MÉTHODES SEMI-CLASSIQUES ET THÉORIE SPECTRALE

Yves Colin de Verdière [1]

[1]Institut Fourier, UMR 5582 (Université Grenoble 1-CNRS),
BP 74, F-38402-St Martin d'Hères Cedex
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ ycolver/
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

Résumé. Dans ce livre, j'ai voulu présenter 3 applications des méthodes semi-classiques à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger : les formules de traces semi-classiques qui sont des analogues asymptotiques de la formule des traces de Selberg, la construction de fonctions propres approchées ou quasi-modes et l'étude de l'effet tunnel. J'ai fait précéder ces chapitres centraux de chapitres introductifs à la géométrie symplectique, à la théorie spectrale et aux h-opérateurs pseudo-différentiels.

Remerciements : je remercie les auditeurs des cours que j'ai eu l'occasion de donner sur ces sujets aussi bien à l'Institut Fourier, à l'ENS de Lyon et au centre Emile Borel.

Table des matières

INTRODUCTION

Le but du cours est la description des solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles linéaires dépendant de façon singulière d'un petit paramètre (il y a aussi des applications de ces méthodes à des EDP non-linéaires comme celles de la mécanique des fluides). Les exemples typiques sont l'équation des ondes lorsque la fréquence tend vers l'infini (optique géométrique comme limite de l'optique ondulatoire) et l'équation de Schrödinger quand la *constante* de Planck $\hbar$ tend vers 0 (limite classique de la mécanique quantique). Il est moins habituel de considérer la limite adiabatique comme un problème semi-classique, ce qu'elle est cependant. Il peut paraitre étonnant de faire tendre vers 0 une constante physique ; il s'agit d'un artifice mathématique bien pratique, l'espoir étant que les régimes asymptotiques étudiés donnent une appproximation réaliste des vrais systèmes physiques.

L'ensemble de ces méthodes que l'on peut regrouper sous le vocable *semi-classique*, dont l'origine est la célèbre approximation BKW, a connu un grand développement depuis les années 1970, principalement sous l'action de mathématiciens comme Maslov, Lazutkin, Leray, Duistermaat, Weinstein, Guillemin et Hörmander. Maslov a été le premier à concevoir une méthode générale pour décrire l'asymptotique semi-classique en présence de caustiques. Duistermaat et Hörmander ont contribué à faire des opérateurs intégraux de Fourier un outil performant dans l'étude des EDP linéaires. Duistermaat, Guillemin et Weinstein ont géométrisé la théorie et l'ont appliqué à des problèmes d'asymptotique spectrale. La théorie de Duistermaat-Hörmander est une théorie sans petit paramètre, ce qui rend un peu acrobatique les applications aux problèmes avec petit paramètre. La théorie avec petit paramètre a été développée après Maslov par Leray, puis par Helffer-Robert.

La géométrie sous-jacente aux approximations semi-classiques se trouve être naturellement la géométrie symplectique de l'espace des phases, c'est-à-dire la géométrie du formalisme hamiltonien en mécanique classique ou en optique géométrique : de ce point de vue les choses ne sont pas nouvelles pour les physiciens, au moins en principe. Ce n'est pas surprenant puisque l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{du}{dt} = \hat{H}u$$

elle-même peut être vue comme un système hamiltonien sur l'espace projectif d'un espace de Hilbert. A la limite semi-classique, l'espace de Hilbert disparait (et la linéarité), mais pas la structure symplectique. On perd la linéarité, mais on gagne la dimension finie. Il n'est pas étonnant que, outre les applications naturelles à la physique (mécanique quantique, optique), des applications purement mathématiques en résultent : preuve par Witten des inégalités de Morse, application au problème spectral inverse (spectre et géodésiques fermées), construction d'opérateurs de Schrödinger dont le début du spectre est prescrit.

Les outils généraux sont développés dans les premiers chapitres :

- Géométrie symplectique avec l'accent mis sur les variétés lagrangiennes et leurs représentations comme familles de fonctions (Huyghens [1]), sur certains aspects de la mécanique classique (trajectoires périodiques, théorèmes KAM).
- Théorie spectrale : il s'agit de quelques compléments d'analyse fonctionnelle et de théorie spectrale générale.
- Opérateurs pseudo-différentiels et microlocalisation. On présente la notion de famille admissible de fonctions (distributions) dépendant d'un petit paramètre h on introduit le faisceau des h-microfonctions, quotient des fonctions admissibles par les fonctions négligeables. Dans ce cadre, on introduit les notions de $h-$wavefront ou microsupport et le calcul des h-opérateurs pseudo-différentiels. On est ainsi conduit à la notions de mesure semi-classique ou de Husimi.
- Les distributions lagrangiennes sont également introduites comme sous-faisceau du précédent dont le support est une sous-variété lagrangienne du cotangent.

On décrit ensuite l'application de ces méthodes à la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger quand $\hbar$ tend vers 0.

C'est ainsi que l'on développe les sujets suivants :

- Quasi-modes : il s'agit de construire à partir d'informations sur les points d'équilibre stables ou plus généralement les trajectoires périodiques stables du système hamiltonien des fonctions propres approchées et d'en déduire des informations sur le spectre. En particulier, on décrira la construction de quasi-modes dans les cas complètement intégrables et dans le régime KAM (travaux de Lazutkin).
- Formules de traces : on identifie la trace du groupe unitaire associé à l'équation de Schrödinger (la fonction de partition quantique) comme somme sur les valeurs propres à la trace obtenue à partir du noyau distribution $e(t,x,y)$ de $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$:
$$\sum_{j=1}^{j=\infty} e^{-itE_j/\hbar} = \int_X e(t,x,x)dx \ .$$
On construit ensuite des approximations semi-clssiques du noyau e lorque $\hbar$ tend vers 0 (formules de Van Vleck) au moyen du calcul des distributions lagrangiennes. On donne ainsi des preuves des formules de traces de type Gutzwiller et on montre comment en déduire la formule de traces de Duistermaat-Guillemin.
- Formes normales de Birkhoff : la théorie classique des formes normales de Birkhoff est un mécanisme purement algébrique qui s'étend sans difficultés au régime semi-classique. On peut ainsi décrire les états semi-excités d'un hamiltonien semi-classique au voisinage d'un minimum non dégénéré de sa limite classique.
- Effet tunnel : il s'agit de comprendre les effets dus à la non-localisation des fonctions propres, en particulier dans les situations de quasi-modes avec symétries. On mentionnera l'application aux inégalités de Morse

[1] Christiaan Huyghens (1629-1695), mathématicien, physisicien et astronome hollandais, *Traité de la lumière (1690)*

et à la construction du complexe de Thom-Smale par Witten, ainsi que les applications au problème combinatoire classique du plongement des graphes dans les surfaces.

- Ergodicité et fonctions propres : on peut associer aux fonctions propres leur distribution de Husimi dans l'espace des phases. A la limite semi-classique, ces mesures sont invariantes par le flot hamiltonien. Dans le cas ergodique, on obtient des résultats sur l'équipartition des fonctions propres : théorème ergodique semi-classique de Shnirelman.

1. Remarques d'ordre général et bibliographique

Il ne sera évidemment pas question de donner les preuves détaillées de tous les résultats. Souvent, un cas particulier typique sera expliqué plus à fond ou bien on renverra à une référence précise.

Pour ce qui est de la bibliographie force est de constater qu'il n'y a pas de référence raisonnable contenant à la fois un point de vue géométrique et l'analyse semi-classique au sens Maslov-Leray (ie $\hbar \to 0$). Les traités récents d'EDP linéaires (Hörmander, Trêves) contiennent un chapitre de géométrie symplectique mais assez orienté vers l'analyse des EDP générales. Le livre [**Rob87**] (voir aussi [**HR81**]) est une bonne référence, mais là encore le point de vue géométrique n'est peut-être pas assez mis en avant.

Pour ce qui est des généralités sur la mécanique quantique les meilleures références à ce niveau semblent être [**LL74**], [**FH65**] et [**Mac63**] ; il y aussi d'excellents traités de mécanique classique [**Arn67**], [**AM78**], [**LM88**].

Comme introduction à la géométrie symplectique, on peut conseiller [**Arn67**], [**Dui96**], [**Wei77**], [**Wei82**].

Pour ce qui est de la formule des traces semi-classique, la référence mathématique principale est [**DG75**]. Les physiciens pourront préférer consulter [**Gut90**] et [**GVZ91**]. Je m'inspirerai aussi beaucoup de [**Dui74**].

La mathématique de l'effet tunnel est principalement l'oeuvre de Helffer-Sjöstrand [**HS84**], [**HS85a**],[**HS85b**],[**HS85c**].

Pour la construction de quasi-modes, [**Ral76**], [**Ral77**] et [**Sjö92**] semblent une bonne base.

