

# DYNAMIQUE DES BILLARDS

Yves Colin de Verdière \*

May 25, 2004

\*Institut Fourier (Grenoble), [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/)

- Chaos moléculaire et chaos dynamique
- Un paradigme : la boule de billard
- Aspects déterministes : instabilité dynamique et exposants de Liapounov
- Aspects probabilistes : les itérés successifs d'un point comme une suite aléatoire et la dynamique comme un générateur de nombres aléatoires

La dynamique d'une **boule de billard ponctuelle** (réflexion "optique" sur le bord et trajectoires rectilignes à l'intérieur) dépend fortement de la forme du bord et de la courbure de l'intérieur. On peut résoudre exactement ce problème dans de rares cas (**billards rectangulaires, billards circulaires ou elliptiques**). Les dynamiques possibles vont de la dynamique la plus régulière ("**intégrabilité**") à des dynamiques très instables ("**chaos**"). Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude d'exemples. Les exemples "chaotiques" les plus simples, qui remontent à Hadamard, sont des **billards à courbure négative**. De ces exemples, je ferai émerger une classification assez grossière des dynamiques possibles et quelques définitions générales : **ergodicité, mélange, hyperbolicité, exposants de Liapounov, corrélations**. La classe plus vaste des **systèmes hamiltoniens** généraux sera évoquée.

**Prérequis :** les mathématiques utilisées dans mes exposés seront assez élémentaires. La notion la plus complexe utilisée sera celle de *mesure de probabilité*. Les arguments seront souvent de nature *géométrique*. Une grande partie de l'exposé devrait être accessible avec relativement peu de connaissance en mathématiques, en tout cas moins que ce qui est demandé dans une maîtrise de maths ou de physique ou un diplôme d'ingénieur.

## Références :

- Un exposé introductif est l'article suivant : M. Berger, Pour la Science 173 (1992), pp 36-42.
- Des exposés plus avancés sont les livres :
  - S. Tabachnikov : Billiards (Société Mathématique de France, Panoramas et synthèses 1995)
  - I. Cornfeld, S. Fomin et Y. Sinai : Ergodic theory (Springer, 1982).
  - N. Chernov et R. Markarian : introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards (monografias del IMCA)

- V. Kozlov et D. Treshchev : Biliards (Transl. of Math. Mon, AMS)
- D'autres références et éventuellement un texte rédigé seront accessibles sur ma page web :

*[www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/)*

1. Définitions : billards, espace des phases, billard associé au pb de 2 particules dans un intervalle.
2. Exemples calculables : rectangles, cercles, ellipses (géométrie)
3. Billards dispersifs (Sinai)
4. Billards convexes
5. Orbites périodiques
6. Description probabiliste : mesure invariante (Buffon, Crofton)

7. Ergodicité, mixing, corrélations

8. Le rôle des o.p. dans la quantification.



1er EXPOSÉ

ASPECTS DÉTERMINISTES

## L'HYPOTHÈSE ERGODIQUE

Boltzmann propose de remplacer dans les calculs les moyennes temporelles sur les trajectoires (inconnues, complexes) par des moyennes spatiales. La possibilité de le faire est ce qu'on appelle *l'hypothèse ergodique*. En gros, cette hypothèse dit que les trajectoires explorent de façon uniforme l'espace des phases. Un système dynamique qui a cette propriété est aujourd'hui dit *ergodique*.



## Le retour de Poincaré

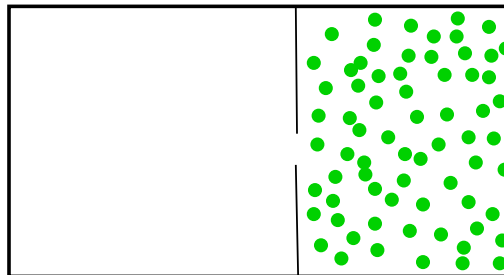
Considérons un récipient séparé en 2 compartiments communiquant par un orifice. Supposons qu'un gaz de molécule soit initialement situé entièrement dans l'un des compartiments. Par diffusion, le gaz va se répartir dans la totalité du récipient.



Le théorème du retour de Poincaré prévoit qu'il va revenir se localiser entièrement dans cette moitié. Ce à quoi personne ne croit vraiment ! En fait le temps moyen de retour (la fraction du temps passé avec une configuration où toutes les particules sont du même côté) est de l'ordre de l'inverse de  $\frac{1}{2}^N$  où  $N$  est le nombre de particules !

## Le modèle du billard

Le modèle du billard est un modèle simplifié de la situation précédente où il n'y a qu'une seule molécule dans un récipient. On va voir que certains billards vérifient l'hypothèse ergodique qui ne nécessite donc pas un grand nombre de molécules. Par contre, les temps de retour très longs (et le 2ème principe) nécessitent un grand nombre de molécules.



