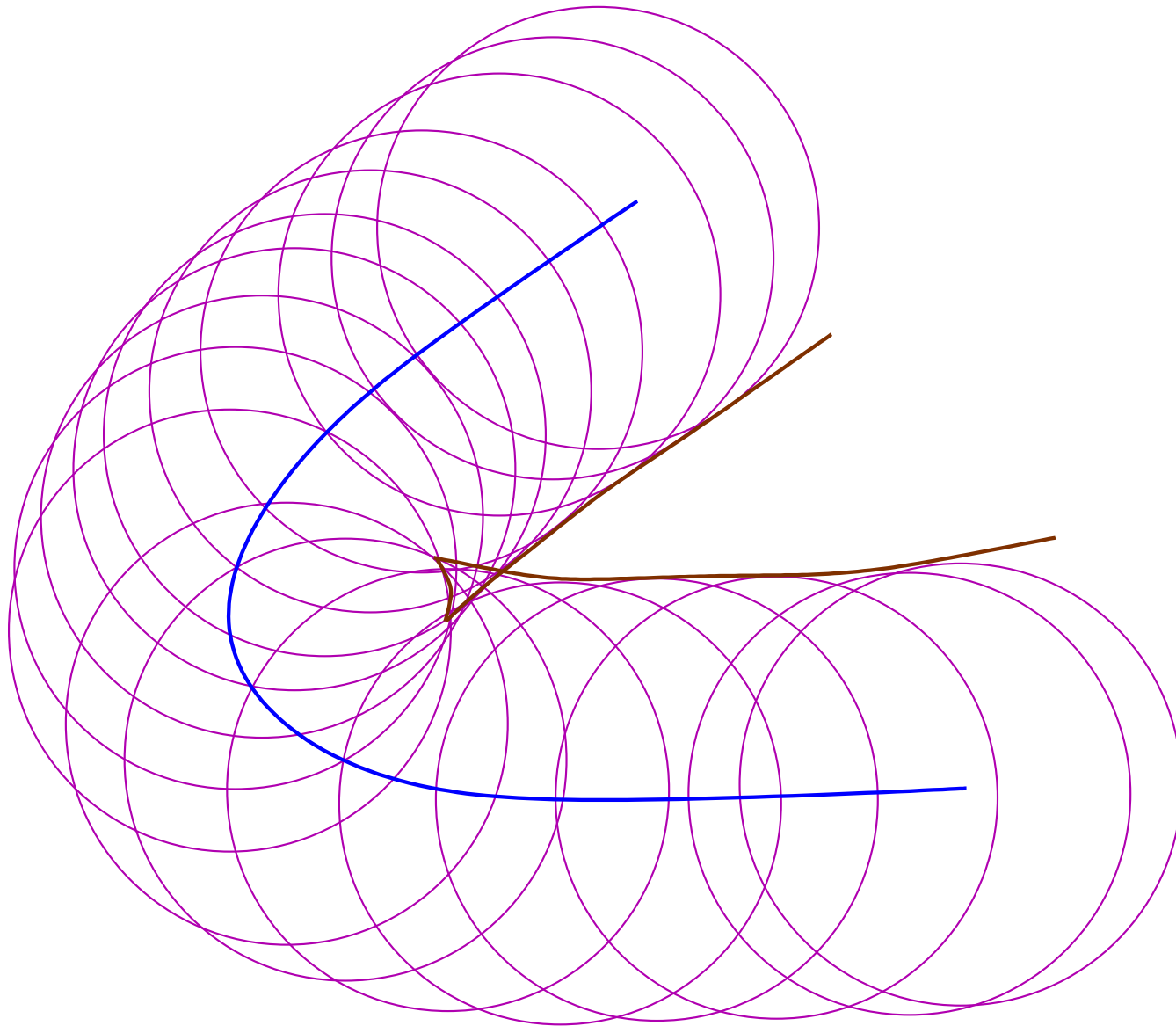
$$\int e^{iS(x)/h} a(x) |dx| .$$

Le but est de **géométriser** cette méthode de façon à faciliter les calculs en les rendant beaucoup plus intrinsèques (variétés lagrangiennes, demi-densités, ...).

Dans ce formalisme, le principe de superposition de Huyghens et l'intégrale de Feynman s'intègrent facilement. Un état lagrangien est en effet une superposition d'états BKW

$$u(x) = \int e^{iS(x,\theta)/\hbar} a(x, \theta) |d\theta|$$

où  $S$  est une fonction génératrice d'une variété lagrangienne  $\Lambda$ .  $S$  ne joue qu'un rôle marginal. La vedette est  $\Lambda$ .



Ces opérateurs (ou fonctions) sont utilisés de plusieurs façons ; une application particulièrement féconde et largement mise en oeuvre dans notre groupe est l'utilisation de **formes normales**, prolongements des formes normales de la mécanique hamiltonienne : formes normales de Birkhoff, coordonnées actions-angles, etc...

