Sismologie à partir du bruit de la terre : un modèle mathématique

Yves Colin de Verdière

2005-2006

1. Nouvelles méthodes en sismologie

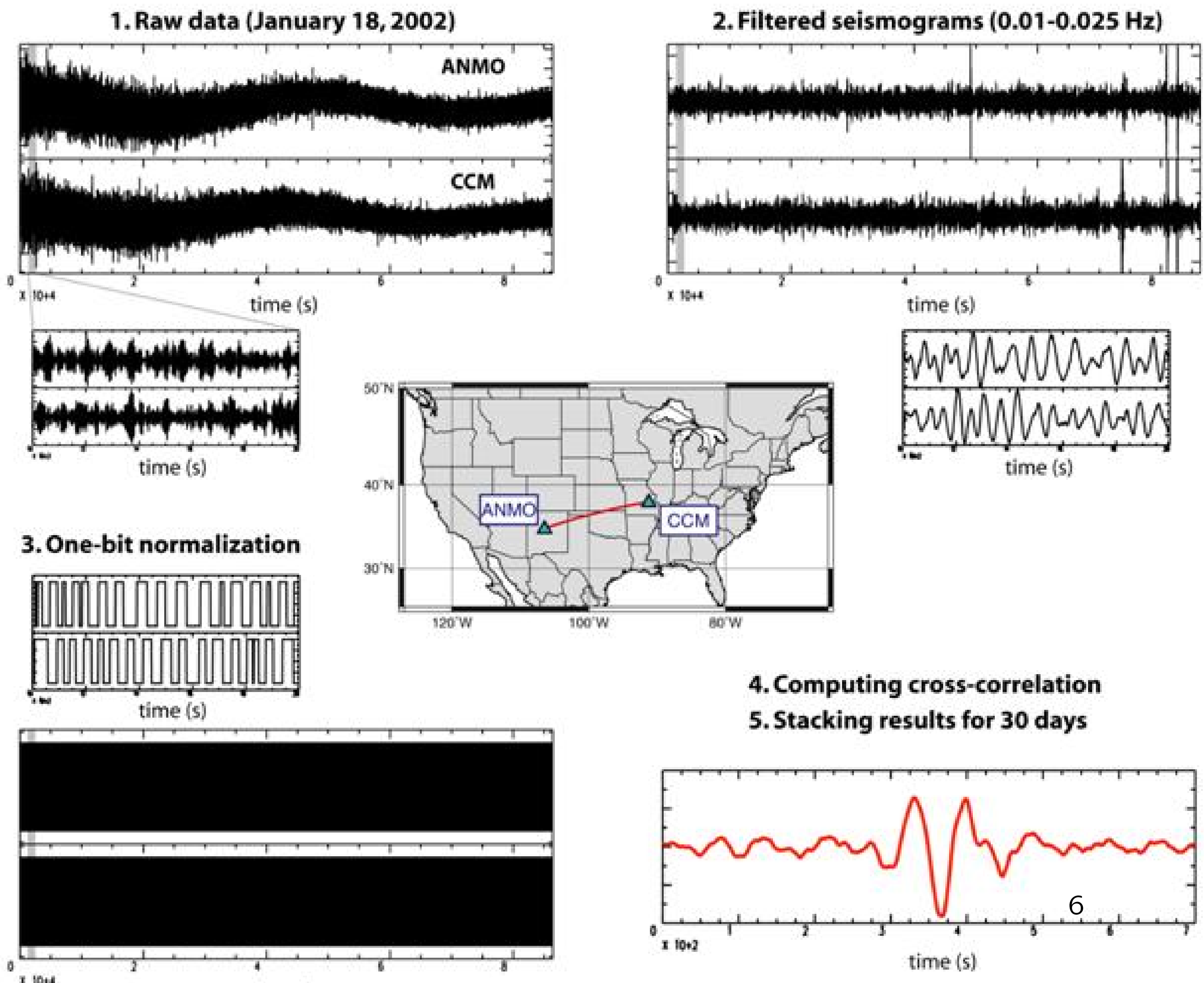
On utilise depuis lontemps la propagation des ondes sismiques (ondes élastiques) en vue de connaitre la structure du globe terrestre. Autant les couches profondes (manteau et coeur) sont relativement homogènes, autant la couche superficielle (la croûte terrestre) de quelques dizaines de km est complexe et notre connaissance en est très limitée.

Méthode classique : utiliser les ondes créées par un séisme ou une explosion. Limitation due à la localisation des séismes ou à la nécessité de provoquer de nombreuses explosions ainsi qu'à la puissance nécessaire pour générer des ondes de longueurs d'onde kilométrique se propageant à grande distance (milliers de km).

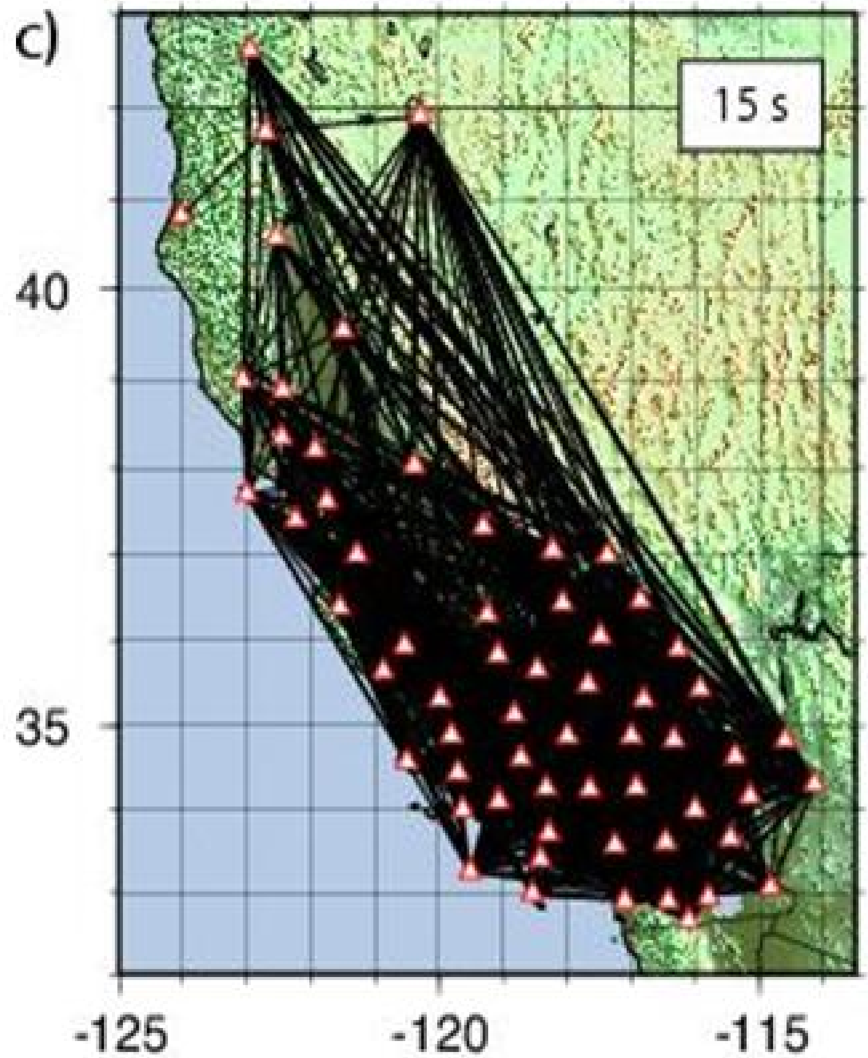
Nouvelles méthodes (Michel Campillo (LGIT à Grenoble) et collaborateurs) : utiliser le *bruit sismique* enregistré en permanence par les sismographes. Ce bruit enregistré en un point ne contient pas d'informations. On calcule la corrélation des bruits enregistrés pendant un temps assez long (de l'ordre d'un mois) en plusieurs points (un réseau de sismographes). Ce bruit dans les fréquences utilisées est généré par l'interaction de l'océan avec la couche superficielle de la terre.