2. Premiers pas

2.1. Du côté de la mécanique.

2.1.1. *La mécanique classique.* on réécrit les équations de Newton $md^2x/dt^2 = -\mathrm{gradV}(x)$ comme les équations d'Euler-Lagrange de $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, dx/dt)dt$, avec $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(dx/dt)^2 - V(x)$ (intégrale d'action). Cette formulation variationnelle permet de comprendre l'invariance par changement de variable en x, mais pas dans l'espace des phases $(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n}$.

On a recours pour cela au formalisme hamiltonien : l'espace de phases $T^\star\mathbf{R}^n$ est l'espace cotangent, l'hamiltonien $H(x,\xi) = \xi^2/2m + V(x)$ est une fonction numérique sur $T^\star\mathbf{R}^n$, la dynamique est donnée par :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j},\ \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}\ .$$

Ceci peut se réécrire à partir de la forme symplectique $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$, la dynamique est celle du champ de vecteurs $\mathcal{X}_H$ défini par $\omega(\mathcal{X}_H, .) = -dH(.)$. On interprète $T^\star \mathbf{R}^n$ comme l'espace des états du système classique.

2.1.2. *La mécanique quantique ou ondulatoire.* C'est une mécanique d'onde où les états sont donnés par des fonctions d'ondes qui évoluent suivant une EDP,l'équation de Schrödinger. L'espace des états $\mathbf{P}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))$ est l'espace projectif d'un espace de Hilbert complexe, l'espace des fonctions d'onde, la dynamique est donnée par *l'équation de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \hat{H} u \ ,$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur autoadjoint obtenu en *remplaçant* ξ_j par $-i\hbar\partial/\partial x_j$ et x_j par la multiplication par la fonction x_j. Cette règle empirique ne donne pas de recette cohérente, mais si $H(x,\xi) = (1/2m)\xi^2 + V(x)$, on prend $\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\Delta + V$. On interprète un point de l'espace projectif comme un état et la densité $u(x)^2|dx|$ comme la probabilité de présence en un point.

2.1.3. *Les solutions semi-classiques.* On s'intéresse à ce qui se passe lorsque $\hbar \to 0$ et on essaie de construire des solutions oscillantes approchées (solutions BKW) :

$$\begin{aligned}(-\hbar^2\Delta + V - E)(ae^{\frac{iS}{\hbar}}) = e^{\frac{iS}{\hbar}}\big(&a(V - E + \|dS\|^2) \\ &+\frac{\hbar}{i}(< da|dS > + \frac{1}{2}a\Delta S) - \hbar^2\Delta a\big) \ .\end{aligned}$$

On peut réinterpréter géométriquement l'annulation des 2 premiers termes en puissances de $\hbar$:

- L'annulation du premier terme (*équation eiconale*) s'interprête en termes de variété lagrangienne (solution géométrique de l'équation de Hamilton-Jacobi)
- Celle du second terme (*équation de transport*) comme la construction d'une demi-densité invariante sur celle-ci :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H}(a|dx|^{\frac{1}{2}}) = (< da|dS > + \frac{1}{2}a\Delta S)|dx|^{\frac{1}{2}} \ .$$

Une autre approche est fournie par l'intégrale de Feynman ; le noyau $e(t,x,y)$ de l'opérateur $U(t) = exp(-i\frac{t}{\hbar}\hat{H})$ est alors donné formellement par l'intégrale sur l'espace des chemins :

$$e(t,x,y) = \int_{\Omega_{x,y}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_\gamma \mathcal{L}} d\gamma \ ,$$

où $\Omega_{x,y}$ est l'espace des chemins $\gamma\ : [0,t] \to X$ d'origine x et d'extrémité y et $d\gamma$ est une *mesure de Lebesgue.* L'application de la méthode de la phase stationnaire fait apparaitre les trajectoires classiques.

Entre ces 2 approches, la première insuffisante pour représenter les solutions au voisinage des caustiques et la seconde qui manque d'assise mathématique (intégrales de Fresnel en dimension infinie), une voie intermédiaire existe c'est l'étude systématique des fonctions représentables comme superposition

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)/h} a(x,\theta) d\theta \ .$$

Cet Ansatz a été proposé par Maslov : nous pouvons l'appeler l'*Ansatz de Huyghens-Maslov.*

En particulier on souhaite associer à de telles intégrales une information purement géométrique codée au moyen d'une variété lagrangienne : c'est le *calcul symbolique* développé principalement par Duistermaat et Hörmander.

2.2. Du côté de l'optique. On a évidemment une analogie en optique : L'optique géométrique et les rayons lumineux vus comme extrémales de $\int nds$ ou avec le formalisme hamiltonien et l'optique ondulatoire (les équations de Maxwell et l'équation des ondes).

3. Problèmes

Quelques problèmes en arrière plan.

L'intégrale de Feynmann en est certainement un. Bien que manquant à l'heure actuelle de justification mathématique permettant d'en faire un outil banal, nous verrons qu'elle permet de prévoir certains résultats (formule de traces, déphasages) avec une grande précision.

Un autre problème qui me semble intéressant est l'utilisation de l'analyse semiclassique en vue d'obtenir des résultats de géométrie symplectique par exemple le principe d'incertitude classique (voir [**Vit92**] à ce sujet).

Enfin un 3ème champ qui mériterait davantage d'investissements est celui de l'application de l'effet tunnel en géométrie : mentionnons déjà la construction du complexe dit de Witten qui permet de calculer en principe l'homologie, la preuve par Bismut et Zhang d'une extension considérable de la conjecture de Ray-Singer ainsi que mes travaux sur les plongements de graphes.

Bibliographie

[AA67] Arnold, V. and Avez, A. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique.* Gauthier-Villars, 1967.

[AG91] Alinhac, S. and Gérard, P. *Opérateurs pseudo-diférentiels et théorème de Nash-Moser.* Interéditions, 1991.

[Agm82] Agmon, S. *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations.* Mathematical notes Princeton, 1982.

[AH76] Albeverio, S. A. and Hoegh-Krohn, R. J. *Mathematical theory of Feynman path integrals.* Lecture Notes in Mathematics 523. Springer, 1976).

[Air38] Airy, G. On the intensity of the light in a neighborhood of a caustic. *Trans Cambr. Phil. Soc.*, 6:379–403, 1838.

[AM78] Abraham, R. and Marsden, J. *Foundations of mechanics.* Benjamin, 1978.

[Arn63] Arnold, V. Small denominators II. Proof of a theorem of A. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. *Russian Math. Surveys*, 18:9–36, 1963.

[Arn67] Arnold, V. On a characteristic class entering in the quantization conditions. *Funct. Anal. and Appl.*, 1:1–13, 1967.

[Arn72] Arnold, V. Modes et quasi-modes. *Functional analysis and its applications*, 6: 94–101, 1972.

[Arn78] Arnold, V. *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer, 1978.

[Arn85] Arnold, V. The Sturm intersection theorem and symplectic geometry. *Funct. anal. and its applic.*, 19:251–259, 1985.

[Aud91] Audin, M. *The topology of torus actions on symplectic manifolds.* Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1991.

[Aud96] Audin, M. *Spinning tops. A course on integrable systems.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1996.

[Aud00] Audin, M. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité.* Cours spécialisés, Soc. Math. Fr., 2000.

[AVG87] Arnold, V., Varchenko, A., and Goussein-Sade, S. *Singularités des applications différentiables.* Mir (Moscou), 1987.

[Bat97] Bates, S. and Weinstein, A. *Lectures on the geometry of quantization.* Berkeley Mathematics Lecture Notes., 1997.

[BB70] Balian, R. and Bloch, C. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain I. *Ann. of Physics*, 60:401, 1970.

[BB71] Balian, R. and Bloch, C. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain II. *Ann. of Physics*, 64:271, 1971.

[BB72] Balian, R. and Bloch, C. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain III. *Ann. of Physics*, 69:76, 1972.

[BB74] Balian, R. and Bloch, C. Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths. *Ann. of Phys.*, 85:514, 1974.

[Ber00] Berndt, R. *An introduction to Symplectic Geometry.* AMS, 2000.

[BFK91] Burguelea, D., Friedlander, L., and Kappeler, T. On the determinant of elliptic differential and finite difference operators in vector bundles over S^1. *Commun. Math. Phys.*, 138:1–38, 1991.

[BGM71] Berger, M., Gauduchon, P., and Mazet, E. *Le spectre d'une variété riemannienne compacte.* Springer LNM, 1971.

[BGS84] Bohigas, O., Giannoni, M.-J., and Schmit, C. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett*, 52:1–4, 1984.

[Bir66] Birkhoff, G.D. *Dynamical systems*. AMS, 1966.

[Bos86] Bost, J. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, zehnder, Herman, Pöschel). *Astérisque*, 133-134:113–157, 1986.

[Bot56] Bott, R. On the iterations of closed geodesics and Sturm intersection theory. *CPAM*, 9: 171–206, 1956.

[BPU95] Brummelhuis, R., Paul, T., and Uribe, A. Spectral estimates around critical levels. *Duke Math. J.*, 78: 477–530, 1995.