## Principe d'incertitude et formule de Weyl

La formule de Weyl exprime l'asymptotique des valeurs propres sous la forme

$$\#\{h^2\lambda_k \leq 1\} \sim (2\pi h)^{-d} \text{vol}(\|\xi\|^2 \leq 1)$$

(chaque fonction propre occupe  $(2\pi h)^d$  en volume de l'espace des phases).

Soit  $\lambda_k \sim c_d(\text{vol}(X))^{-d/2} k^{2/d}$ . Il est plus naturel de considérer les  $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ . L'écart moyen  $\mu_{k+1} - \mu_k$  près de la valeur  $\mu$  est donc  $c\mu^{-(d-1)}$  ou  $ch^{d-1}$ .

## Mesures de Wigner

A la suite  $u_h$  on associe les mesures sur l'espace des phases données par  $\mu_{h,Wigner}(a) = \langle \text{Op}_{Weyl}(a)u_h | u_h \rangle$ . Ces mesures n'étant pas  $\geq 0$ , on leur préfère souvent les **mesures de Husimi** où la quantification de Weyl est remplacée par une quantification  $\geq 0$ . L'image de la mesure de Husimi par la projection sur  $X$  est  $|u_h|^2 v_g$ .

## Localisation des fonctions propres

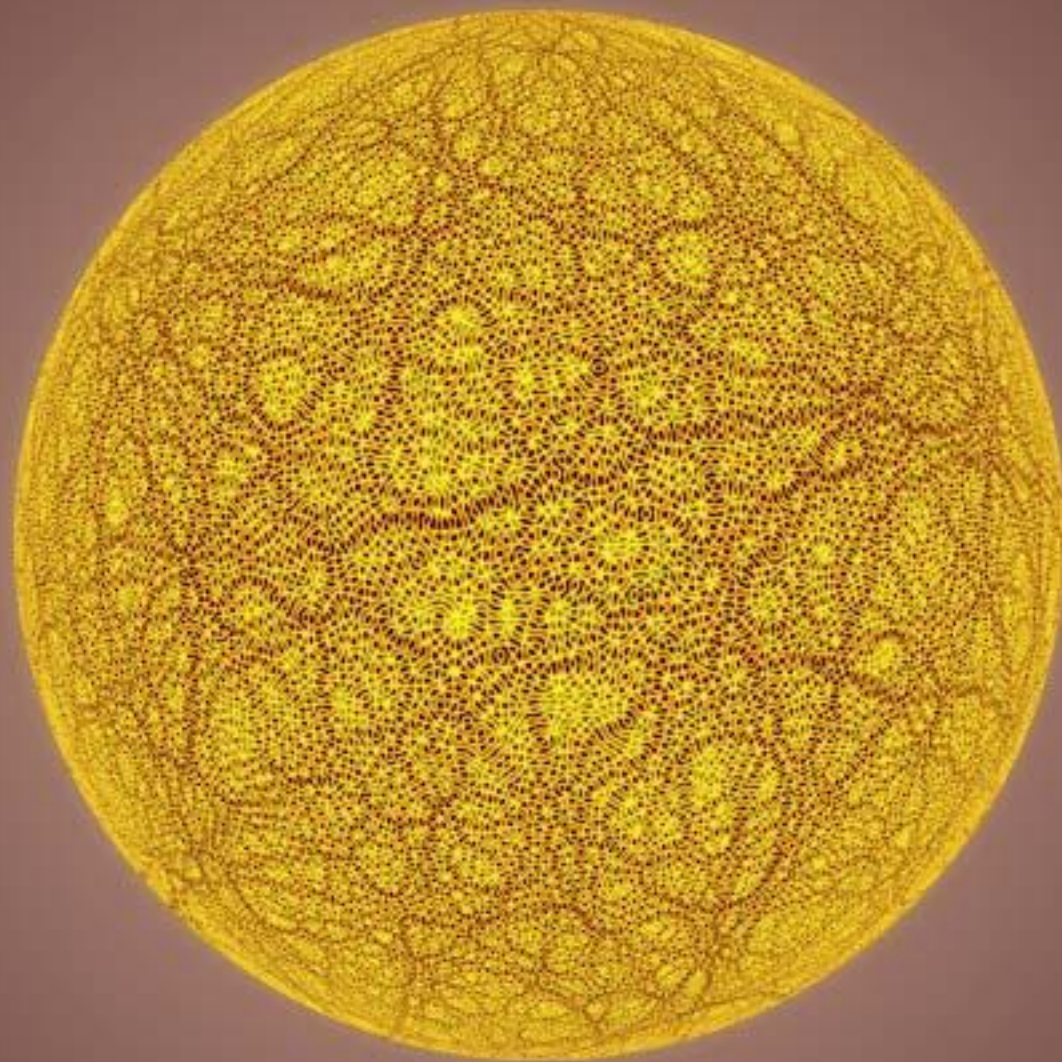
Si les  $u_h$  sont les fonctions propres normalisées de  $h^2 \Delta_g u_h = u_h$ , les mesures de Husimi ont comme limite vague des mesures de probabilités sur le fibré unitaire cotangent. Il résulte des résultats généraux (théorème d'Egorov) que ces mesures sont invariantes par le flot géodésique. Une des questions importantes et imparfaitement résolues est :