Le principe : des fonctions de corrélation, on déduit la partie géométrique de la fonction de Green ; de celle-ci, on déduit l'hamiltonien effectif des ondes de surface ; puis, par un problème spectral inverse, la structure verticale (la stratification).

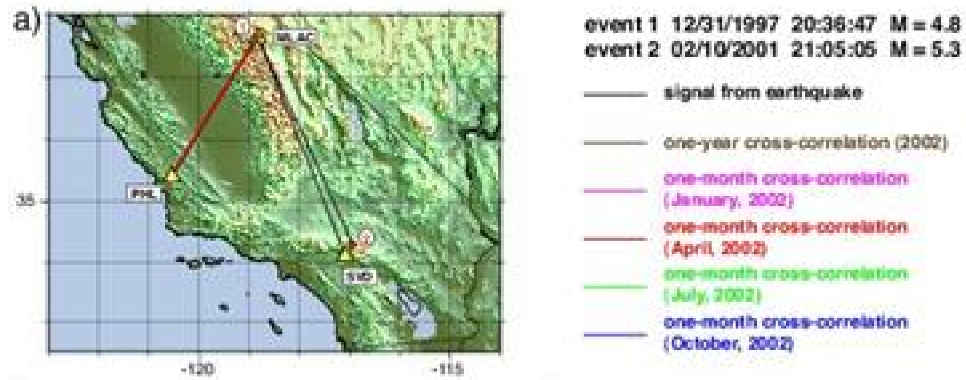
Ca marche ! Michel Campillo et coll. on réussi ainsi à faire une carte du sous-sol californien avec une bien meilleure résolution que ce qui était fait auparavant.

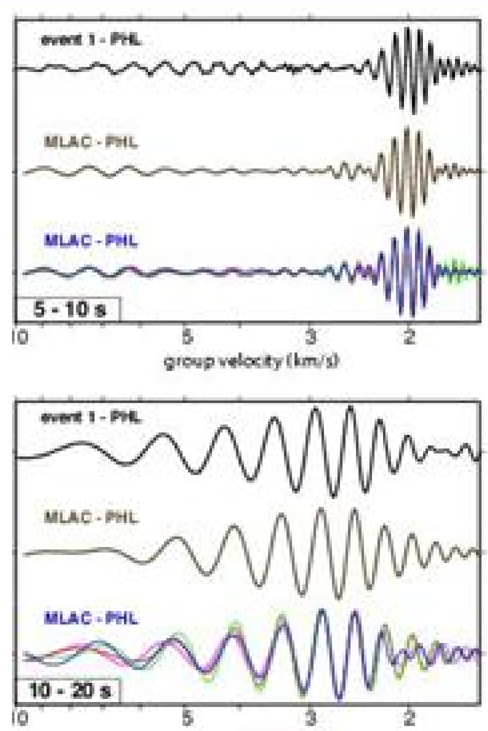

1. Raw data (January 18, 2002)
ANMO
CCM
time (s)
2. Filtered seismograms (0.01-0.025 Hz)
time (s)
3. One-bit normalization
time (s)
50°N
40°N
30°N
120°W
100°W
80°W
ANMO
CCM
4. Computing cross-correlation
5. Stacking results for 30 days
time (s)

Interstation paths for correlations of noise records (Rayleigh)