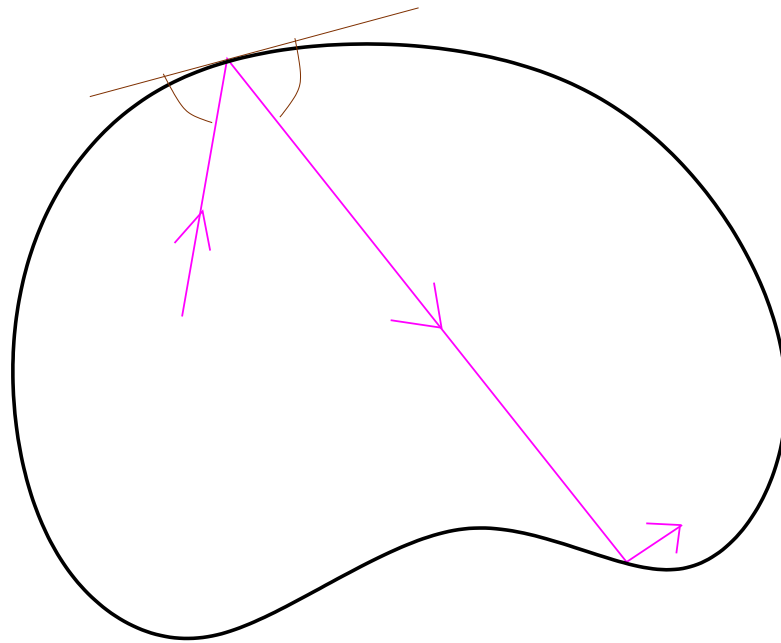
Les mathématiciens sont intéressés depuis Birkhoff (début du XXème siècle)



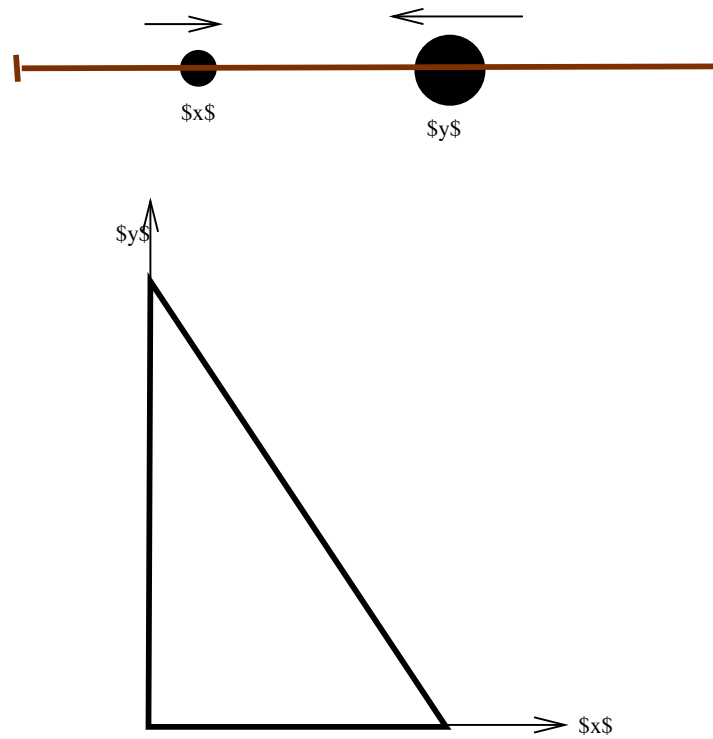
au modèle de billard suivant :

- La **table de billard** est un domaine borné du plan à bord lisse (ou lisse par morceaux)
- Il n'y a qu'une balle qui se meut linéairement tant qu'elle ne rencontre pas les bords et qui se réfléchit suivant la loi de l'optique : **"angle de réflexion = angle d'incidence"** au bord.

En faisant varier la forme du bord, on obtient ainsi une famille de dynamique ayant des comportement très divers : des plus régulières (intégrables) au plus chaotiques en passant par des billards possédant des dynamiques mixtes.



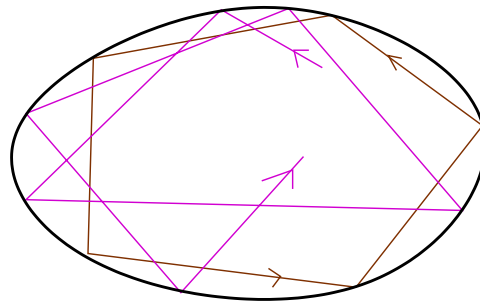
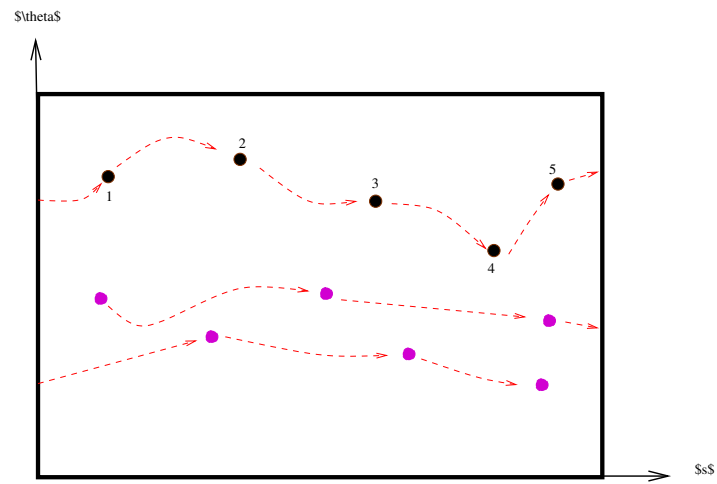
## 2 particules dans un billard 1d