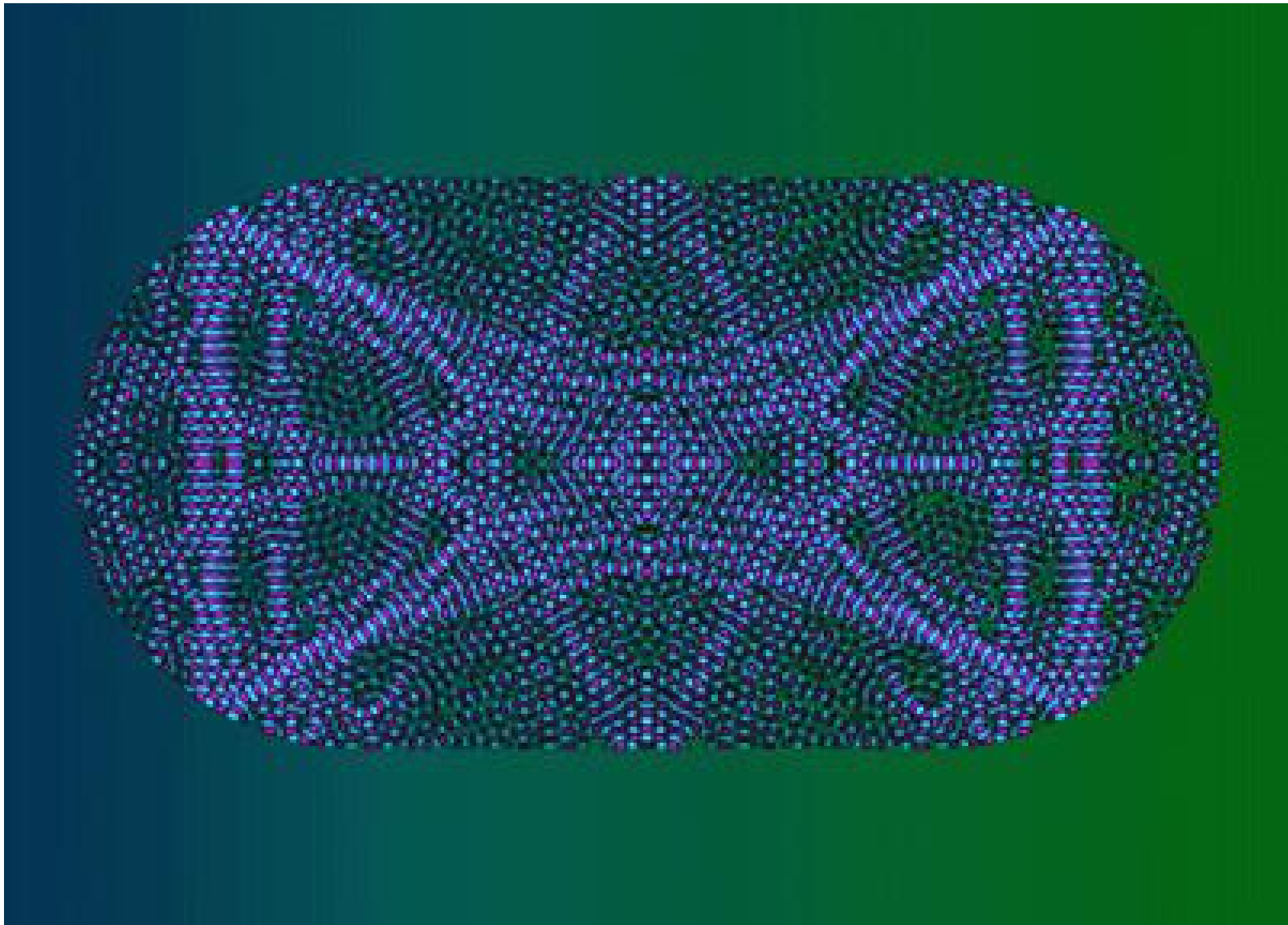
Quelles sont, parmi les mesures invariantes,

celles qui sont obtenues de cette façon ?