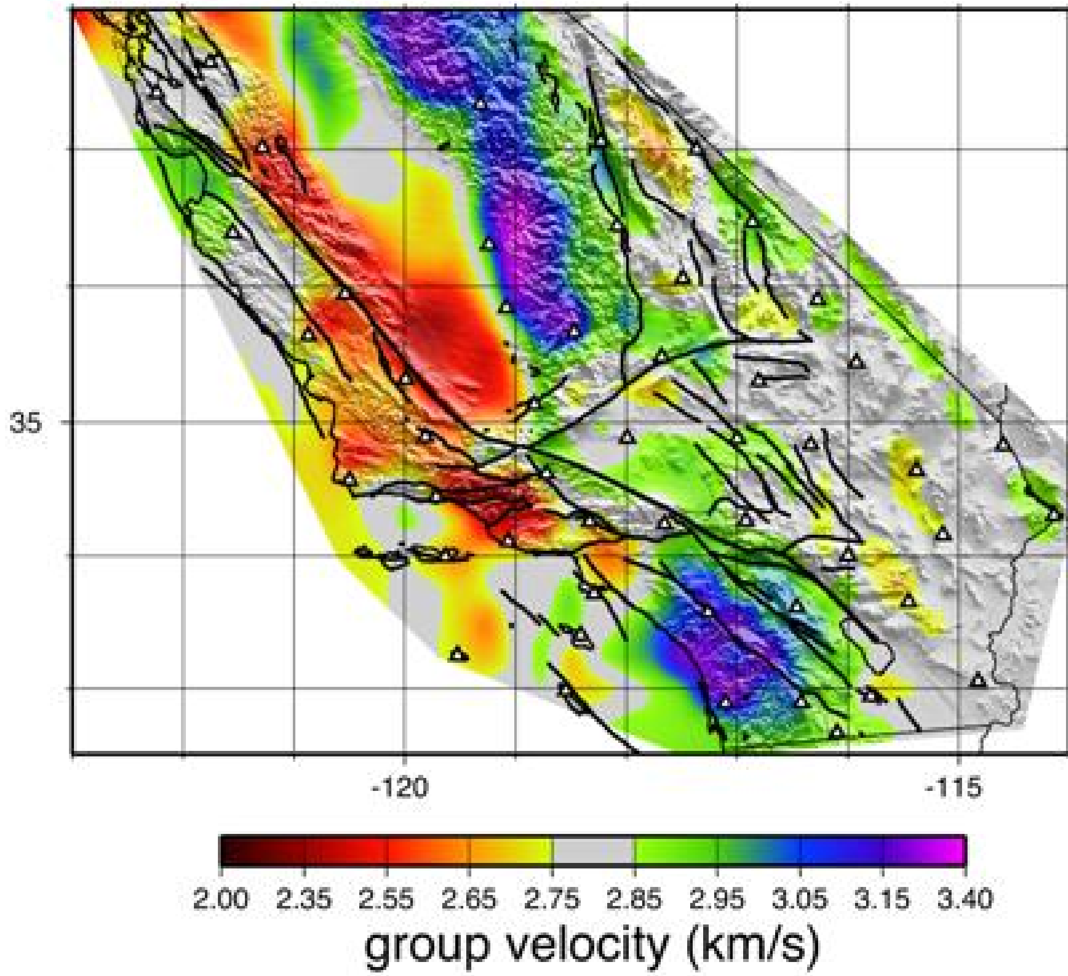


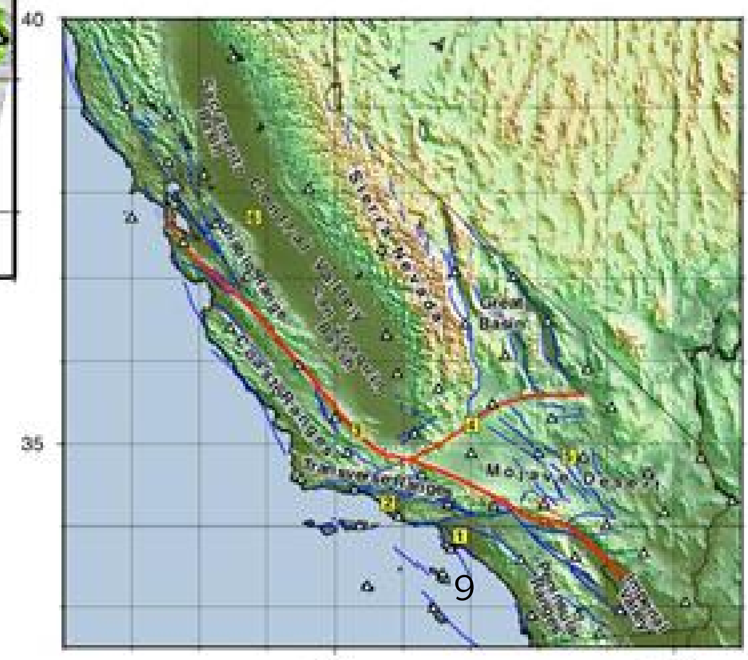
Comparison between earthquake records and reconstructed response





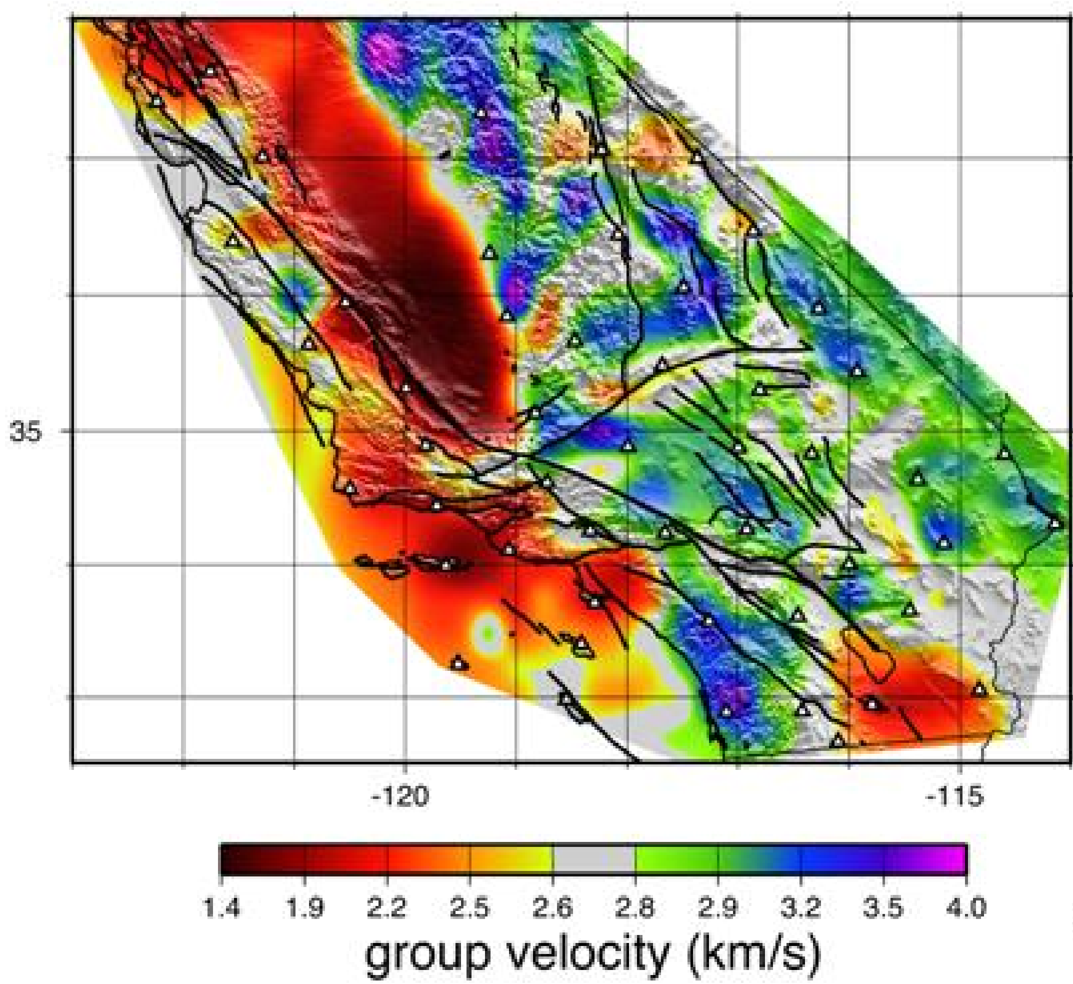
High resolution velocity map obtained from noise (Rayleigh 15 s ~ middle crust)