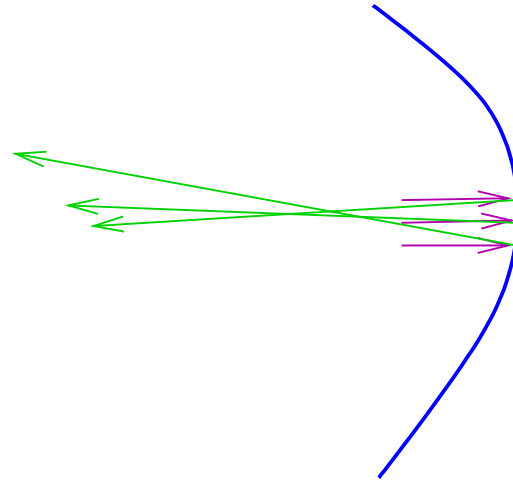
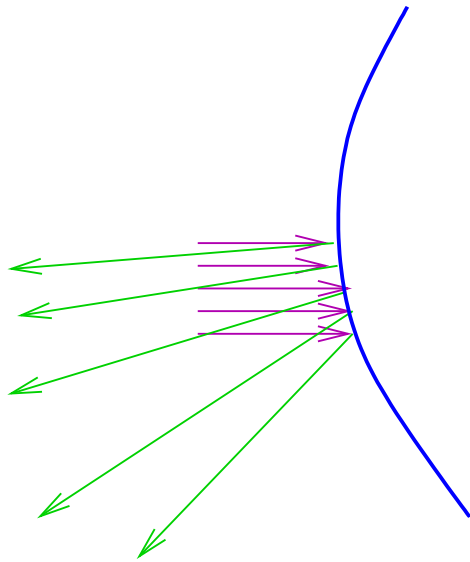