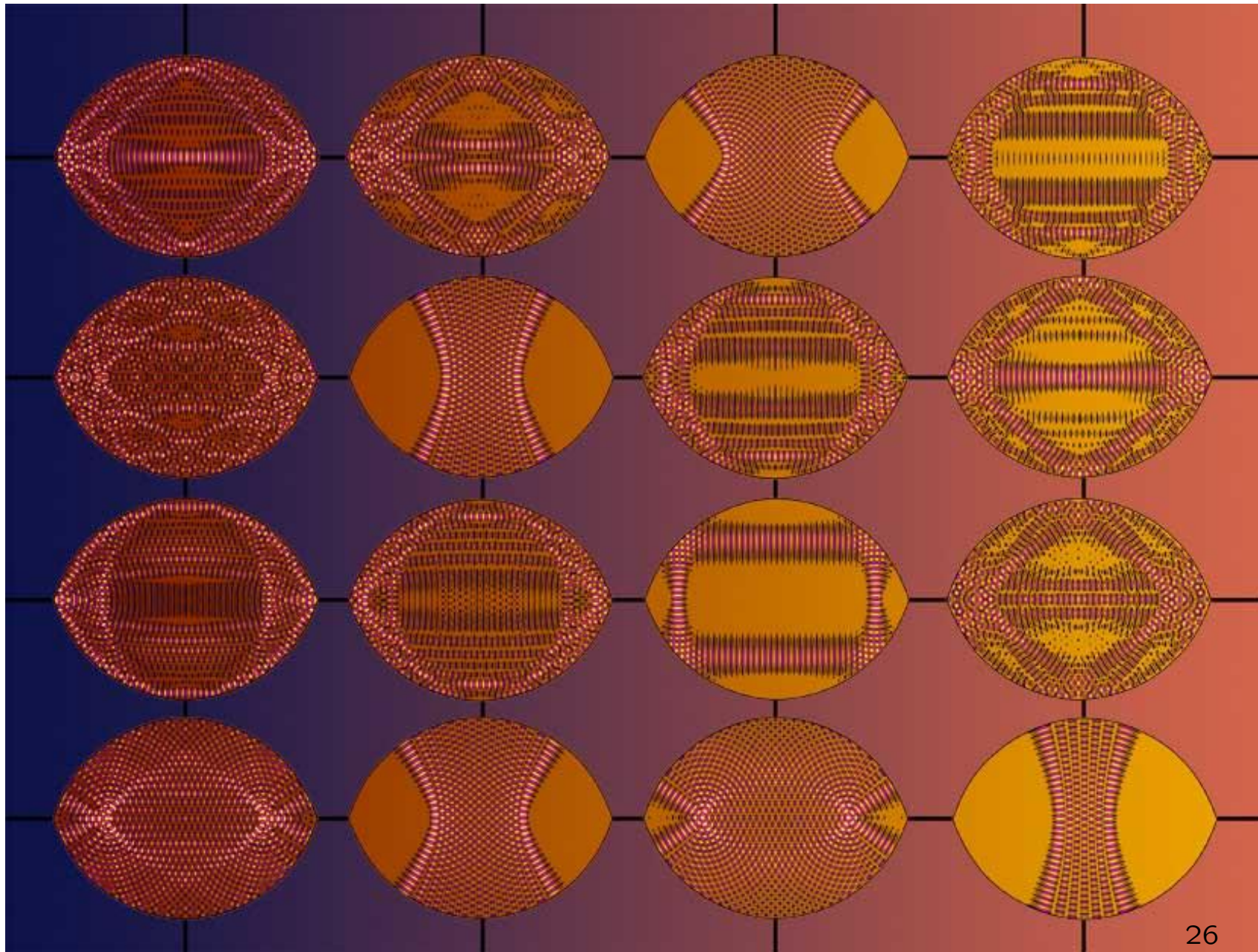
On peut les appeler **mesures quantiques**











Du point de vue dynamique, les flots géodésiques des variétés riemanniennes font partie des systèmes hamiltoniens dont les 2 cas extrêmes sont bien connus :

- **Le cas intégrable** Ce cas contient les tores plats, les surfaces de révolution, les ellipsoïdes. La dynamique est alors quasi-périodiques sur des tores et les mesures quantiques sont les mesures uniformes sur ces tores.

Le cas des systèmes intégrables perturbés a aussi été étudié (théorie KAM).

- **Le cas hyperbolique** C'est le cas des variétés à courbure  $< 0$  ou variétés de Hadamard. La dynamique est **chaotique** au sens fort (ergodique, mixing, exposants de Liapounov  $> 0$ ).

## Ergodicité semi-classique

Dans le cas chaotique, une réponse partielle est le **théorème de Shnirelman** :

*si le flot géodésique est **ergodique** (toute fonction mesurable invariante par le flot est constante presque partout), quitte à extraire une sous-suite de densité 0, les  $\mu_k$  (associées aux fonctions propres  $\varphi_k$ ) convergent vers la mesure de Liouville.*

Autrement dit, les suites de fonctions propres qui ne sont pas uniformément réparties sont exceptionnelles. La nature de ces exceptions est encore mal connue. Frédéric Faure (LPMMC à Grenoble) et ses collaborateurs ont réussi à construire des exemples de telles suites exceptionnelles. Dans certains cas “arithmétique”, Sarnak + coll. ont montré que de telles suites

exceptionnelles n'existent pas. Le statut mathématique des **scars** (popularisés par Eric Heller de Harvard) visibles sur les calculs numériques est assez incertain.