[Bér77] Bérard, P. On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. *Math. Z.*, 155:249–276, 1977.

[BU91] Brummelhuis, R. and Uribe, A. A trace formula for Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 136: 567–584, 1991.

[Bun95] Bunke, U. On the gluing problem for the η-invariant. *J. Differ. Geom.*, 41:397–448, 1995.

[BV86] Balazs, N. and Voros, A. Chaos on the pseudo-sphere. *Physics reports*, 143:109–240, 1986.

[BW75] Born, M. and Wolf, E. *Principles of optics*. Pergamon, 1975.

[BW84] Berry, M. and Wilkinson, M. Diabolical points in the spectra of triangles. *Proc. Royal Soc. London*, A 392:15–43, 1984.

[Car93] Carvalho, R. E. de. Classical and Quantum aspects of resonant normal forms. *Nonlinearity*, 6:973–975, 1993.

[CFKS80] Cycon, Froese, Kirsch, and Simon, B. *Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry*. Springer, 1980.

[Cha74] Chazarain, J. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24: 65–82, 1974.

[CLP99] Colin de Verdière, Y., Lombardi, M., and Pollet, J. The microlocal Landau-Zener formula. *Annales de l'institut Poincaré*, 71:95–127, 1999.

[Col73a] Colin de Verdière, Y. Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I. *Compositio Mathematica*, 27: 80–106, 1973.

[Col73b] Colin de Verdière, Y. Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II. *Compositio Mathematica*, 27: 159–184, 1973.

[Col75] Colin de Verdière, Y. Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des chemins. *Séminaire Goulaouic–Schwartz*, :, 1974–1975.

[Col77a] Colin de Verdière, Y. Quasi-modes sur les variétés riemanniennes. *Inventiones Math.*, 43: 15–52, 1977.

[Col77b] Colin de Verdière, Y. Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbb{R}^n$. *Ann. Sci. ENS Paris*, 10:559–576, 1977.

[Col79a] Colin de Verdière, Y. Sur le spectre des opérateurs à bicaractéristiques toutes périodiques. *Comment. Math. Helv.*, 54: 508–522, 1979.

[Col79b] Colin de Verdière, Y. Spectre conjoint d'OPD qui commutent I : le cas non intégrable. *Duke Math. J.*, 46: 169–182, 1979.

[Col80] Colin de Verdière, Y. Spectre conjoint II : le cas intégrable. *Math. Z.*, 171: 51–73, 1980.

[Col85] Colin de Verdière, Y. Ergodicité et fonctions propres du Laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102: 497–502, 1985.

[Col86] Colin de Verdière, Y. L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques. *Comm. Math. phys.*, 105: 327–335, 1986.

[Col98a] Colin de Verdière, Y. Introduction à la mécanique semi-classique. *Ens. math.*, 44:23–51, 1998.

[Col98b] Colin de Verdière, Y. *Spectres de graphes*. Soc. Math. Fr, 1998.

[Col99] Colin de Verdière, Y. Déterminants et intégrales de Fresnel. *Ann. Inst. Fourier*, 49:861–881, 1999.

[Col01] Colin de Verdière, Y. Singular Lagrangian manifolds and semi-classical analysis. *En préparation*, :1–.., 2001.

[Com82] Combet, E. *Intégrales exponentielles*. Lecture Notes in Math 937 (Springer), 1982.

[Con96] Connes, A. Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:1231, 1996.

[CP94a] Colin de Verdière, Y. and Parisse, B. Equilibres instables en régime semi-classique II: conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. IHP (physique théorique)*, 61:347–367, 1994.

[CP94b] Colin de Verdière, Y. and Parisse, B. Equilibres instables en régime semi-classique I: concentration microlocale. *Comm. PDE*, 19:1535–1564, 1994.

[CP99] Colin de Verdière, Y. and Parisse, B. Singular Bohr-Sommerfeld rules. *Commun. Math. Phys.*, 205:459–500, 1999.

[CV79] Colin de Verdière, Y. and Vey, J. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18: 283–293, 1979.

[CV00] Colin de Verdière, Y. and Vu Ngoc, S. Singular Bohr-Sommerfeld rules for $2d-$integrable systems. *Prépublication Institut Fourier*, :, juin 2000.

[Dar72] Darboux, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Chelsea, 1972.

[Dav99] Davies, B. Semi-classical States for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators. *Commun. Math. Phys.*, 200:35–41, 1999.

[DG75] Duistermaat, J. and Guillemin, V. The spectrum of positiv elliptic operators and periodic geodesics. *Invent. Math.*, 29: 39–79, 1975.

[DH72] Duistermaat, J. and Hörmander, L. Fourier integral operators II. *Acta Math.*, 128: 183–269, 1972.

[DHPR69] Deprit A, Henrard J., Price J., and Rom A. Birkhoff's normalization. *Celest. Mechanics*, 1:222–251, 1969.

[DS99] Mouez Dimassi and Johannes Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Dui72] Duistermaat, J. On periodic solutions near Equilibrium Points of Conservative systems. *Arch. Rational Mech. Anal*, 45:143–160, 1972.

[Dui74] Duistermaat, J. Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding of singularities. *Commun. Pure Applied Math.*, 27: 207–281, 1974.

[Dui76] Duistermaat, J. On the Morse index in Variational calculus. *Advances in Math.*, 21: 173–195, 1976.

[Dui84a] Duistermaat, J. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems. *Bifurcation Theory and Applications, Springer LNM*, 1057:56–105, 1984.

[Dui84b] Duistermaat, J. Non-integrability of the 1:1:2 resonance. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 4:553–568, 1984.

[Dui96] Duistermaat, J. *Fourier integral operators.* Birkhauser, 1996.

[Eck86] Eckhardt, B. Birkhoff-Gustavson normal forms in classical and quantum mechanics . *J. Phys. A*, 19:2961–2972 , 1986.

[Eck87] Eckhardt, B. Quantum mechanics of classically non-integrable systems. *Phys. Report*, 163: 205–297, 1987.

[Ein17] Einstein, A. Zum Quantensatz from Sommerfeld and Epstein. *Verh. Deutsch Phys. Ges.*, 19: 82–92, 1917.

[ERT84] Eskin,G., Ralston, J., and Trubowitz, E. On isospectral potentials in $\mathbb{R}^n$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37: 647–676, 1984.

[Fed83] Fedoriuk, M. *Asymptotic Analysis.* Springer, 1983.

[Fed99] Fedoriuk, M. *Partial Differential Equations V. Asymptotic Methods for Partial Differential Equations.* Springer, 1999.

[FG91] Françoise, J.-P. and Guillemin, V. On the Period Spectrum of a Symplectic Mapping. *Jour. of Funct. Anal.*, 100:317–358, 1991.

[FH65] Feynman, R. and Hibbs, A. *Quantum mechanics and path integrals.* McGraw-Hill (New-York), 1965.

[FKT91] Feldman, J., Knörrer, H., and Trubowitz, E. Perturbatively unstable eigenvalues of a periodic Schrödinger operator. *Comment. Math. Helv.*, 66:557–579, 1991.

[FLS65] Feynman, R., Leighton, R., and Sands, M. *The Feynman lectures on physics (vol 3:Quantum mechanics).* Addison-Wesley, 1965.

[Fol89] Folland, G. *Harmonic analysis in phase space.* Princeton, 1989.

[For87] Forman, R. Functional determinants and geometry. *Invent. Math.*, 88: 447–493, 1987.

[For92] Forman, R. Determinants, Finite-Difference Operators and Boundary Value Problems. *Commun. Math. Phys.*, 147: 485–526, 1992.

[GF63] Gelfand, I. and Fomin, S. *Calculus of variations.* Prentice Hall, 1963.

[God69] Godbillon, C. *Géométrie différentielle et mécanique analytique.* Hermann, Paris, 1969.

[GS64] Gelf'and, I. and Shilov, G. *Generalized Functions, vol. 1.* Academic Press, 1964.

[GS73] Guillemin, V. and Schaeffer, D. Remarks on a paper of D. Ludwig. *Bull. AMS*, 79: 382–385, 1973.

[GS76] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Geometric asymptotics*. AMS, 1976.

[GS77] Guillemin, V. and Schaeffer, D. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Math. J.*, 44:157–199, 1977.

[GS84] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Symplectic techniques in physics*. Cambrige University Press, 1984.

[GS94] Grigis, A. and Sjöstrand, J. *Microlocal Analysis for differential Operators: an Introduction*. London Math. Soc. Lecture Notes, 1994.

[GU81] Guillemin, V. and Uhlmann, G. Oscillatory integrals with singular symbols. *Duke Math. J.*, 48:251–267, 1981.

[GU89] Guillemin, V. and Uribe, A. Circular symmetry and the trace formula. *Invent. Math.*, 96: 385–423, 1989.

[Gui93] Guillemin, V. Wave-trace invariants and a theorem of Zelditch. *International Math. Res. Not.*, 12: 303–308, 1993.

[Gui96] Guillemin, V. Wave-trace invariants. *Duke Math. Jour.*, 83: 287–352, 1996.