$$ds^2 = m dx^2 + M dy^2$$

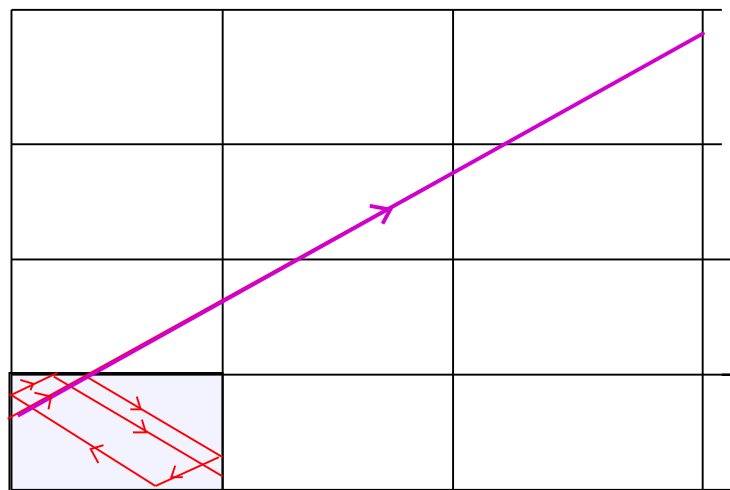


# L'espace des phases

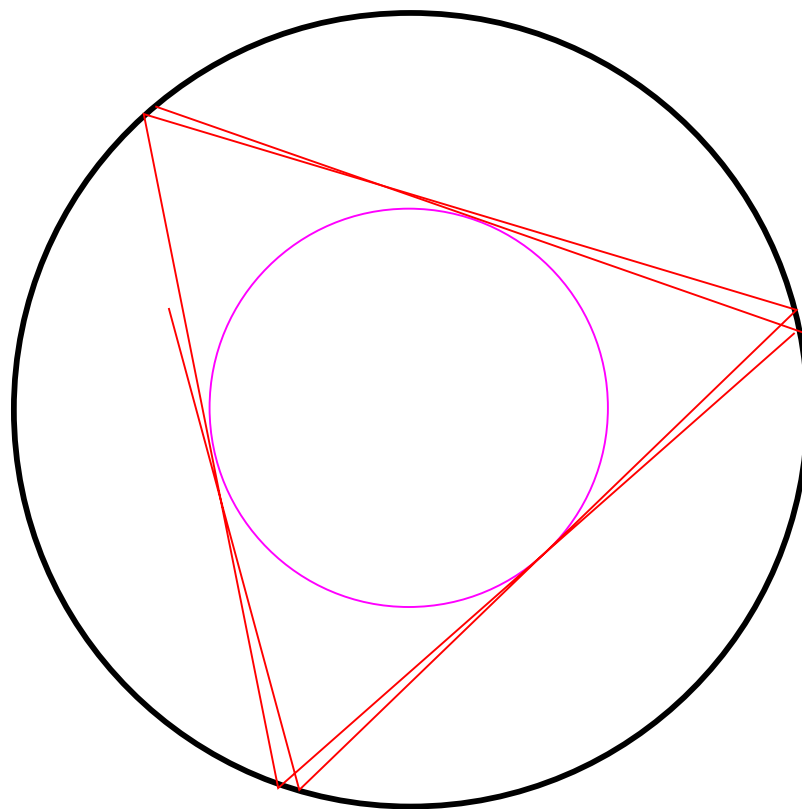




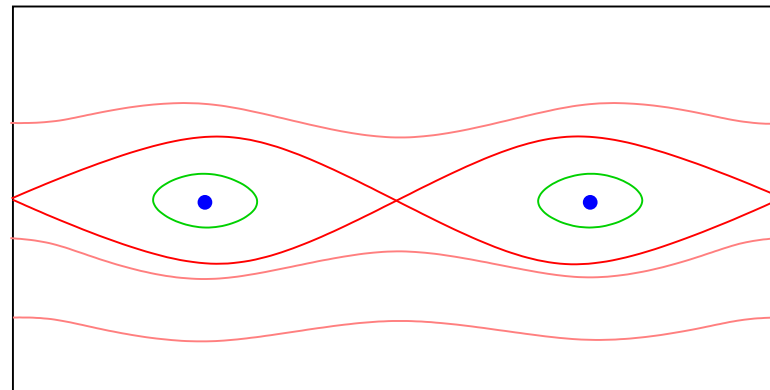
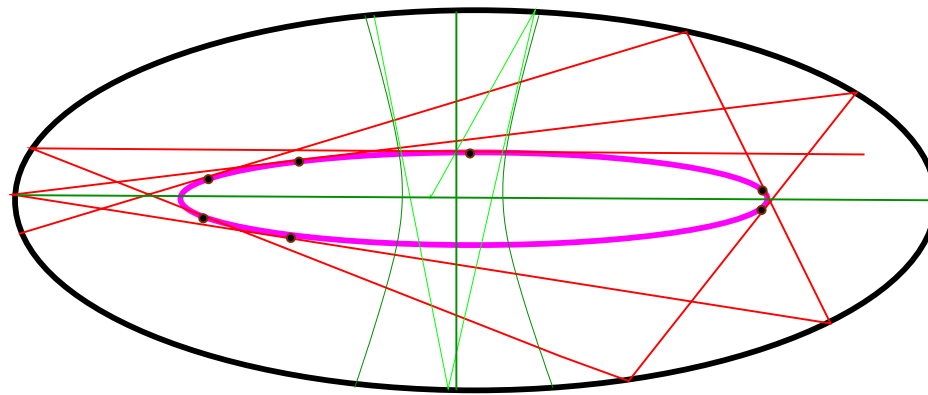
## Billard rectangulaire : méthodes des images