## Formule de trace semi-classique

### A. La formule sommatoire de Poisson revisitée

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \text{vol}(\mathbb{R}^d/\Gamma) \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{f}(\gamma^*)$$

Si  $f = F(|x|)$ ,  $\hat{f} = G(|\xi|)$ , la formule de Poisson s'interprète comme une formule exacte liant symétriquement les  $|\gamma|$  et les  $|\gamma|^*$ . La première suite de nombres est l'ensemble des

longueurs des géodésiques périodiques du tore plat  $\mathbb{R}^d/\Gamma$  tandis que les  $|\gamma^*|^2$  sont les

valeurs propres du laplacien données par les séries de Fourier.

## Existe-t-il une relation générale de ce type ?

Selberg a prouvé une formule analogue à celle de Poisson pour des variétés hyperbolique (à courbure constante négative). Ce qui est remarquable dans la formule de Selberg est ce lien entre les 2 spectres qui sont peu explicites contrairement au cas des tores. Une explication de l'existence d'une telle formule peut-être donnée au moyen de l'intégrale de Feynman.



## B. L'intégrale de Feynman

Feynman a proposé d'écrire de façon formelle le noyau  $e(t, x, y)$  de  $U(t) = \exp(-ith\Delta_g)$  sous la forme d'une intégrale de chemin. Cette intégrale fournit de façon immédiate les résultats semi-classiques. On doit cependant les justifier par une approche plus technique basée sur la théorie des *opérateurs intégraux de Fourier*

L'expression de Feynman :

$$e(t, x, y)'' = \int_{\Omega_{x,y,t}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{L}(\gamma)} |d\gamma|$$

où

- $\Omega_{x,y,t}$  est l'ensemble des applications (suffisamment régulières) de  $[0, t]$  dans  $X$  telles que  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$  (les "chemins").
- $\mathcal{L}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\|^2 ds$  est le lagrangien
- $\int$  est défini comme limite d'intégrales sur des approximations de dimension finie, les géodésiques par morceaux.

## C. La formule des traces semi-classiques

De l'expression de Feynman, on déduit la trace du propagateur

$$\sum e^{-ith\lambda_k} = \int_X \left( \int_{\Omega_{x,x,t}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{L}(\gamma)} |d\gamma| \right) v_g$$

et par "Fubini", cette intégrale se réécrit :

$$\sum e^{-ith\lambda_k} = \int_{\Omega_t} e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{L}(\gamma)} |d\gamma| ,$$

où  $\Omega_t$  est l'espace des lacets

$$\Omega_t = \{ \gamma : [0, t] \rightarrow X, \gamma(0) = \gamma(t) \} .$$

L'idée est ensuite d'appliquer la phase stationnaire à l'intégrale précédente ; les points critiques qui apparaissent sont les géodésiques périodiques, i.e. les applications  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$  qui sont périodiques de période  $t$ .

## D. Historique

Bien sûr, il a pas mal de travail à faire avant d'arriver à un résultat mathématiquement acceptable et on a un peu de mal à y reconnaître les intuitions des débuts.

Ces formules ont d'abord été découvertes dans les années 70 par les physiciens **Balian et Bloch** dans le cas d'un domaine euclidien de  $\mathbb{R}^d$  et **Gutzwiller** pour la limite semi-classique de l'équation de Schrödinger. Les justifications rigoureuses ont été données peu après par **moi-même**, puis **Chazarain** et **Duistermaat Guillemin**. Le cas à bord a été traité un peu plus tard par **Guillemin et Melrose** (1979).

## E. Interprétation en terme de la densité de valeurs propres

L'interprétation la plus agréable a été donnée par Duistermaat et Guillemin. Ils considèrent la densité régularisée des valeurs propres