Main geological features

High resolution velocity map obtained from noise (Rayleigh 7.5 s)

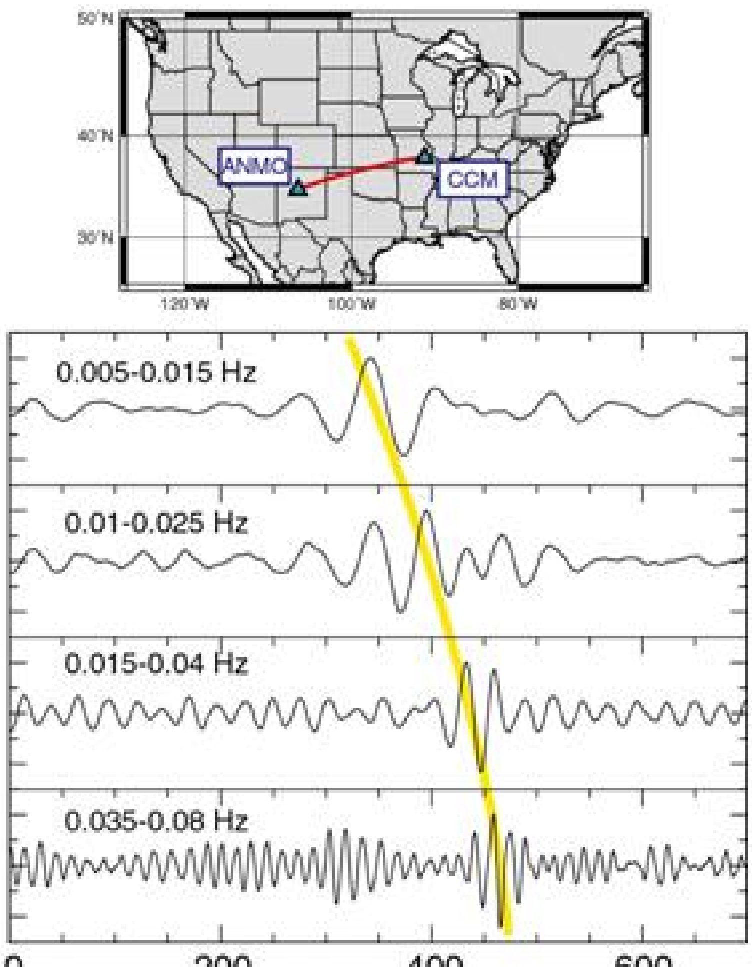


Main geological features

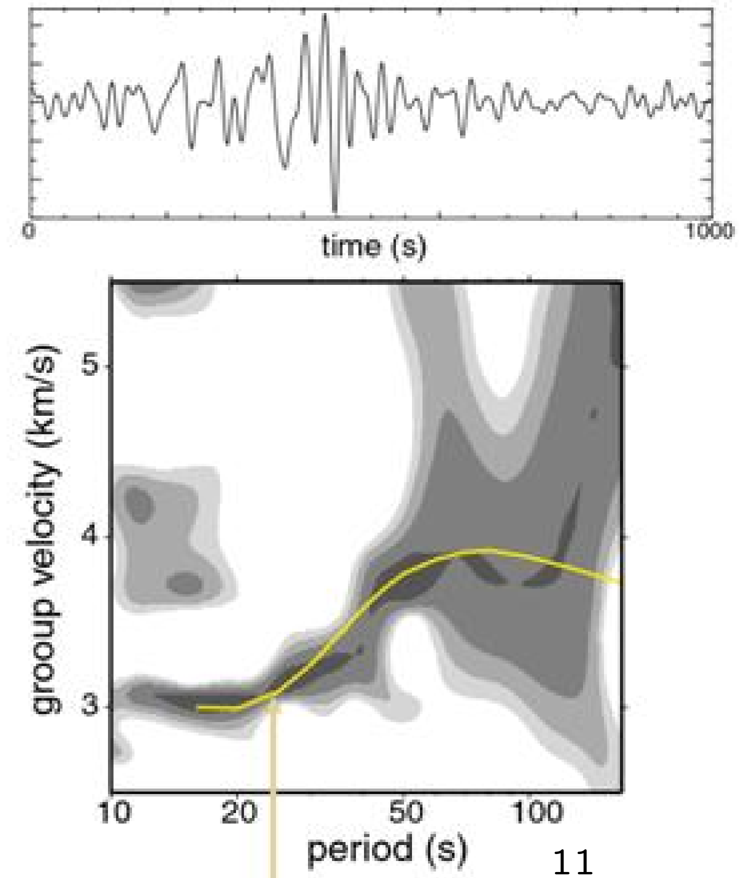
Cross-correlations of seismic noise: ANMO - CCM

(from Shapiro and Campillo, GRL, 2004)

30 days of vertical motion



Dispersion analysis



global model by

L'utilisation du bruit n'est pas complètement nouvelle : on avait ainsi pu étudier l'intérieur du soleil à partir du bruit thermique.

On utilise aussi cette méthode sur la lune et dans l'océan ainsi qu'en laboratoire avec des ultrasons.

But de l'exposé : décrire un modèle mathématique simplifié qui explique les résultats obtenus. Discuter (?) l'utilité d'un tel modèle.