## Billards circulaires

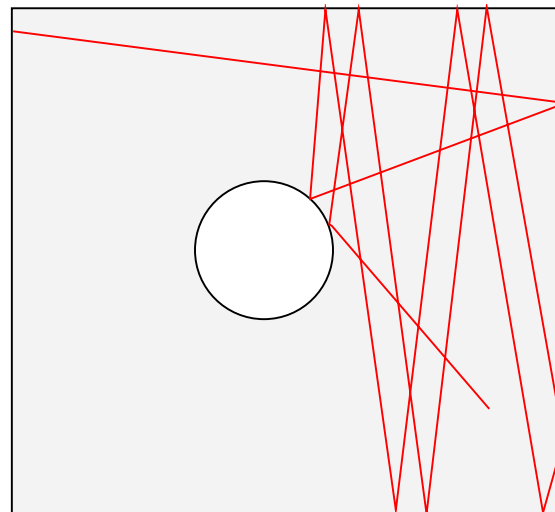


## Billards elliptiques



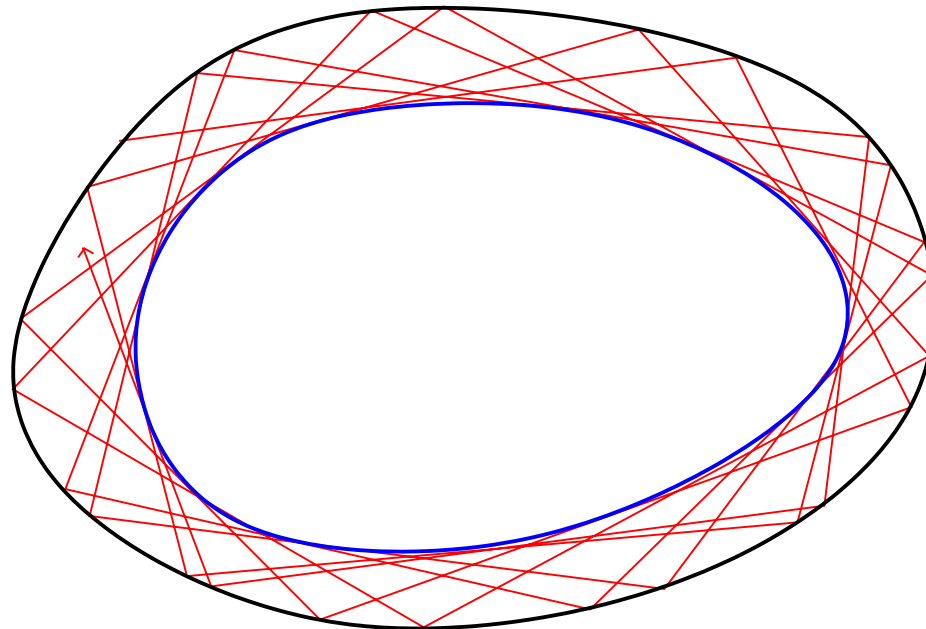
## Billards Sinai

de Ces billards sont ceux qui sont les plus proches des systèmes de particules avec collision élastique : un obstacle intérieur fixe simule une grosse particule sur laquelle rebondit une particule ponctuelle. de tels billards sont appelés *dispersifs*, car l'obstacle fait s'écarter davantage les trajectoires créant une exposant de Liapounov  $> 0$ .



## Billards strictement convexes

Lazutkin a montré en 1974 que les billards strictement convexes suffisamment réguliers ont une infinité de caustiques en adaptant le fameux théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Cela implique la non-ergodicité de ces billards.



## Stade

La convexité stricte est nécessaire ainsi que le montre l'exemple du stade de Bunimovich

Ce billard est ergodique....



## Billards à courbure négative

La divergence des trajectoires peut aussi être obtenue par un effet de courbure de la table elle-même : c'est ainsi qu'un triangle de la géométrie hyperbolique donne lieu à un billard chaotique.

## Orbites périodiques

Certaines trajectoires jouent un rôle important dans la dynamique, ce sont les orbites périodiques : un point  $x_0$  est périodique pour la dynamique  $T$  si  $x_0 = T^{\circ N}(x_0)$  avec  $N \geq 1$  le plus petit possible appelé la *période*. Leur importance, soulignée par Poincaré, tient au faits suivants :

- Leur existence peut souvent être prouvée par des méthodes topologiques directes indépendantes de la nature chaotique ou non de la dynamique (théorie de Morse)
- On peut souvent par des méthodes directes (linéarisation, formes normales) étudier la dynamique dans un voisinage de ces trajectoires, en particulier déterminer leur *stabilité*

- Comme on le verra plus loin (?), les trajectoires périodiques jouent un rôle dans la compréhension des *billards quantiques*

## Cas des billards bordés par une courbe simple

A toute orbite périodique d'un tel billard sont attachés 2 entiers :

- $N$  est la période ou nombre de rebonds
- $p$  est le nombre de tours avec

$$1 \leq p \leq N - 1 \quad (1)$$

On a le résultat suivant : *pour tout couple d'entiers satisfaisants les inégalités (1) il existe au moins 2 orbites périodiques de type  $(N, p)$ .*

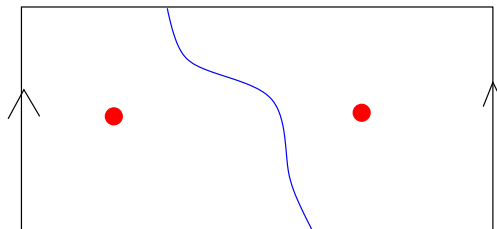
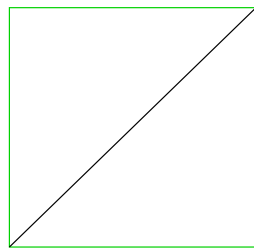
Etudions le cas le plus simple  $N = 2, p = 1$ . Il s'agit des fameuses "bouncing ball" orbites. Elle rencontre les bord en 2 points avec un angle droit.

On peut les obtenir par une méthode variationnelle : soit  $\gamma$  le bord du billard et  $D : \gamma \times \gamma \rightarrow \mathbb{R}$  l'application qui à une paire de points du bord associe leur distance euclidienne.

Une "bouncing ball" orbite correspond à un point critique de  $D$ , i.e. une paire  $(m, m')$  où le gradient de  $D$  est nul. Une des 2 est évidente c'est le maximum de  $D$ . Le minimum ( $= 0$ ) n'est pas bon car il correspond à  $m = m'$ . L'autre solution cherchée est un "point col".

La topologie de l'ensemble des paires de points est un anneau dont les 2 composantes du bord correspondent aux paires de points confondues.

On cherche une courbe allant d'une composante du bord à l'autre de façon à s'élever le moins possible. Une telle courbe doit passer par un point col !



## Cas des billards de Sinai

On aimerait la aussi coder les trajectoires périodiques. C'est plus complexe, mais on peut aussi le faire.

## Stabilité des o.p.

Il faut distinguer 2 types de stabilité indépendants :

- La stabilité structurelle
- La stabilité dynamique

Une o.p. est **structurellement stable** si elle continue à exister lors d'une perturbation arbitraire du système. Les o.p. obtenues par une méthode variationnelle purement topologique le sont.