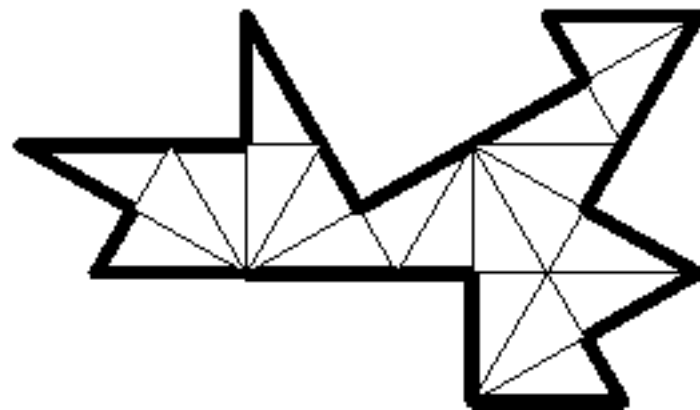
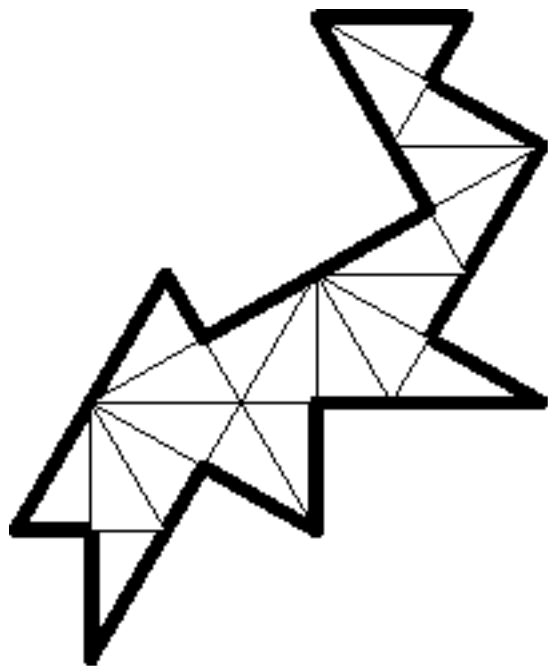
$$D_\rho(\mu) = \sum_k \rho(\mu - \sqrt{\lambda_k})$$

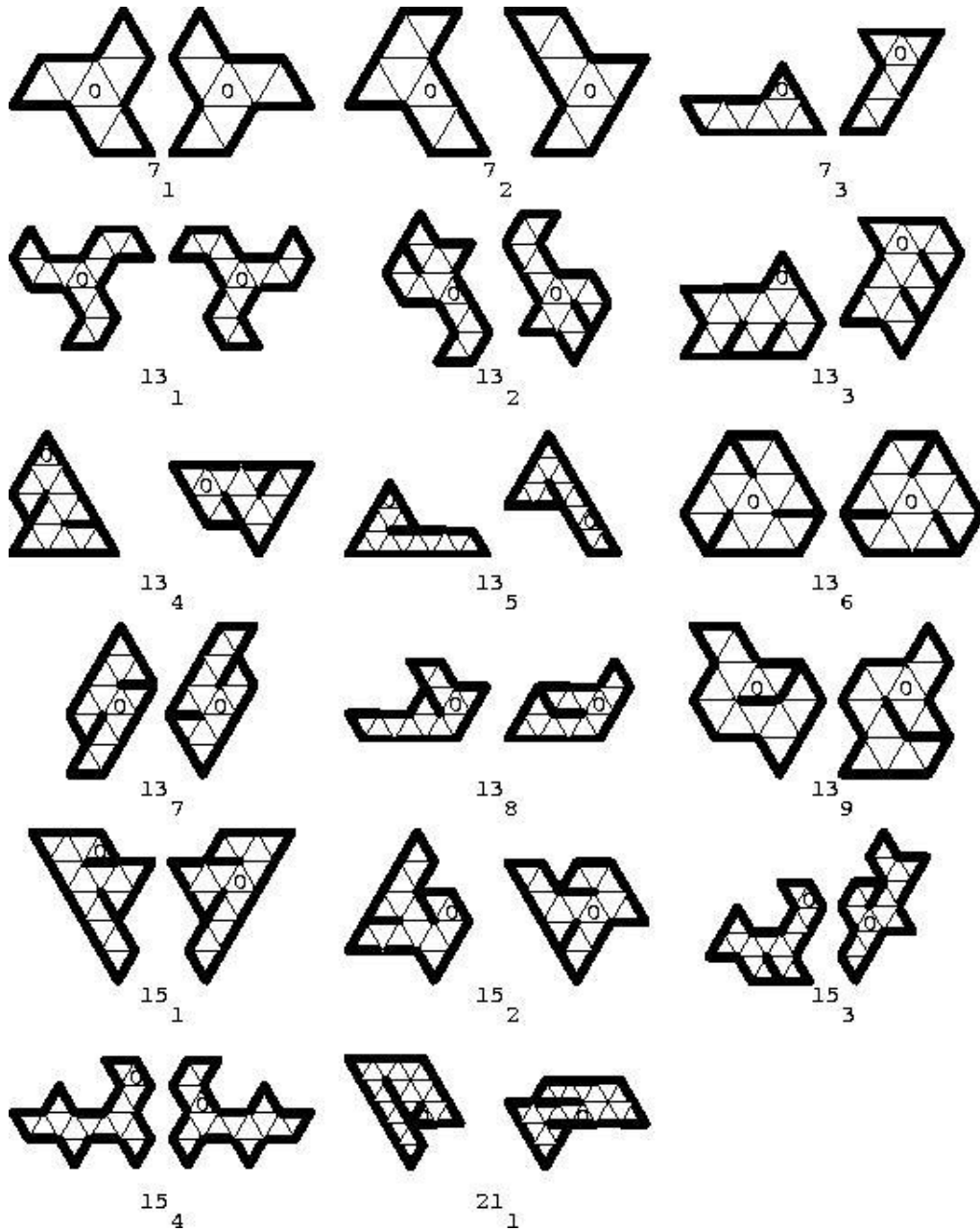
Lorsque  $\mu \rightarrow +\infty$ , la partie principale de  $D_\rho$  est polynomiale en  $\mu$  de degré  $d$ . Il s'ajoute à cette densité des corrections oscillantes de fréquences  $l_\gamma$  (longueur des géodésiques périodiques). On peut justifier précisément cela lorsque  $\rho$  a une transformée de Fourier à support compact. Cela ne permet pas une résolution très fine du spectre, puisque l'écart moyen des  $\mu_k$  près de  $\mu$  est  $\mu^{-(d-1)}$ . Donc dans un intervalle de longueur fixe centré en  $\mu$  il y a environ  $\mu^{d-1}$  valeurs propres.