[Gus66] Gustavson, F. On constructing Formal Integrals of a Hamiltonian System near an Equilibrium Point. *The Astronomical Journal*, 71:670–686, 1966.

[Gut71] Gutzwiller, M. Periodic orbits and classical quantization conditions. *J. of Math. Phys.*, 12:343–358, 1971.

[Gut89] Gutzwiller, M. The semi-classical quantization of chaotic Hamiltonian systems. *Ecole des Houches organisée par Giannoni et Voros*, 52: 201–249, 1989.

[Gut90] Gutzwiller, M. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer (New-York), 1990.

[GVZ91] Giannoni, M.-J., Voros, A., and Zinn-Justin, J. *Chaos and quantum physics (Ecole des Houches 1989)*. North-Holland, 1991.

[Hej76] Hejhal, D. The Selberg trace formula and the Riemann ζ function. *Duke Math. J.*, 43: 441–482, 1976.

[Hel88] Helffer, B. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*. Lecture notes in Math. 1336 (Springer), 1988.

[Hen85] Henniart, G. Les inégalités de Morse d'après Witten (Séminaire N. Bourbaki). *Astérisque*, 121-122:43–61, 1985.

[How80a] Howe, R. On the role of Heisenberg group in harmonic analysis. *Bull. AMS*, 3: 821–843, 1980.

[How80b] Howe, R. Quantum mechanics and PDE. *J. Func. Anal.*, 32: 188–254, 1980.

[Hör68] Hörmander, L. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121: 193–218, 1968.

[Hör71] Hörmander, L. Fourier integral operators I. *Acta Math.*, 127:79–183, 1971.

[Hör79] Hörmander, L. The Weyl calculus of pseudo-differential operators. *Comm. P. A. math.*, 32: 359–443, 1979.

[HR81] Helffer, B. and Robert, D. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 31:169–223, 1981.

[Hör85] Hörmander, L. *The analysis of partial differential operators (4 volumes)*. Springer, 1983-1985.

[HS84] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique I. *Comm. PDE*, 9: 337–408, 1984.

[HS85a] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique II. *Ann. IHP (Physique théorique)*, 42: 127–212, 1985.

[HS85b] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique III. *Math. Nachrichten*, 127: 263–313, 1985.

[HS85c] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique IV. *Comm. PDE*, 10: 245–340, 1985.

[HZ94] Hofer, H. and Zehnder, E. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhaeuser, 1994.

[Irw80] Irwin, M. *Smooth dynamical systems*. Academic Press, 1980.

[Joy96] Joyeux M. Classical dynamics of the 1 : 1, 1 : 2 and 1 : 3 resonance Hamiltonians. *J. Chem. Phys.*, 203:281–307, 1996.

[Kir74] Kirillov, A. *Eléments de la théorie des représentations*. Mir, 1974.

[Kna93] Knauf, A. On a ferromagnetic spin chain. *Commun. Math. Phys.*, 153: 77–115, 1993.

[Kna94] Knauf, A. On a ferromagnetic spin chain. II: Thermodynamic limit. *J. Math. Phys.*, 35:228–236, 1994.

[Kol54] Kolmogorov, A. Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique. *Proc. of the 1954 Intern. Congress of Math.,Amsterdam*, 1:315–33, 1954.

[Koz90] Kozlov, S. Asymptotics of Laplace-Dirichlet integrals. *Functional analysis and its applications*, 24: 115–125, 1990.

[Lau92] Laudenbach, F. *Cours Calcul différentiel*. Ecole Polytechnique Paris, 1992.

[Laz74] Lazutkin, V.F. Asymptotics of the eigenvalues of the Laplacian and quasimodes. A series of quasimodes corresponding to a system of caustics close to the boundary of the domain. *Math. USSR, Izv.*, 7:439–466, 1974.

[Laz93] Lazutkin, V. *KAM and Semi-classical approximation of eigenfunctions*. Springer, 1993.

[LL74] Landau, L. and Lifshitz, E. *Mécanique quantique non relativiste*. Mir(Moscou), 1974.

[LM88] Lochak, P. and Meunier, C. *Multiphase Averaging for Classical Systems*. Springer, 1988.

[LS77] Levit, S. and Smilansky, U. A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm type operators. *Proc. AMS.*, 65: 299–303, 1977.

[Mac63] Mackey, G. *The mathematical foundations of quantum mechanics*. Benjamin, 1963.

[Mas72] Maslov, V. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, 1972.

[Meh90] Mehta, M.L. *Random Matrices*. Academic press, 1990.

[Mei92] Meinrenken, E. Semi-classical principal symbols and Gutzwiller's trace formula. *Rep. Math. Phys.*, 31: 279–295, 1992.

[MF81] Maslov, V. and Fedoriuk, M. *Semi-classical approximation in quantum mechanics*. Reidel (Pays-Bas), 1981.

[Mil67] Milnor, J. *Morse theory*. Princeton, 1967.

[MM74] Markus,L. and Meyer, K.R. *Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic*. Number 144 in Memoirs of the AMS. AMS, 1974.

[MM82] Marvizi, S. and Melrose, R. Spectral invariants of convex planar regions. *J. Differ. Geom.*, 17:475–502, 1982.

[Mor34] Morse, M. *The calculus of variations in the large*. AMS Publ., 1934.

[Mos62] Moser, J. On invariant curves of area-preserving mappings of the annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1:1–20, 1962.

[Mos68] Moser, J. Lectures on Hamiltonian systems. *Memoirs of the AMS*, 81:1–60, 1968.

[Mos5] Moser, J. On the volume element on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120:286–294, 1965 .

[MS95] Mac-Duff, D. and Salamon, D. *Introduction to symplectic topology*. Oxford, 1995.

[MU79] Melrose, R. and Uhlmann, G. Lagrangian intersection and the Cauchy problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32:483–519, 1979.

[OPS88a] Osgood, B., Phillips, R., and Sarnak, P. Compact isospectral sets of surfaces. *J. Funct. Anal.*, 80: 212–234, 1988.

[OPS88b] Osgood, B., Phillips, R., and Sarnak, P. Extremals of determinants of Laplacians. *J. Funct. Anal.*, 80: 148–211, 1988.

[Ozo88] Ozorio de Almeida, A. *Hamiltonian systems, chaos and quantization*. Cambridge, 1988.

[Per90] Perelomov, A. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*. Birkhauser, 1990.

[Ral76] Ralston, J. On the construction of quasi-modes associated to stable periodic orbits. *Comm. Math. Phys.*, 51: 219–242, 1976.

[Ral77] Ralston, J. Approximate eigenfunctions of Laplace operator. *Journal diff. geom.*, 12: 87–100, 1977.

[Rob87] Robert, D. *Autour de l'approximation semi-classique*. Progress in Math. (Birkhäuser), 1987.

[Rob91] Robbins, J. M. Maslov indices in the Gutzwiller trace formula. *Nonlinearity*, 4:343–363, 1991.

[RS71] Ray, D.B. and Singer, I. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. *Advances Math.*, 7: 145–210, 1971.

[RS80] Reed, M. and Simon, B. *Methods of modern mathematical physics*. Academic press, 1980.

[San81] Sanders J. Second Quantization and averaging : Fermi resonance. *J. Chem. Phys.*, 74:5733–5736, 1981.

[Sar95] Sarnak, P. Arithmetic Quantum Chaos (Shur Lectures). *Israel math. conf. proc.*, 8: 183–236, 1995.

[Sel56] Selberg, A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc.*, 20: 47–87, 1956.

[Sim80] Simon, B. The classical limit of quantum partition functions. *Comm. Math. Phys.*, 71: 247–276, 1980.

[Sim83] Simon, B. Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I Non degenerate minimas: asymptotic expansions. *Ann IHP*, 38: 295–307, 1983.

[Sim84] Simon, B. Semi-classical analysis of low lying eigenvalues II Tunneling. *Ann. of Maths*, 120: 89–118, 1984.

[Sjö92] Sjöstrand, J. Semi-excited states in nondegenerate potential wells. *Asymptotic analysis*, 6:29–43, 1992.

[SM95] Siegel K. and Moser J. *Lectures on celestial mechanics.* Springer-Verlag, 1995.

[Sou69] Souriau, J.-M. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1969.

[Sto01] Stolovitch L. Un phénomène de type KAM, non symplectique, pour les champs de vecteurs holomorphes singuliers. *Comptes rendus Acad. Sciences Paris*, ?:?, 2001.

[Tay74] Taylor, M. *Pseudo-differential operators.* Springer-Verlag, 1974.

[Ter85] Terras, A. *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications.* Springer, 1985.

[Tre80] Treves, F. *Introduction to pseudo-differential operators and Fourier integral operators (2 volumes).* Plenum Press, 1980.

[Vai94] Vaisman, I. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds* . Birkhaüser, 1994.

[Ver83] Verhulst F. Asymptotic analysis in Hamiltonian systems. *Asymptotic Analysis II, Springer LNM*, 985:137–183, 1983.