Une o.p. est **dynamiquement stable** si les trajectoires de données initiales assez voisines restent proches. La stabilité dynamique se lit en première approximation par linéarisation de la dynamique : c'est la fameuse



## monodromie de Poincaré

Si  $T^n(x_0) = x_0$  où  $x_0$  est un point de l'espace des phases, on peut linéariser (prendre la différentielle) de  $T^n$  en  $x_0$  : cela veut dire déterminer l'action de  $T^n$  sur  $x_0 + dx$  avec  $dx$  infiniment petit ; le résultat est  $x_0 + dy$  avec  $dy = Pdx$ .  $P$  est la monodromie de Poincaré. Ici  $T$  préserve une mesure invariante. On peut en déduire que  $P$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même de déterminant 1. Il y a 2 cas génériques :

- Le cas **elliptique** où les valeurs propres de  $P$  sont distinctes de module 1
- Le cas **hyperbolique** où les valeurs propres de  $P$  sont réelles distinctes de module  $\neq 1$ .

Ces 2 cas sont structurellement stables.

- Le cas elliptique est souvent dynamiquement stable (théorème KAM).
- Le cas hyperbolique toujours dynamiquement instable.

Le cas restant où les 2 valeurs propres sont  $+1$  ou  $-1$  est le cas parabolique structurellement et dynamiquement instable.

## Stabilité des bouncing ball orbites

Une b.b. orbite est stable ssi :

$$\frac{r_1 + r_2 - l}{r_1 r_2} > 0 \text{ et } \frac{(l - r_1)(l - r_2)}{r_1 r_2} > 0 ,$$

où

- $l$  est la longueur du segment
- $r_1$  et  $r_2$  sont les 2 rayons de courbure (algébriques,  $> 0$  si convexe vers l'intérieur)

Instable si  $r_i > 0$  et  $l > r_1 + r_2$  ou  $r_i < 0$  par exemple.

## Instabilité dynamique

### Exposants de Liapounov

On aimerait mesurer de façon quantitative la sensibilité aux conditions initiales. On s'attend à ce que 2 trajectoires voisines s'éloignent exponentiellement au cours du temps. L'exposant de Liapounov se calcule à l'aide de la croissance de la dynamique linéarisée :

$$\lambda(z_0) = \sup_{\delta z_0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|\delta z_n\|}{n} \right) .$$

Si  $z_0$  est un point périodique hyperbolique de période  $N$ , son exposant de Liapounov est le plus grand module des valeurs propres de la monodromie de Poincaré divisé par  $N$ .

2ème EXPOSÉ

ASPECTS PROBABILISTES

## DESCRIPTION PROBABILISTE D'UN SYSTÈME CHAOTIQUE

Lorsqu'un système dynamique est très instable (exposants de Liapounov  $> 0$ ), une description individuelle des trajectoires devient impossible numériquement et dénuée de tout sens physique. La seule description pertinente devient une description probabiliste. On donne une interprétation du type suivant : la suite des itérés d'un point  $x_0$ , les  $T^n(x_0)$ ,  $n = 1, \dots$ , est considérée comme une suite de tirages aléatoires d'un point dans l'espace de phase muni d'une mesure de probabilité adéquate.

On peut ainsi considérer la suite des  $T^n(x_0)$  comme une suite de nombres aléatoires

et  $T$  comme un générateur de nombres aléatoires !

## Baby boîte à outil probabiliste

On se donne un ensemble  $X$  (ici l'espace des phases) et on attribue à toute partie (raisonnable) de  $X$  un nombre compris entre 0 et 1, la **probabilité de l'évènement " $x \in A$ "**, notée  $\mu(A)$ .

On impose les axiomes naturels suivants :

- $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1$
- $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$  dès que les  $A_n$  sont 2 à 2 disjoints

On peut ensuite définir l'intégrale (ou **espérance mathématique**) d'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  notée

$$\int_X f d\mu \text{ ou } E(f)$$

Puis la notion d'indépendance de 2 variables aléatoires  $f, g$  :

$$\mu(f \in A, g \in B) = \mu(A)\mu(B)$$



## Loi des grands nombres

On considère une suite de variables aléatoires  $F_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  indépendantes et de mêmes lois. Sous des hypothèses assez faibles,

$$\frac{F_1(x) + \cdots + F_n(x)}{n} \rightarrow E(F_1)$$

presque sûrement.

Ce résultat est bien sûr aussi utilisé dans l'autre sens pour définir la probabilité  $\mu$  à l'aide d'un grand nombre de tirages aléatoires indépendants. On peut penser à une suite de jetés de dés.

## Théorème central limite

Sous des hypothèses du même type que plus haut, on a le théorème central limite :

$$\mu\left(\left\{x \mid \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k(x) - E(F_1)\right) \geq \frac{c}{\sqrt{n}}\right\}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_c^{\infty} e^{-\sigma u^2/2} du$$

où  $\sigma$  est la variance de la loi des  $F_k$ .

## Application aux systèmes dynamiques

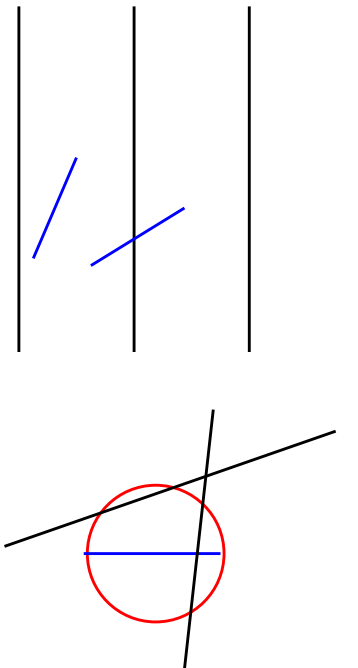
L'idée est maintenant de considérer la suite de variables aléatoires  $f(T^n(x))$  et d'essayer de lui appliquer les résultats précédents.