## F. Application au problème de Kac (1966) :

“Can one hear the shape of a drum ?”

Cette application avait été envisagée par Balian et Bloch. J'ai prouvé, sous une hypothèse de généricité assez large, que 2 variétés riemanniennes qui ont même spectre du laplacien ont même longueurs des géodésiques périodiques. Notons qu'on sait depuis une dizaine d'années (Gordon-Webb-Wolpert, 1992) que la réponse au problème de Kac est NON pour des domaines euclidiens plans (des polygones non convexes).







## Chaos quantique

On a vu qu'à une échelle  $1$  ( $\gg$  à l'écart moyen des valeurs propres) la densité des valeurs propres présente des oscillations **non universelles** liées aux géodésiques périodiques. L'analyse fine du spectre à une échelle de l'ordre de l'écart moyen des valeurs propres est de nature différente et, génériquement, gouvernée par des lois **universelles**.

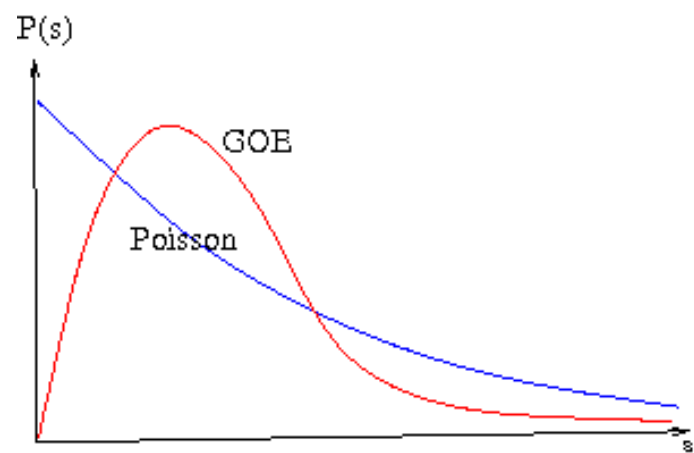
La résolution grossière du spectre correspond à l'analyse de la dynamique sur des temps bornés, alors que la résolution fine correspond au temps d'Heisenberg suivant la relation d'incertitude