[Vit92] Vitterbo, C. Une introduction à la topologie symplectique. *Gazette des mathématiciens (Soc. Math. Fr.)*, 54:81–96, 1992.

[Vor93] Voros A. Résurgence quantique. *Annales Institut Fourier*, 43:1509–1534, 1993.

[Vu 98] Vu Ngoc, S. *Sur le spectre des systèmes semi-classiques complètement intégrables avec singularités.* PhD thesis, Institut Fourier, Grenoble, 1998.

[Weh93] Wehlau, D. L. Constructive invariant theory for tori. *Ann. Inst. Fourier*, 43:1055–1066, 1993.

[Wei73a] Weinstein, A. Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems. *Ann. of Math.*, 98:377–410, 1973.

[Wei73b] Weinstein, A. Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems. *Invent. Math.*, 20:47–57, 1973.

[Wei74] Weinstein, A. Fourier integral operators, quantization, and the spectra of Riemannian manifolds. *Geom. sympl. Phys. math., Colloq. int. Aix-en-Provence*, 1:289–298, 1974.

[Wei77] Weinstein, A. *Lectures on symplectic manifolds.* AMS, 1977.

[Wei82] Weinstein, A. What is microlocal analysis ? *Math. Intelligencer*, 4:90–92, 1982.

[Wei83] Weinstein, A. The local structure of Poisson manifolds. *J. diff. geometry*, 18:523–557, 1983.

[Wit82] Witten, E. Supersymmetry and Morse theory. *J. diff. geometry*, 17: 661–692, 1982.

[Zel87] Zelditch, S. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55:919–941, 1987.

[Zel97] Zelditch, S. Wave trace invariants at elliptic closed geodesics. *GAFA*, 7:145–213, 1997.

[Zel98] Zelditch, S. Wave invariants for non-degenerate closed geodesics. *GAFA*, 8:179–207, 1998.

CHAPITRE 1

GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET MÉCANIQUE HAMILTONIENNE

1. Introduction

Géométrie symplectique est le nom moderne de ce qu'on appelait *formalisme hamiltonien de la mécanique classique*.

Si on s'intéresse aux trajectoires d'une particule de masse m dans un champ de force

$$F = -\mathrm{grad} V \ ,$$

dans $\mathbb{R}^n$ qui dérive du potentiel V, on a les équations de Newton :

$$m\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \ .$$

Introduisant les impulsions $\xi_j = m\frac{dx_j}{dt}$ et l'énergie $H = \frac{\xi^2}{2m} + V(x)$, on peut réécrire ce système de n équations différentielles du second ordre comme un système de $2n$ équations du premier ordre :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \ \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \ .$$

Ces équations ressemblent à celles d'un champ de gradient sur $\mathbb{R}^{2n}$, il s'agit bien d'un gradient, mais par rapport à la forme antisymétrique $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$; si $\mathcal{X}$ est le champ de vecteurs considéré sur $\mathbb{R}^{2n}$, on a :

$$\iota(\mathcal{X})\omega = -dH \ .$$

On en déduit immédiatement la conservation de l'énergie et de ω (théorème de Liouville). De plus, la dynamique est entièrement déterminée par la donnée du triplet $(\mathbb{R}^{2n}, \omega, H)$. Le couple $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ s'appelle *espace des phases*.

L'intérêt est d'avoir géométrisé les équations du mouvement et de pouvoir faire des changements de coordonnées comme on peut en faire en géométrie riemannienne. Un autre intérêt de ce formalisme est qu'il donne un acccès à la mécanique quantique : on verra comment fabriquer l'équation de Schrödinger $\hat{H}$ correspondant à H. Grosso-modo, $\hat{H}$ est l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenu en remplaçant, dans $H(x,\xi)$, x_j par l'opérateur de multiplication par x_j et ξ_j par

$$\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \ .$$

La non commutation de ces 2 opérateurs pose quelques problèmes que l'on traitera plus bas (quantification de Weyl) en abandonnant l'idée qu'à une mécanique classique correspond une unique mécanique quantique ; c'est plutôt le contraire, la mécanique classique est déterminée comme limite quand $h \to 0$ de la mécanique quantique (limite appelée *semi-classique*).

Le but de ce chapitre est de présenter les fondements de la géométrie symplectique, et plus particulièrement les objets utiles du point de vue semi-classique.

L'accent sera mis en particulier sur les variétés lagrangiennes et leurs fonctions génératrices. On montrera par exemple comment obtenir à partir de l'espace des chemins ou des chemins brisés des fonctions génératrices naturelles pour les flots hamiltoniens. La relation entre indices de Morse et de Maslov résultera de cette présentation.

On développera quelques exemples : l'exemple canonique $T^\star X$ (espace cotangent d'une variété X), le projectif complexe et ses sous-variétés algébriques, les espaces d'orbites (application de Poincaré, méthode de moyennisation, réduction). On montrera en particulier que l'équation de Schrödinger peut être vue comme un système hamiltonien : cela introduit de façon naturelle les relations entre les commutateurs d'opérateurs auto-adjoints et les crochets de Poisson. Cela permet aussi d'introduire naturellement l'équation de Lax qui conduit à des déformations isospectrales.

On développera aussi un peu la géométrie des trajectoires périodiques qui sont l'analogue classique des fonctions propres de l'équation de Schrödinger.

Les références principales sont Duistermaat [**Dui96**], Arnold [**Arn78**], Weinstein [**Wei77**]. Pour les formules de géométrie différentielle, consulter par exemple [**God69**].

Les démonstrations bien localisées dans la littérature ne seront pas toutes données.

2. Algèbre linéaire symplectique

Pour toute cette section, une bonne référence est [**Wei77**].

2.1. Algèbre linéaire symplectique.

LEMME 1. *Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps de caractéristique différente de 2. Il existe une base de E, $(e_1, f_1, \cdots, e_n, f_n, g_1, \cdots, g_k)$, telle que $\omega = \sum_{i=1}^n f_i^\star \wedge e_i^\star$ où $e_i^\star, \cdots$ est la base duale de la précédente.*

Preuve.–

Si $\omega \neq 0$, il existe un couple (e_1, f_1) tel que $\omega(e_1, f_1) = 1$; on itère ce raisonnement en prenant l'ω-orthogonal de l'espace engendré par e_1, f_1. Cela prouve le lemme.

□

DÉFINITION 1. *La forme ω est dite non-dégénérée si l'application*

$$x \to L_x$$

de E dans son dual $E^\star$ définie par

$$L_x(v) = \omega(x, v)$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE 1. *Si ω est non dégénérée, la dimension de E est paire et $k = 0$.*

Si ω est une forme bilinéaire antisymétrique sur E, le noyau de ω sera noté $\ker \omega$.

L'orthogonal de $\ker \omega$ dans $E^\star$ est le dual de $E/\ker \omega$ sur lequel ω est non dégénérée. Donc $(\ker \omega)^o$ est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée.

DÉFINITION 2. *Un espace vectoriel symplectique est la donnée d'un couple (E, ω) où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et ω une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur E.*

3 exemples importants :

A) Si F est un espace vectoriel réel de dimension n et $F^\star$ son dual, alors la somme directe $E = F \oplus F^\star$ est munie de façon canonique d'une structure symplectique :

$$\omega((x, \xi), (x', \xi')) = \xi(x') - \xi'(x) \ .$$

Si on introduit une base $\frac{\partial}{\partial x_j}$ de F et la base duale $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ de $F^\star$, on a l'expression :

$$\omega_0 = \sum d\xi_j \wedge dx_j \ ,$$

appelée forme canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$.

B) Si $(\mathcal{H}, (.|.))$ est un espace hilbertien de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (espace hermitien), $\omega = \Im(.|.)$ est une forme symplectique sur $\mathcal{H}$.

C) Si (E, ω) est symplectique, son dual $E^\star$ est muni canoniquement d'une structure symplectique transportée de ω par un des 2 isomorphismes linéaires associés à ω :

$$x \to (u \to \pm\omega(x, u)) \ .$$

En fait tous les exemples sont isomorphes (à dimension fixée) :

THÉORÈME 1. *Tout espace symplectique (E, ω) est de dimension paire $2n$ et isomorphe à la paire $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

PREUVE. C'est une conséquence du lemme 1 puisque ici on a $k = 0$. □

On peut donner une autre preuve qui consiste à classer à isomorphisme près les paires (q, ω) d'une structure euclidienne et d'une structure symplectique : on suppose que E est muni d'une structure euclidienne donnée par une forme quadratique $q(x) =< x|x >$, alors, à ω, est associé un endomorphisme antisymétrique A de E: $\omega(x, y) =< Ax|y >$. Il est clair que iA est autoadjointe et les valeurs propres de A sont donc de la forme $\pm i\lambda_j$ avec $\lambda_j > 0$ (car A est non singulière). Soit $E = \oplus E_j$ une décomposition orthogonale de E en espaces de dimension 2 dont les complexifiés sont engendrés par 2 vecteurs propres conjugués. Les E_j sont également ω-orthogonaux. On en déduit l'existence de coordonnées orthonormales (x_j, ξ_j) telles que $\omega = \sum \sqrt{\lambda_j} d\xi_j \wedge dx_j$. On peut facilement en déduire de coordonnées (x_j, ξ_j) telles que $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$, et $q(x, \xi) = \sum_j \omega_j (x_j^2 + \xi_j^2)$ $(\omega_j > 0)$. Les ω_j sont les invariants du couple (q, ω).