Pour cela il faut équiper l'espace des phase d'une mesure de probabilité. Si cette probabilité est invariante par  $T$  les v.a.  $f(T^n(x))$  auront toutes la même loi. En général, elles ne seront pas indépendantes, mais l'aspect chaotique de  $T$  va induire une indépendance asymptotique (propriété de mixing).

## A. MESURES INVARIANTES

Il y a sur l'ensemble  $\mathcal{D}$  des droites affines du plan euclidien une mesure naturelle : cette remarque permet de prévoir sans calcul l'observation de Buffon sur le calcul "probabiliste" de  $\pi$ .

La probabilité que l'aiguille de longueur  $l$  rencontre une des droites du faisceau de droites écartées de  $a$  est  $l/\pi a$  qui vaut  $1/\pi$  si  $l = a$ .



La formule de Crofton en est également issue. On paramètre l'ouvert de  $\mathcal{D}$  des droites transverses à un arc  $\gamma$  par l'abscisse  $s$  de l'intersection et l'angle  $\alpha$  de la droite avec l'arc  $\gamma$ . La mesure  $\mu$  est donnée par  $d\mu = \sin \alpha |ds d\alpha|$ . Cette mesure ne dépend pas de l'arc choisi et est invariante par la réflexion  $(s, \alpha) \rightarrow (s, \pi - \alpha)$ . Elle donne donc pour les billards une mesure naturelle invariante par la dynamique.

La mesure  $\mu$  est dite invariante si

$$\forall A \subset X, \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

ou encore

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu .$$

## Exemples de mesures invariantes.

- Mesures portées par une **orbite périodique** ou quasi-périodique  
Si  $T^p(x) = x$ , on pose

$$\int_X f d\mu = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} f(T^i(x))$$

- Mesures de **Liouville** pour les systèmes hamiltoniens Si  $H$  est l'Hamiltonien,  $\Sigma_E = H^{-1}(E)$  supposé compact lisse, alors  $|dpdq|/dH$  est une mesure invariante ( "ensemble microcanonique" )
- Cas des **billards**. La mesure  $\sin \alpha |dsd\alpha|$  est invariante.



- **Mesures physiques ou SRB** : on suppose que, pour presque tout  $x \in X$ , les mesures

$$\int_X f d\mu_n^x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$$

(le membre de droite s'appelle une *moyenne ergodique de f*) convergent vers  $\int f d\mu$ . Alors  $\mu$  est appelée *mesure physique* ou *SRB*.

Elle est portée par les attracteurs.

## Retour de Poincaré

Soit  $\mu$  une mesure invariante et  $A$  tq  $\mu(A) > 0$ , alors si  $A_\infty$  est l'ensemble des points de  $A$  dont l'orbite recoupe  $A$  une infinité de fois,  $\mu(A_\infty) = \mu(A)$ .

En particulier,  $\mu$ -presque tous les points de  $X$  sont récurrents.

## Théorèmes ergodiques

**Théorème ergodique de Birkhoff** : si  $\mu$  est une mesure invariante et  $f$  une observable, les moyennes ergodiques de  $f$  convergent  $\mu$ -p.s vers une fonction  $\bar{f}$  qui est  $T$  invariante.

## B. ERGODICITÉ

$(X, T, \mu)$  est ergodique si les seuls ensembles mesurables invariants sont de mesure 0 ou 1.

Dans ce cas les moyennes ergodiques convergent vers l'intégrale de  $\int f d\mu$  pour presque tout  $x$ .

*“Les moyennes temporelles et spatiales coïncident”.*

Du point de vue probabiliste cela signifie que les variables aléatoires  $f(T^n(x))$  satisfont la loi des grands nombres.

**Exemples de systèmes hamiltoniens ergodiques :**

- Rotations irrationnelles du cercle

- Billards de Sinai
- Billards polygonaux génériques
- Surfaces à courbure  $< 0$

**Exemples de systèmes hamiltoniens non ergodiques :**

- Rotations rationnelles du cercle
- Billards strictement convexes
- Billards polygonaux rationnels

## C. MIXING ET DÉCROISSANCE DES CORRÉLATIONS

$(X, T, \mu)$  est dit *mélangeant* si, pour tous les sous-ensembles  $A$  et  $B$ ,