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar$$

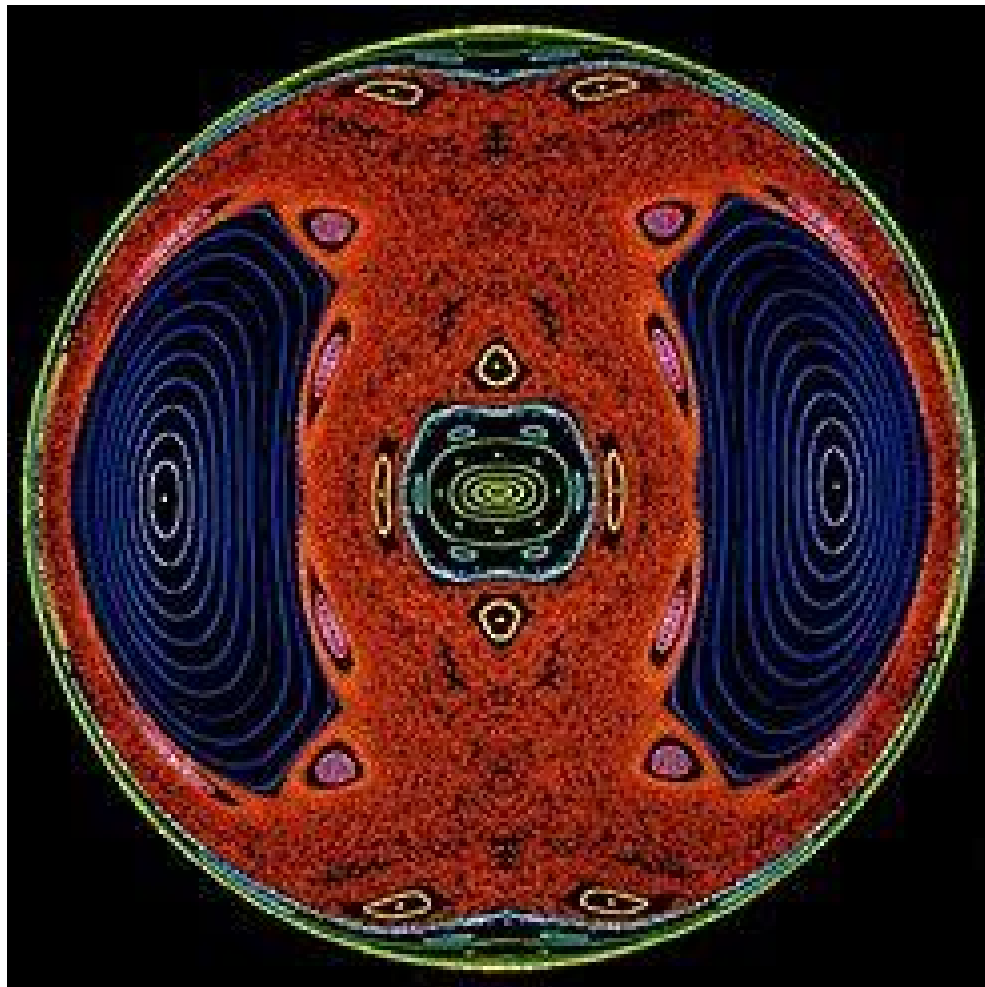
Dans notre cas, ce temps,  $T_{\text{Heis}}$ , est de l'ordre de  $\hbar^{-1}$ . Les méthodes semi-classiques ne permettent pas à ce jour de comprendre l'asymptotique de la propagation dans des temps aussi longs.

Depuis une vingtaine d'années les travaux sont guidés par 2 conjectures dont le statut s'avère encore mystérieux.

- La conjecture de **Bohigas-Giannoni-Schmit** (1984) : si le flot géodésique est *chaotique*, les valeurs propres obéissent à des statistiques de **matrices aléatoires (Wigner)**
- La conjecture de **Berry-Tabor** (1977) : si le flot géodésique est *complètement intégrable*, les valeurs propres obéissent à des statistiques de type **Poisson**



L'introduction de modèles probabilistes dans cette étude rejoint ainsi le grand courant de l'étude des systèmes dynamiques chaotiques dont on ne peut décrire la dynamique que de façon probabiliste (la théorie ergodique).



Récemment, notre groupe s'est intéressé de près aux conditions de **quantification de Bohr-Sommerfeld** qui prédisent l'asymptotique classique des valeurs propres des systèmes complètement intégrables, rejoignant ainsi une forte activité de ce sujet du côté de la dynamique classique.

## Conclusions

- Les progrès importants dans l'étude du spectre du laplacien dans ces 30 dernières années ont été rendus possible par l'interaction de plusieurs courants de recherche assez éloignés au départ
  - **La physique :** les mathématiciens ont souvent travaillé à partir d'évidences numériques ou de conjectures des physiciens, mais pas toujours (Selberg, universalité du spectre dans le double puits, multiplicité et symétrie).
  - **La géométrie riemannienne :** le problème de Kac a représenté une motivation importante pour les mathématiciens. Le livre de Berger-Gauduchon-Mazet a fait le point sur ce sujet dans les années 70'.

- **Les systèmes dynamiques :** la compréhension des systèmes hamiltoniens (autrefois le “formalisme hamiltonien” des livres de mécanique générale ou même du Abraham-Marsden) a été rendu possible par la parution des livres d’Arnold et par la géométrisation (travaux de Weinstein).
- **L’analyse microlocale :** le livre de Maslov ainsi que les travaux de Hörmander sur les OIF ont été disponibles au début des années 70, mais il a fallu pas mal de temps pour en découvrir les potentialités au delà d’un aspect technique assez dissuasif. En particulier, la version semi-classique (avec un petit paramètre  $h \rightarrow 0$ ) des OIF s’est avérée plus générale et d’une utilisation plus simple. Elle n’est apparue que 10 ans après (Helffer-Robert, ...)
- Les progrès ont été comparativement lents après les premières années. Ils ne sont en général pas dus à une technologie



de plus en plus sophistiquée, mais à des progrès dans notre compréhension des phénomènes.

- Dans le sujet du **chaos quantique** guidé par les intuitions physiques, les résultats mathématiques sont encore peu nombreux et souvent liés à des mathématiques sophistiquées (techniques de la théorie analytique des nombres mélangées à des techniques plus standards d'analyse et de la théorie ergodique). Il est un peu irritant de constater que les conjectures principales du chaos quantique non seulement ne sont pas démontrées, mais qu'un énoncé précis incluant des hypothèses de genericité nous échappe encore.