Un espace symplectique est muni d'une *forme volume canonique* : $\Omega = \frac{1}{n!} \wedge^n \omega$ et donc d'une orientation et d'une mesure de Lebesgue.

Remarque : utilisant la réduction euclidienne précédente, si on calcule $\wedge^n \omega$, on trouve une forme volume que l'on peut comparer à $dx_1 \wedge ... \wedge d\xi_n$: le coefficient obtenu est une racine carrée de $\det(A)$, c'est le *pfaffien* de A.

Si F est un sous-espace de dimension k de E, on note F^o l'ω-orthogonal de F sous-espace de E; F^o est de dimension $2n - k$.

DÉFINITION 3. *Un sous-espace F de (E,ω) est dit* symplectique *si* $F\cap F^o=0$, isotrope *si* $F\subset F^o$, coisotrope *si* $F^o\subset F$, lagrangien *si* $F=F^o$.

Un sous-espace de dimension 1 est isotrope, un hyperplan est co-isotrope.

THÉORÈME 2. *Tout espace isotrope est contenu dans un espace isotrope maximal qui est lagrangien ; un lagrangien a toujours un lagrangien supplémentaire. Une décomposition $E=F_1\oplus F_2$ où les F_i sont lagrangiens, permet d'identifier F_2 au dual de F_1 et la forme ω se déduit de cette dualité.*

PREUVE. Soit L un espace isotrope maximal et $v\in L^o\setminus L$, alors on vérifie que $L\oplus\mathbb{R}v$ est encore isotrope. On peut par le même argument construire un supplémentaire lagrangien à tout lagrangien.

Si F est isotrope et L lagrangien tel que $F\cap L=0$, il existe $v\in F^o\setminus F$ tel que $(F+v)\cap L=\emptyset$. Sinon, $F^o\subset F+L$ et donc $F^o\cap L\subset F$, ce qui n'est pas possible pour des raisons de dimension si F n'est pas lagrangien.

On verra plus loin (2.3) que les lagrangiens transversaux à un lagrangien donné forment un ouvert dense de la variété de tous les lagrangiens. □

2.2. Structure de Poisson linéaire.

DÉFINITION 4. *$(E,\{\ \})$ est un espace vectoriel de Poisson si $\{\ \}$ est une forme bilinéaire antisymétrique sur $E^\star$.*

Le sous espace $(\ker\{\ \})^o$ de E est canoniquement un espace symplectique.

2.3. La grassmannienne lagrangienne.

DÉFINITION 5. *La grassmanienne lagrangienne de l'espace symplectique E 'est l'ensemble $\Lambda(E)$ des sous-espaces lagrangiens de E.*

PROPOSITION 1. *$\Lambda(E)$ est une variété connexe compacte de dimension $n(n+1)/2$. Chaque décomposition de E comme somme de 2 lagrangiens transverses $E=F\oplus F^\star$ donne lieu à un homéomorphisme entre l'ouvert des lagrangiens transverses à $F^\star$ et l'espace des formes quadratiques sur F. Un espace de dimension n transverse à $F^\star$ est le graphe d'une application linéaire de F dans $F^\star$ et la condition d'être lagrangien équivaut à la symétrie de cette application linéaire.*

PROPOSITION 2. *L'espace tangent $T_L(\Lambda)$ s'identifie canoniquement à l'espace des formes quadratiques sur L.*

Preuve.–

Soient en effet 2 décompositions lagrangiennes

$$E=L\oplus L_1=L\oplus L_2$$

et L' proche de L ; on peut écrire L' comme le graphe d'applications linéaires symétriques $A_i:L\to L_i$ associées à des formes quadratiques sur L

$$Q_i(x)=\frac{1}{2}\omega(A_ix,x)\ .$$

Soit ϵ la distance (pour une métrique riemannienne quelconque) entre L et L' ; montrons que

$$|Q_1(x)-Q_2(x)|\le C\epsilon^2\|x\|^2\ .$$

Cela résulte de l'écriture suivante

$$Q_i(x) = \int_{T_i} \omega$$

où T_i est le triangle $O, x + A_i x, x$.

Maintenant la différence des 2 intégrales satisfait visiblement l'inégalité cherchée. En effet, par Stokes, l'intégrale de ω sur le bord du tétraèdre de sommets $(0, x, x+A_1x, x+A_2x)$ est nulle. Comme $0, x + A_1x, x + A_2x$ sont dans un même lagrangien, l'intégrale de ω sur ce triangle est nulle. Si Δ est le triangle de sommets $(x, x + A_1x, x + A_2x)$, on a ainsi

$$Q_1(x) - Q_2(x) = \int_\Delta \omega$$

et cette intégrale est $O(\varepsilon^2)$.

□

Proposition 3. *Si L_t est un chemin dans la grassmannienne lagrangienne, on notera dL_t/dt le vecteur vitesse de L_t vu comme forme quadratique sur L_t. Si $V(t) \in L_t$, on a l'expression utile suivante :*

$$(dL_t/dt)(V(t_0)) = \omega(V'(t_0), V(t_0)) \ .$$

Preuve.–

On déduit facilement de $\omega(V(t), W(t)) = 0$ que l'expression précédente ne dépend pas du chemin $V(t)$, mais seulement de $V(t_0)$. On se ramène ainsi à $V(t) = V(t_0) + A_t(V_0)$.

□

2.4. La stratification naturelle de $\Lambda(F \oplus F^\star)$.

Proposition 4. *Soit $W_l \subset \Lambda(F \oplus F^\star)$ l'ensemble des lagrangiens L tels que*

$$\dim(L \cap F) = l \ .$$

Alors W_l est une sous-variété de codimension

$$\frac{l(l+1)}{2}$$

de $\Lambda(F \oplus F^\star)$.

Preuve.–

Soit $L_o \in W_l$, On peut toujours supposer que $F^\star$ est transversal à L_o. Soit $G = L_o \cap F$ supposé de dimension l. L_o est le graphe d'une application linéaire A de F dans $F^\star$ de rang $n - l$ dont la matrice est, dans une base adaptée :

$$A_o = \begin{pmatrix} B_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si L est proche de L_o, c'est le graphe de A dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & D \end{pmatrix}$$

Pour L proche de L_o, B est inversible, et donc A est de rang $n - l$ si et seulement si le noyau de A s'identifie aux (x, y) tels que

$Bx + Cy = 0$; donc $x = -B^{-1}CY$ implique ${}^tCx + Dy = 0$. Donc cela équivaut à :

$$D = -{}^tCB^{-1}C \ .$$

C'est une équation locale de W_l.

L'espace tangent en L_0 s'identifie à $D = 0$.

□

On voit dans la preuve précédente que l'espace tangent en L_o à W_l s'identifie à $D = 0$; donc, si $L \cap F = G$, l'espace tangent en L à W_l est formé des formes quadratiques sur L dont la restriction à G est nulle. On voit en particulier que W_1 est transversalement orienté par la condition $q(Z \setminus 0) > 0$ (Z est alors de dimension 1).

2.5. Espaces lagrangiens et formes quadratiques avec domaine. Soit $Q = (q, G)$ où G est un sous-espace de F et q une forme quadratique sur G. A une telle donnée Q (forme quadratique non partout définie), on associe naturellement un espace lagrangien L_Q de $E = F \oplus F^\star$: si q définit une application linéaire symétrique A de G dans G', on définit

$$L_Q = \{(x, \xi) | x \in G, \xi_{|G} = Ax\} \ .$$

On vérifie que cette application est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques avec domaine sur la grassmannienne lagrangienne. Bien sûr, cela définit une stratification de cette variété dont les strates sont les formes quadratiques dont le domaine a la même dimension. Cette stratification est isomorphe à celle décrite en 2.4. On passe de l'une à l'autre par permutation de F et $F^\star$.

2.6. Réduction. Si W est coisotrope, $E_W = W/W^o$ est symplectique. Si F est un lagrangien de E, $R_W(F) = (F \cap W)/F \cap W^o$ est un lagrangien de E_W. On peut vérifier ce dernier point directement (voir [**MS95**] page 39)) en montrant que

$$((F \cap W) + W^o)^o = (F \cap W) + W^o \ ,$$

ou le faire par récurrence en supposant d'abord W de codimension 1. Le réduit de F est isotrope et sa dimension est $\dim(F) - 1$; la chute de dimension étant soit lors de l'intersection avec F, soit lors du passage au quotient.