1. Nouvelles méthodes en sismologie

2. Une équation modèle

3. Le cas d'un bruit blanc

4. A quoi ressemble la fonction de Green ?

5. Comment modéliser la source du bruit ?

6. Le calcul de la corrélation

7. Ondes de surface et Hamiltonien effectif pour les milieux stratifiés

2. Une équation modèle

La fonction d'onde $u(x,t)$, où $x \in X$ avec X un domaine de $\mathbb{R}^d$ ou une variété différentiable et t le temps, est supposée à valeurs complexes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ku - Hu = f \tag{1}$$

- $k > 0$ modélise l'amortissement des ondes

- H est un opérateur sur $L^2(X)$ supposé anti-hermitien

- $f(x,t)$, la source du bruit est une fonction aléatoire, supposé *stationnaire en temps* et *ergodique.*

On désignera par

$$K(s-s', x, y) := \mathbb{E}(f(x,s)\overline{f(y,s')})$$

la *covariance* du champ f.

Insistons sur le fait que la seule partie aléatoire dans l'équation est la source f. L'équation de propagation donnée par H est supposé fixe.

La solution de l'équation en l'absence de source est donnée par $u(t) = e^{-kt}U(t)(u(0))$ où $U(t) = \exp(\mathrm{tH})$ est unitaire.

Le noyau de Schwartz de $U(t)$, $G(t,x,y)$ défini par

$$(U(t)u)(x) = \int_X G(t,x,y)u(y)dy \ ,$$

s'appelle la **fonction de Green**.

On a :

- $\int_X G(t,x,y)G(s,y,z)dy = G(t+s,x,z)$: propriété du groupe $U(t)$

- $G(t,x,y) = \overline{G(-t,y,x)}$: unitarité de $U(t)$

La **solution physique (causale)** de (1) est :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{0} e^{ks} ds \int_X G(-s,x,y) f(y,t+s) dy \tag{2}$$

La **corrélation** de 2 signaux complexes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ est définie par : $C_{\varphi,\psi}(\tau) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\overline{\psi(t-\tau)}dt$.

La corrélation des fonctions d'ondes en A et B est donc donnée, en prenant $\varphi(t) = u(A,t)$, $\psi(t) = u(B,t)$, par :

$C_{A,B}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \cdots$
$\cdots \int e^{k(s+s')}G(-s,A,x)\overline{G(-s',B,y)}f(x,t+s)\overline{f(y,t-\tau+s')}dsds'dxdy$

ou encore

$$C_{A,B}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\Phi_\tau(T_t f)$$

où T_t est la translation temporelle et

$\Phi_\tau(f) = \int e^{k(s+s')}G(-s,A,x)G(s',y,B)f(x,s)\overline{f(y,-\tau+s')}dsds'dxdy$

Comme f est supposé ergodique, on peut utiliser la loi des grands nombres :

$$C_{A,B}(\tau) = \mathbb{E}(\Phi_\tau(f)) \ .$$

Utilisant la corrélation du bruit donnée par

$$K(s-s',x,y) := \mathbb{E}(f(x,s)\overline{f(y,s')}) \ ,$$

on voit que $C_{A,B}$ s'exprime à l'aide de K et de G :

$$C_{A,B}(\tau) = e^{k\tau} \int_{-\infty}^{0} ds \int_{-\infty}^{-\tau} ds' \int_{X^2} e^{k(s+s')} G(-s,A,x) K(s-s',x,y) G(s'+\tau,y,B) dx dy \tag{3}$$

qui fait apparaitre une composition d'opérateurs !

3. Le cas d'un bruit blanc

A la structure hilbertienne de $L^2(X)$, est associé un champ aléatoire canonique (gaussien) appellé "bruit blanc", noté w, dont la corrélation est définie par $\mathbb{E}(< w|e > \overline{< w|f >}) =< e|f >$.

Ce n'est pas un élément aléatoire de l'espace de Hilbert, mais plutôt une distribution aléatoire au sens que les $w(\varphi)$ (φ fonction test convenable) sont des v.a. bien définies. Les corrélations des $w(\varphi_i)$ sont $C_{i,j} =< \varphi_i|\varphi_j >$.

Si on est dans $L^2(\mathbb{R})$, $w(s)$ est la dérivée du mouvement brownien.

Si P est Hilbert-Schmidt, Pw est dans L^2 p.s.

Si P est un opérateur à noyau continu, $W = Pw$ est un champ aléatoire dont la corrélation $\mathbb{E}(W(x)\overline{W(y)})$ est le noyau de l'opérateur $PP^\star$. On va utiliser ce résultat plus loin pour modéliser des bruits localisés et à faible distance de corrélation.

Dans le cas où f est un bruit blanc sur $L^2(X \times \mathbb{R})$, on peut calculer $C_{A,B}$ à l'aide de la formule (3). On trouve :

$$C_{A,B}(\tau) = \frac{e^{-k|\tau|}}{2k} G(\tau, A, B)$$

La corrélation est donc calculée en terme de la fonction de Green !

C'est un peu frustrant, car je n'ai pas dit comment extraire les informations géométriques à partir de la fonction de Green.

En outre, ce modèle est trop simplifié, car la source du bruit est localisée et admet une corrélation à petite distance...

4. A quoi ressemble la fonction de Green ?

On va commencer par essayer de comprendre quelle information géométrique est portée par la fonction de Green, puis voir que cette information géométrique continue à être lisible dans la corrélation pour des sources de bruit beaucoup plus générales.

Pour cela on va faire appelle à la théorie géométrique de la propagation des ondes : la propagation des ondes à grandes fréquences.

Exemples :

- l'optique géométrique comme limite aux grandes fréquences de la propagation des ondes electromagnétiques

- la mécanique newtonnienne comme limite $\hbar \to 0$ de l'équation de Schrödinger

- Les sismologues considérent la limite aux grandes fréquences de l'équation des ondes élastiques.

Prenons l'exemple très simple de l'équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}^d$ sans potentiel :

$$\frac{h}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h^2}{2}\Delta u \ .$$

On a alors:

$$G(t,x,y) = (2\pi i t h)^{-d/2} e^{\frac{i}{h}\frac{\|x-y\|^2}{2t}} \ .$$

La partie qui va nous intéresser est la phase oscillante $\frac{i}{h}S(t,x,y)$ avec $S(t,x,y) = \frac{\|x-y\|^2}{2t}$.

S s'interprête comme une intégrale d'action : si on considère la lagrangien $L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ dont les extrêmales sont les droites de $\mathbb{R}^d$, $S(t,x,y)$ est l'action $\int_0^t L(x,\dot{x})dt$ où $x : [0,t] \to \mathbb{R}^d$ est le segment de x à y en le temps t à vitesse constante.