$$\mu(A \cap T^n(B)) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

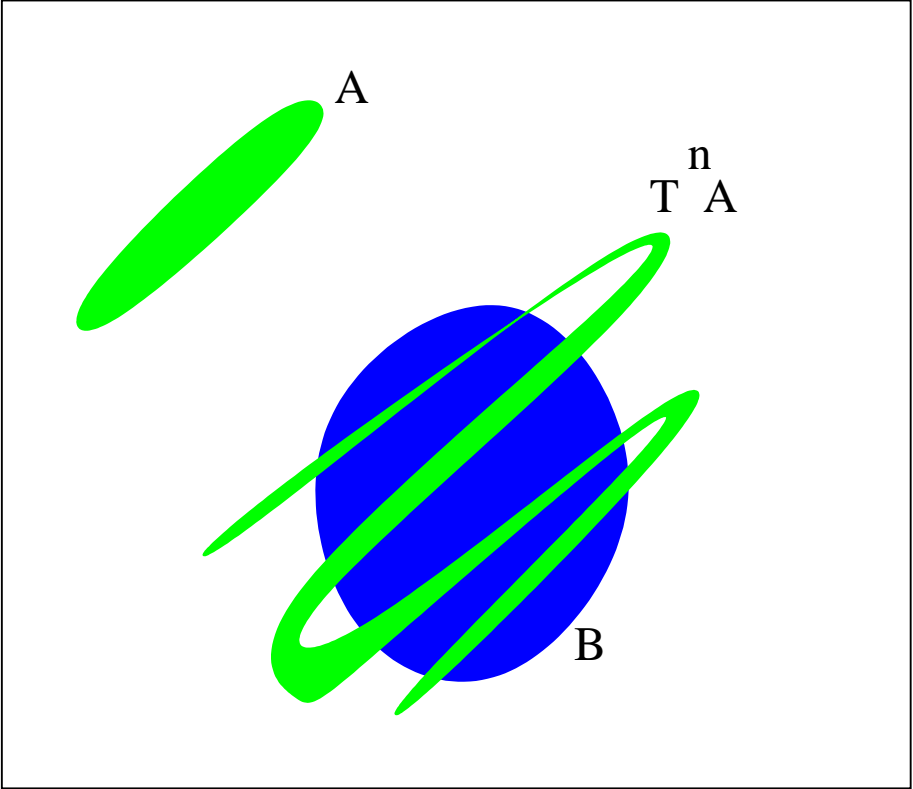
quand  $n \rightarrow \infty$ .

Ou encore pour toutes observables  $f, g$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(T^n(x))g(x)d\mu(x) = \int_X f d\mu \int_X g d\mu .$$

On peut reformuler le mixing en disant que  $f(T^n(x))$  et  $g(x)$  sont asymptotiquement indépendants quand  $k \rightarrow \infty$ .

Un système mélangeant est ergodique, la réciproque est fausse.  
Exemple des rotations du cercle.





## Théorème central limite

Si on a décroissance exponentielle des corrélations pour  $f$  supposée d'intégrale nulle, on a le théorème central limite :

$$\mu\left(\left\{x \mid \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))\right) \geq \frac{c}{\sqrt{n}}\right\}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_c^\infty e^{-\sigma u^2/2} du$$

où  $\sigma$  est la variance de la loi de  $f$ .

On voit que dans ce cas les suites  $f(T^n(x))$  sont de bonnes suites de nombres aléatoires :  $T$  est un générateur de nombres aléatoires.

## D. ENTROPIES

L'entropie a été introduite dès le XIXème siècle par Clausius, Boltzmann et Gibbs dans la thermodynamique et la formulation du 2ème principe (croissance de l'entropie et irréversibilité). Du point de vue de la mécanique statistique, l'entropie d'un état macroscopique d'un système mesure le nombre d'états microscopiques lui correspondant par la formule :

$$S = k \log N$$

Dans un espace de phase continu, ce nombre doit être remplacé par un volume. L'entropie d'une partie  $A$  de l'espace des phases est donc  $k \log \mu(A)$ .

Shannon a défini un nouveau concept de mesure de l'information qui est lié à celui d'entropie.

Si  $\mu$  est une mesure sur  $X$  et  $P = \{A_1, \dots, A_k\}$  une partition de  $X$ . L'entropie de  $P$  est l'information moyenne donnée par l'appartenance à l'un des  $A_i$  :

$$h(\mu, P) = - \sum \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

On définit alors  $P_n$  comme la partition obtenue en observant les  $n$  premiers termes de chaque orbite.

L'entropie de Kolmogorov mesure le taux de croissance de cette entropie

$$h_T(\mu, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(P_n)$$

On montre que cette entropie ne dépend pas de  $P$  si  $P$  est assez fine.

On peut définir une entropie ponctuelle plus intuitive ; elle mesure pour un point  $x$  de l'espace des phases la quantité d'information utile pour déterminer sa trajectoire. On choisit  $\varepsilon > 0$  et on note par  $b(y, \varepsilon)$  la boule de centre  $y$  et de rayon  $\varepsilon$ .

Soit

$$h_T(x, \varepsilon) = \limsup \frac{1}{n} \left| \log \mu \left( b(x, \varepsilon) \cap T^{-1}(b(Tx, \varepsilon)) \cap \dots \cap T^{-n}(b(T^n x, \varepsilon)) \right) \right|$$

On pose  $h_T(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_T(x, \varepsilon)$  et  $h_T(\mu) = \int_X h_T(x) d\mu$ .

**Entropie et exposants caractéristiques** Soit  $\chi(x)$  la somme des exposants de Liapounov  $> 0$ . Alors

- $h(T) \leq \int_X \chi(x) d\mu$
- On a égalité si  $\mu$  est SRB