Attention : l'application $L \to R_W(L)$ n'est pas continue ; elle l'est sur les strates $\dim(L \cap W) = cte$.

2.7. Réponse d'un réseau électrique. Un exemple intéressant est la réponse d'un *réseau résistif linéaire* :

Un réseau électrique (Γ, ρ) est la donnée

1) d'un graphe fini $\Gamma = (V, V_o, A)$, *le réseau*, dont V est l'ensemble des sommets, $V_o \subset V$ l'ensemble des sommets *terminaux* ou *bornes* et A l'ensemble des arêtes. Γ n'est pas orienté. N désignera le cardinal de V_o et on supposera que l'on a indexé les sommets de V_o par les entiers de 1 à N.

2) d'une famille de *conductances* (en électricité les conductances sont les inverses des résistances) $\rho = (\rho_{i,j}) \in]0, +\infty[^A$. On a toujours $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$.

On note

$P = \mathbb{R}^V$, resp $P = \mathbb{R}^{V_o}$, les espaces de potentiels, I, resp I_o, leurs duaux (espaces de courants) ainsi que $E = P \oplus I$, resp $E_o = P_o \oplus I_o$ les espaces symplectiques associés.

On associe à ρ la forme quadratique *énergie électrique*

$$q_\rho(x) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in A} \rho_{i,j}(x_i - x_j)^2$$

sur $\mathbb{R}^V$. On introduit aussi le sous-espace lagrangien R de E associé à q_ρ.

Un réseau électrique (Γ, ρ) étant donné, on considère l'application linéaire (*réponse du réseau*)

$$L = L_{\Gamma,\rho} : \mathbb{R}^{V_o} \to \mathbb{R}^{V_o}$$

qui, à tout potentiel électrique $x = (x_i)$ donné sur les bornes, associe le courant électrique $I = (I_i)$ sortant par les bornes lorsque le régime stationnaire est établi dans le circuit.

Alors le graphe de L_ρ contenu dans E_o est la variété lagrangienne obtenue par réduction de R par rapport au sous-espace co-isotrope obtenu en écrivant la loi de Kirchoff aux sommets intérieurs.

En particulier, on voit comment étendre la notion de réponse d'un réseau électrique au cas où les conductances sont des réels arbitraires.

2.8. Structures symplectiques et structures hermitiennes. Soit E un espace vectoriel complexe munie d'une strcuture hermitienne $(u|v)$ (linéaire en u, antilinéaire en v). On décompose

$$(u|v) =< u|v > +i\omega(u, v)$$

$< u|v >$ (resp. $\omega(u, v)$) est une structure euclidienne (resp. symplectique) sur E vu comme espace vectoriel réel. On a, si $J : E \to E$ est la multiplication par i :

$$\omega(Ju, v) =< u|v >,\ \omega(u, v) =< -Ju|v >,\ \omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$$

Donc $-J$ est la matrice de la forme ω, J préserve la strucrure symplectique. De plus si A est unitaire, A préserve $(.|.)$ et donc ω.

Définition 6. *Soit J une structure complexe sur un espace vectoriel symplectique (E, ω), on dit que J est compatible avec ω si J préserve ω et si $\omega(Ju, v)$ est définie positive.*

Dans ce cas, $(u|v) = \omega(Ju, v) + i\omega(u, v)$ est un produit hermitien sur E muni de la structure complexe définie par J.

On peut caractériser alors ainsi les espaces lagrangiens :

Proposition 5. *Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E pour la structure hermitienne, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les e_j est lagrangien.*

Réciproquement, si $(e_1, \cdots e_n)$ est une $\mathbb{R}$-base orthonormée de L lagrangien pour le produit $< .|. >$, c'est aussi une base orthonormée de E pour la structure hermitienne.

Certains auteurs emploient ainsi le terme *totalement réel* pour désigner les espaces lagrangiens. On déduit de ce qui précède que le groupe unitaire $U(n)$ opère transitivement sur la grassmanienne lagrangienne.

De la proposition 5, on déduit que $U(n)$, le groupe unitaire opère transitivement sur $\Lambda(n)$ qui s'identifie donc au quotient $U(n)/O(n)$.

2.9. Indice de Maslov et π_1 de la grassmanienne lagrangienne.

2.9.1. *L'application det^2.* Soit $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus 0$, si $L = U(L_0)$ avec $U \in U(n)$, U est bien définie modulo multiplication à droite par un élément de $O(n)$ de déterminant ± 1. On définit ainsi une application $det^2 : \Lambda(n) \to S^1$ par

$$det^2(U(L_0)) = \text{determinant}(U)^2 \ .$$

DÉFINITION 7. *L'indice de Maslov $m(\gamma)$ de $\gamma : S^1 \to \Lambda(n)$ est le degré de $det^2 \circ \gamma$.*

On vérifie que $m(\gamma)$ est invariant par déformation de γ, ne dépend pas de L_0, ni même de l'isomorphisme de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ avec (E, ω) (connexité du groupe symplectique). L'application m induit pour chaque $L_1 \in \Lambda(n)$ un homomorphisme de $\pi_1(\Lambda(n), L_1)$ dans $\mathbb{Z}$. Cet homomorphisme est surjectif comme on le voit avec le lacet $L_t = U_t(L_0)$ avec $U_t = \text{diag}(e^{it}, 1, \cdots, 1)$ pour $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

2.9.2. *L'intersection avec le cycle singulier.* Comme la codimension des W_j pour $j \geq 2$ est supérieure à 3, le π_1 de $\Lambda(n)$ est égal au π_1 de $\Lambda(n) \setminus (\cup_{j=2}^n W_j)$.

Montrons que W_1 est une hypersurface co-orientée de $\Lambda(n)$: soit $D = L_0 \cap L_1$ qui est de dimension 1. Si $L_1 \in W_1$, $T_{L_1}(\Lambda(n)) = Q(L_1)$ et $T_{L_1}W_1 = \{q \in Q(L_1) \mid q(D) = 0\}$. L'espace normal en L_1 à W_1 s'identifie donc à l'espace de dimension 1 $Q(D)$ qui est orienté par le choix des formes quadratiques positives.

Soit L_t un chemin différentiable d'espaces lagrangiens. La vitesse en L_1 s'identifie à une forme quadratique $\dot{L}$ sur L_1. Soit l la restriction de $\dot{L}$ à D. Alors

PROPOSITION 6. *L_t est transverse à W_1 si et seulement si l est non dégénérée.*

DÉFINITION 8. *On co-oriente W_1 en disant que L_t le traverse positivement si l est* définie positive.

THÉORÈME 3. *L'application qui, à un lacet γ, associe le nombre d'intersection $\gamma.W_1$ de γ avec W_1 induit un isomorphisme de $\pi_1(\Lambda(n))$ sur $\mathbb{Z}$. On a :*

$$\gamma.W_1 = m(\gamma)$$

Le théorème précédent vient d'un résultat de nature plus générale :

LEMME 2. *Si $Z \subset X$ est une hypersurface connexe co-orientée dont le complémentaire est simplement connexe, le π_1 de X est $\mathbb{Z}$, un isomorphisme étant donnée par le nombre d'intersection avec Z.*

Preuve.–

On doit prouver que le nombre d'intersection est bien défini. Il s'agit d'un résultat classique de topologie différentielle : si 2 lacets C^1 sont transverses à Z et homotopes, leur nombre algébrique d'intersection avec Z est bien défini. On peut par exemple utiliser que Z admet un voisinage difféomorphe à $Z \times [-1, +1]$ où Z s'identifie à $Z \times \{0\}$ et tel que les 2 lacets traversent ce voisinage un nombre fini de fois avec monotonie de la coordonnée transverse. On introduit alors la 1-forme fermée α à support dans ce voisinage définie par $\alpha = f'(t)dt$ avec $f = 0$ au voisinage de -1 et $f = 1$ au voisinage de $+1$. $\gamma.Z$ est alors égal à $\int_\gamma \alpha$ qui est invariant par homotopie. La classe de cohomologie de de Rham de α est duale de la classe d'homologie cherchée.

□

Il faut montrer que W_1 est connexe : on commence par montrer que le groupe des transformations linéaires symplectiques qui préserve un lagrangien donné F est connexe et transitif sur les droites de F. Ensuite les lagrangiens L tels que $L \cap F = D$ s'identifient aux lagrangiens de D^o/D transverses à F/D qui est un espace contractible.

2.10. La grassmannienne lagrangienne en dimension 2. $\Lambda(1)$ est la droite projective réelle. Etudions $\Lambda(2)$. L'application det^2 définit une fibration de $\Lambda(2)$ sur S_1. La fibre est $SU(2)/SO(2)$ et comme tous les tores maximaux S^1 de $SU(2)$ sont conjugués, on voit que c'est S^2 (fibration de Hopf). L'identification des fibres voisines peut se faire par l'action de $U_t = \mathrm{diag}(e^{it}, e^{it})$ avec $t \in [0, \pi/2]$. On voit ainsi que la fibre au-dessus de $\pi/2$ est transformée par la multiplication par i qui transforme chaque lagrangien en son orthogonal euclidien. Soit σ cette involution de S^2. Elle est sans point fixe et le quotient est donc une surface qui ne peut être que $P^2(\mathbb{R})$ (caractéristique d'Euler = 1). Donc σ est l'antipodie et le fibré n'est pas trivial. On voit ainsi que $\Lambda(2)$ n'est pas orientable.