Une telle formule exacte est exceptionnelle, mais la fonction de Green dans le régime des grandes fréquences est donnée par une formule BKW analogue que je vais maintenant rappeler.

Quelques précisions : on va supposer que $\frac{h}{i}H$ admet une limite classique quand $h \to 0$.

Cela veut dire que H est obtenu par quantification d'une fonction $H_{\mathrm{class}}(x,\xi)$. Quantifier veut dire moralement que l'on remplace x_j par la mutiplication par x_j et ξ_j par $-ih\partial_j$. On le fait au moyen de la formule suivante :

$$Hu(x) = (2\pi h)^{-d} \int e^{i<x-y|\xi>/h} H_{\mathrm{class}}(x,\xi)u(y)dyd\xi \ ,$$

noté aussi $H = \mathrm{Op}_h(H_{\mathrm{class}})$. Sous des hypothèse convenables sur H_{class}, H s'appelle un opérateur pseudo-différentiel. Son noyau est de la forme $K(x, \frac{x-y}{h})$.

La relation de dispersion

La relation de dispersion est ce que les mathématiciens appellent la variété caractéristique. Pour une équation d'évolution comme plus haut elle s'écrit :

$$\omega - H_{\mathsf{class}}(x, \xi) = 0 \ .$$

Plus généralement, si on a un système, on prend le déterminant du symbole principal. Pour Schrödinger, on trouve $\omega = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$ et pour les ondes $\omega^2 - g^{ij}(x)\xi_i\xi_j = 0$.

Ondes dispersives

Au hamiltonien classique H_{class} (et plus génénralement à la relation de dispersion, on associe la dynamique donnée par les équations de Hamilton :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H_{\text{class}}}{\partial \xi_j}, \ \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial H_{\text{class}}}{\partial x_j} \ ,$$

et le flot φ_t associé à ce champ de vecteurs. Si $\varphi_{t_0}(y_0, \eta_0) = (x_0, \xi_0)$, le flot φ_t est dit dispersif en (t_0, y_0, η_0) si l'application (exponentielle) $\eta \to p_X(\varphi_{t_0}(y_0, \eta))$ est un difféo. local près de η_0. L'intégrale d'action

$$S_\gamma(t, x, y) := \int_0^t \omega dt + \xi dx$$

est alors une fonction génératrice de φ_{t_0} près de (y_0, η_0).

En général, le Hamiltonien $\frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$ est dispersif, alors que le Hamiltonien des ondes ne l'est jamais (vitesse de propagation indépendante de la fréquence).

La formule de Van Vleck

Dans le cas dispersif, la fonction de Green admet l'expression BKW

$$G(t,x,y) = \sum_{\gamma} a_\gamma(t,x,y) e^{\frac{i}{\hbar} S_\gamma(t,x,y)} \ .$$

Dans la littérature physique, cela s'appelle la formule de Van Vleck que l'on peut déduire formellement de l'intégrale de chemins de Feynman. En maths, cela est du essentiellement à Lax, puis Maslov.

5. Comment modéliser la source du bruit ?

L'idée est de considérer un bruit $W = Pw$ où P est un opérateur convenable. Par exemple, si on veut un bruit localisé dans une région $D \subset X$, on prend pour P la multiplication par une fonction χ à support dans D. La corrélation sera $K(x, y) = |\chi(x)|^2\delta(x-y)$.

Si $X = \mathbb{R}$ et qu'on veut un bruit stationnaire, il faut prendre pour P un opérateur de convolution. La corrélation des transformées de Fourier est alors $K(\xi, \eta) = |F(\xi)|^2\delta(\xi - \eta)$ où F est la transformée de Fourier du noyau de convolution. $|F(\xi)|^2$ s'appelle dans la littérature le spectre de puissance du bruit.

On peut mettre les deux ensembles à l'aide de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Si $P = \mathrm{Op}_\varepsilon(\mathrm{a})$, on aura une corrélation pour $W = Pw$ de la forme $K(x, \frac{x-y}{\varepsilon})$. Dans le cas qui nous intéresse, on est sur $X \times \mathbb{R}$, on a donc envie de prendre $a = a(x; \xi, \omega)$ où ω la fréquence est la variable de Fourier du temps. Le fait que t ne figure pas dans a est la stationnarité.

On aura $K(t, x, y) = A(\frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x-y}{\varepsilon})$ où A est le carré de la transformée de Fourier de a par rapport à (ω, ξ).

6. Le calcul de la corrélation

On s'intéresse maintenant au calcul de la corrélations dans un certain domaine de fréquences où le propagation est géométrique, cela définit le petit paramètre h. Les sources de bruits relevantes sont celles pour lesquelles on peut prendre $\varepsilon = h$.

On peut alors appliquer les résultats généraux du calcul semi-classique pour étudier le comportement asymptotique de la corrélation quand $h \to 0$. De façon plus précise, on utilise le théorème d'Egorov :

Théorème 1 *Si A est un OPD de symbole principal a,*

$$B := U(-s)AU(s)$$

est un OPD de symbole principal $a \circ \varphi_s$.

En appliquant le théorème d'Egorov, on obtient :

Théorème 2 *Si φ_t est le flot hamiltonien de H_{class} et le bruit est $f = Op_h(a)w$. La corrélation $C_{A,B}(\tau))$ est donnée par*

$$C_{A,B}(\tau)) \simeq e^{-k|\tau|} \left[\Pi \circ U(\tau)\right](A,B)$$

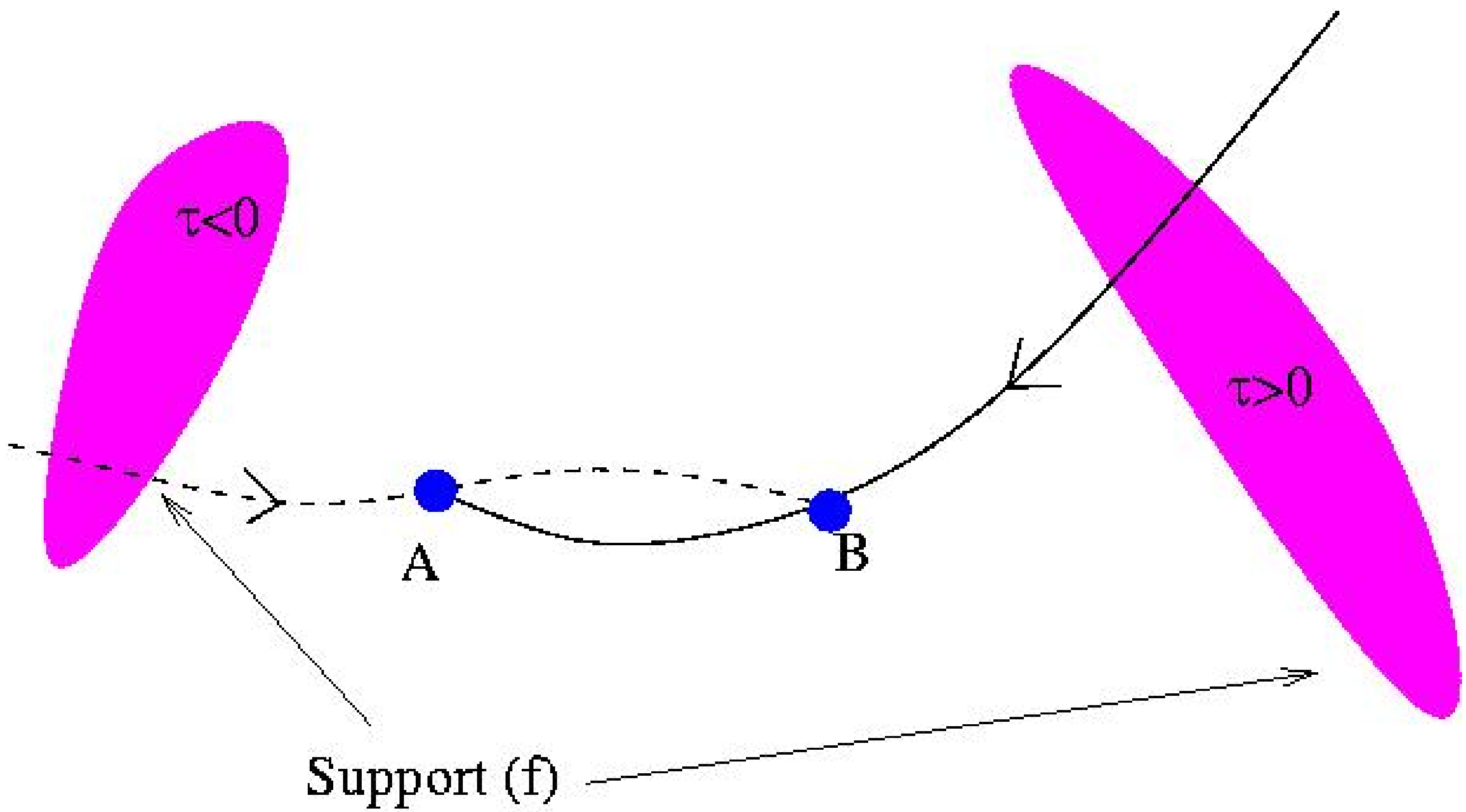
où Π est ΨDO dont le symbole principal $\bar{\pi}$ est donné, pour $\tau < 0$, par

$$\bar{\pi}(x,\xi) = \left(\int_{-\infty}^{0} e^{2ks}|a|^2(H_{\text{class}}(x,\xi);\varphi_s(x,\xi))ds\right) \ ,$$

et, pour $\tau > 0$, par:

$$\bar{\pi}(x,\xi) = \left(\int_{-\infty}^{0} e^{2ks}|a|^2(H_{\text{class}}(x,\xi);\varphi_{s-\tau}(x,\xi))ds\right) \ ,$$

De cette formule, il résulte, dans le cas dispersif, une formule BKW pour $C_{A,B}(\tau)$ qui, pour $\tau > 0$, fait intervenir la corrélation du bruit sur les trajectoires classiques en temps τ de B à A avant B et, pour $\tau < 0$, après A.



τ<0
τ>0
A
B
Support (f)

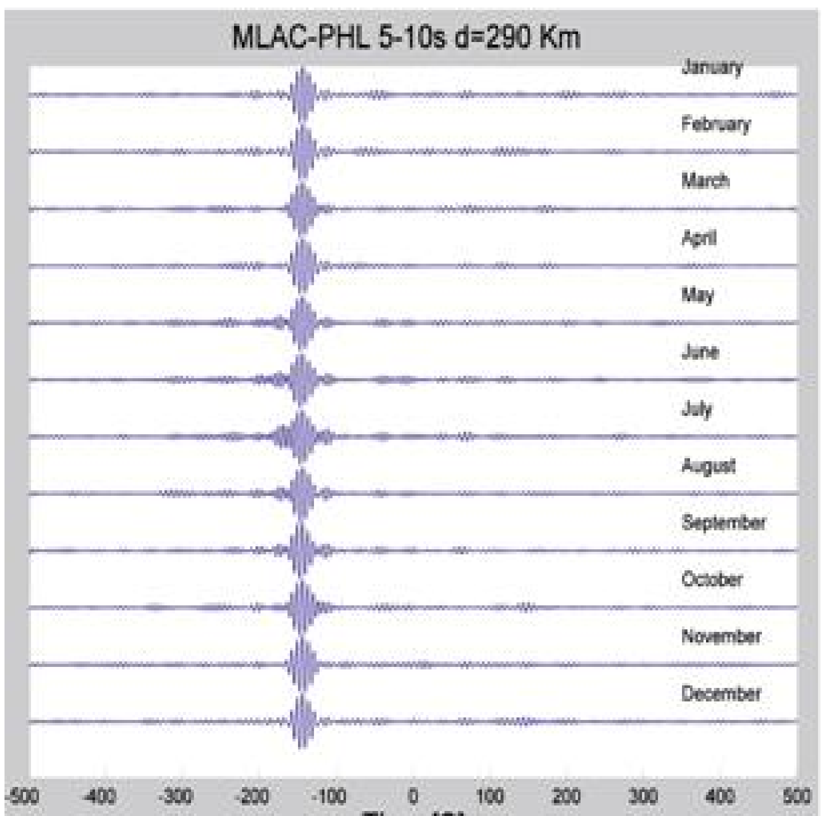
Symmétrie temporelle

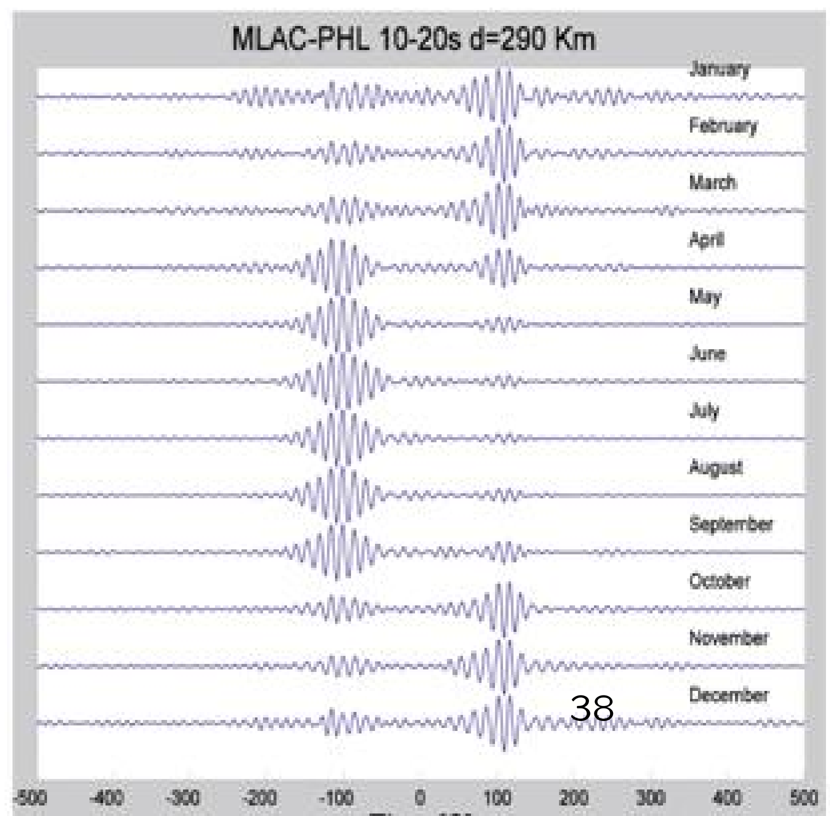
Un hamiltonien classique H_{class} est dit invariant par renversement du temps si il est invariant par $(x, \xi) \to (x, -\xi)$. Dans ce cas l'Hamiltonien classique admet un noyau réel et on a:

$$G(-\tau, A, B) = \overline{G(\tau, A, B)}$$

Dans ce cas, bien que ces corrélations résultent de sources différentes, les phases BKW correspondant à $\pm\tau$ sont les mêmes au signe près comme on le voit sur les courbes suivantes :

Tracking the origin of the seismic noise





7. Ondes de surface et Hamiltonien effectif pour les milieux stratifiés

Ce qui précède n'est pas spécifique à la sismologie. Comment l'appliquer ?

Les ondes élastiques se divisent en 2 espèces : les ondes internes et les ondes de surfaces. Chacune de ces espèces se divise en plusieurs type suivant leur polarisation :

- Les ondes internes sont des ondes P ou S. Elles sont faiblement dispersives.

- Les ondes de surfaces se divisent en ondes de Rayleigh, ondes de Love, ...

Pour des raisons de conservation de l'énergie les ondes internes décroissent très vite (en r^{-2}) et seules les ondes de surface (qui décroissent en r^{-1}) sont à prendre en compte dans ce qui précède. Elles admettent une propagation classique donnée par un Hamiltonien effectif qui vit sur le bord. Elles sont dispersives en général.

Cet Hamiltonien effectif prend en compte le fait que la vitesse de propagation des ondes dépend de la profondeur (en général augmente avec la profondeur) et en rend compte de façon quantitative. En particulier, la vitesse de propagation augmente avec la profondeur atteinte par l'onde de surface, c'est à dire avec sa longueur d'onde. Les ondes de surface sont dispersives.

La carte des vitesse des ondes de surfaces est donc une représentation du profil vertical de la croûte et on peut espérer faire cette analyse jusqu'à des profondeurs de l'ordre de la longueur d'onde.

Un exemple d'Hamiltonien effectif

Je considère l'équation des ondes dans un milieu statifié :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\left(\frac{x}{\varepsilon}, y\right)\Delta u = 0 \ ,$$

($V > 0$ et $V(X, y) = 1$ pour $X << 0$) dans $x \leq 0$ avec condition de Neumann au bord.

Ici $V(\frac{x}{\varepsilon}, y)$ est la vitesse de phase de l'onde au point (x, y).

Pour trouver l'Hamiltonien effectif gouvernant des ondes de fréquences ω/ε, on prend comme Ansatz

$$u(t,x,y) = e^{i(\omega t - y.\eta)/\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon}, y)$$

où $f(.,y)$ est à décroissance rapide quand $X \to -\infty$.

Regoupant les termes en ε^{-2}, on obtient

$$-V^2(X,y)\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X,y) + V^2(X,y)\|\eta\|^2 f(X,y) = \omega^2 f(X,y)$$

avec $\partial_X f(0,y) = 0$.

Cette équation n'admet de solution L^2 en X (et donc décroissant comme $\exp\left(X/\sqrt{\|\eta\|^2 - \omega^2}\right)$) que si ω^2 est dans le spectre discret de l'opérateur différentiel auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^-)$:

$$L_{y,\eta} = -V^2(.,y)\frac{\partial^2}{\partial X^2} + V^2(.,y)\|\eta\|^2$$

avec condition de Neumann.

Il ne peut y avoir du spectre discret que si V prend des valeurs < 1, c'est à dire si la vitesse de propagation dans le milieu stratifié est par endroits < 1.

Ce sera alors certainement le cas si η est assez grand.

La relation de dispersion effective est donc multivaluée ; elle s'écrit :

ω^2 est dans le spectre discret de $L_{y,\eta}$.

On doit alors résoudre le problème inverse suivant : trouver $V(X, y)$ à partir des spectres discrets des $L_{y,\eta}$. On montre, à l'aide de la formule de Weyl, que l'on peut le faire si V est monotone en X.

Remarque : Il y a au départ dans le physique de ce problème 3 petits paramètres :

- Le ε qui intervient dans la covariance du bruit
- Le h de la propagation à grande fréquence
- Le ε qui entre dans la modélisation de la stratification

Le fait que ces 3 “petits” paramètres soient comparables est fondamental.

La longueur d’onde typique est qqs dizaines de km et comparable à l’échelle verticale dans la croûte. Le temps de corrélation du bruit océanique utilisé est aussi compatible avec les échelles précédentes.

Merci de votre attention...