2.11. La dimension infinie. Il est parfois utile de considérer des espaces symplectiques de dimension infinie. On considère un couple (E, ω) où E est un Banach et ω est non dégénérée au sens suivant : elle définit un homéomorphisme de E sur son dual topologique.

Les exemples sont les espaces de Hilbert munis de la partie imaginaire du produit hermitien, et les modèles canoiques $F \oplus F^\star$ où le Banach $F^\star$ est le dual topologique de F.

Si $F = F^\star$ (espace hilbertien réel), un opérateur (A, D) non borné de F dans F est *symétrique* ssi son graphe est isotrope et auto-adjoint ssi son graphe est lagrangien (le théorème 2 s'applique encore). Pour les définitions de *symétrique* et *auto-adjoint*, voir [**RS80**] et 2.

Un exemple plus concret est l'espace des fonctions $H^{1/2}$ de période 1 et de moyenne nulle de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ muni de $\omega(f,g) = \int_0^1 fg'$. Cette structure joue un rôle dans l'interprétation de KdV comme système hamiltonien.

2.12. Applications linéaires symplectiques. Si (E, ω) est un espace vectoriel symplectique et A un endomorphisme de E, on dit que A est symplectique si $A^\star\omega = \omega$. Un tel endomorphisme est évidemment inversible et même de déterminant 1.

Si $K : E \to E^\star$ est l'application antisymétrique associée à ω, i.e. $\omega(u,v) = Ku(v)$, on a

$$^tAKA = K$$

qui montre que A est conjuguée à l'inverse de ^tA. Donc, si λ est valeur propre de A, $1/\lambda$ aussi et les blocs de Jordan sont isomorphes.

En fait, si E_λ est l'espace propre généralisé associé à λ, E_λ et E_μ sont $\omega-$orthogonaux sauf si $\lambda\mu = 1$. Donc on note F_λ la somme de E_λ, de $E_{1/\lambda}$ et de leurs complexes conjugués, on a une décomposition $\omega-$ orthogonale de E en les sous-espaces symplectiques F_λ. Parmi ceux-ci il y a E_1 et E_{-1} si 1 ou -1 est valeur propre.

Il est aisé de montrer que, si $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$, alors $(\lambda\mu - 1)\omega(x,y) = 0$, et on raisonne par récurrence pour les vecteurs propres généralisés.

Dans le cas semi-simple, E se décompose somme

- de sous-espaces symplectiques $E_{\pm 1}$,
- de sous-espaces symplectiques de dimension 2 (dits elliptiques) correspondant aux valeurs propres de module 1 ($\neq \pm 1$) regroupées avec leurs inverses=conjuguées,
- de sous-espaces symplectiques de dimension 2 (dits hyperboliques réels) correspondant aux valeurs propres réelles ($\neq \pm 1$) regroupées avec leurs inverses,
- de sous-espaces symplectiques de dimension 4 (dits loxodromiques) correspondant aux valeurs propres non réeelles de module $\neq 1$ regroupées avec leurs inverses et leurs conjuguées.

DÉFINITION 9. *A sera dite*

Hyperbolique *si aucune valeur propre n'est de module 1,*

Elliptique *si elle est semi-simple et les valeurs propres sont de module 1 et non égales à* ± 1,

Elliptique générique *si les valeurs propres sont de la forme* $e^{\pm i\alpha_k}, k = 1, \cdots, n$ *où les* α_k *et* 2π *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Z}$.

Dans le cas hyperbolique, on a une décomposition *lagrangienne*

$$E = E_+ \oplus E_-$$

où $E_\pm$ sont les sommes d'espaces propres généralisés associées respectivement aux valeurs propres de module > 1 ou < 1. E_+ s'appelle l'espace *instable* et E_- l'espace *stable.*

Le fait que les sous-espaces $E_\pm$ soient isotropes résulte du fait que, si $x \in E_\pm$, $A^l x \to 0$ lorsque $l \to \pm\infty$.

On alors 2 isotropes supplémentaires ; ils sont automatiquement lagrangiens.

Il peut être instructif de décrire toutes les classes de conjugaison (mêmes non semi-simples) pour des espaces symplectiques de dimension 2 et 4. A ce sujet, il faut remarquer que les formes de Jordan pour un bloc de dimension 2, de type E_1 par exemple, donnent 2 classes de conjugaison distinctes suivant le signe du terme non diagonal.

2.13. Le groupe symplectique et son algèbre de Lie. On peut identifier l'algèbre de Lie $Sp(E, \omega)$ du groupe $\mathrm{Sp}(E, \omega)$ à l'espace des formes quadratiques sur E de deux façons qui coïncident (exercice) :

1) Si e^{tA} est un groupe à un paramètre de $\mathrm{Sp}(E, \omega)$, on vérifie que

$$\omega(x, Ay) = \omega(y, Ax)$$

et réciproquement, si A vérifie la relation précédente e^{tA} est contenu dans $\mathrm{Sp}(E, \omega)$. Si on introduit la forme quadratique $q(x) = \frac{1}{2}\omega(x, Ax)$ associé à la forme bilinéaire symmétrique $\omega(x, Ay)$, on voit que $\iota(Ax)\omega(.) = -dq(x)(.)$, autrement dit le champ Ax est le champ hamiltonien engendré par la fonction $q(x)$.

A une forme quadratique $q(z)$, on associe son gradient symplectique $\mathcal{X}_q$ caractérisé par $\iota(\mathcal{X}_q)\omega = -dq$. Alors le flot de $\mathcal{X}_q$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{Sp}(E, \omega)$. Que la réciproque soit vraie vient de la formule de Cartan : si le flot de $\mathcal{X}$ préserve ω, on voit que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\mathcal{X}\omega$ est nulle et donc $\iota(\mathcal{X})\omega$ est la différentielle d'une forme quadratique.

2) Soit $Z = E \oplus E$ muni de la forme $\Omega = p_2^\star(\omega) - p_1^\star(\omega)$, c'est un espace symplectique et le graphe d'une application linéaire A de E dans E est lagrangien si et seulement si et seulement si A est symplectique. Donc l'algèbre de Lie de

$Sp(E,\omega)$ s'identifie aux formes quadratiques sur la diagonale de Z et donc aux formes quadratiques sur E.

2.14. Non-pincement affine. Une application symplectique préserve le volume, mais il y a un phénomène purement 2-dimensionnel qui a été montré par Gromov ; donnons-en une version affine (voir [**MS95**]) :

PROPOSITION 7. *Soit ψ une application affine symplectique de $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ dans lui-même qui envoie la boule unité dans un cylindre $x_1^2+\xi_1^2 \leq R^2$, alors $R \geq 1$.*

PREUVE. Soit $\psi(z)=\Psi z+z_0$, où Ψ est linéaire et $z_0=(a_1,b_1,\cdots)$. Soit u,v les 2 premières lignes deΨ, on a, pour $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\psi(z)=(x_1,\xi_1,x',\xi')$ où

$$x_1^2+\xi_1^2=(u(z)+a_1)^2+(v(z)+b_1)^2 \ .$$

Comme Ψ est symplectique, sa transposée l'est aussi et donc $\omega(u,v)=1$ et donc $\|u\|$ ou $\|v\|$ est ≥ 1. Supposons $\|u\| \geq 1$, on aura

$$\sup_{\|z\|\leq 1} (u(z)+a_1)^2 \geq 1$$

et donc $R \geq 1$. □

3. Variétés symplectiques

3.1. Définition.

DÉFINITION 10. *Une variété symplectique est la donnée d'une variété C^∞ Z et d'une 2-forme différentielle ω fermée, i.e. $d\omega=0$, et non dégénérée.*

Donc chaque espace tangent est muni d'une structure symplectique et ces formes vérifient une condition de cohérence locale : la structure symplectique permet d'attribuer une *aire algébrique* à toute surface orientée de dimension 2 de façon que le bord d'un domaine de dimension 3 soit d'aire nulle.

La donnée de ω munit Z d'une forme volume $\frac{1}{n!}\wedge^n \omega$ non dégénérée et d'une orientation, donc d'une mesure appelée *mesure de Liouville*.

3.2. Exemples.

3.2.1. *Cotangents.* Soit X une variété de dimension n ; un élément du fibré cotangent $T^\star X$ est une forme linéaire sur un des espaces tangents T_xX. On munit $T^\star X$ d'une structure de variété au moyen des cartes dites *canoniques* : une carte canonique est associée à une carte de X. Si $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte de X, on définit la carte canonique associée $\Phi : T^\star U \to V \times \mathbb{R}^n$ de la façon suivante : un vecteur cotangent au point x de coordonnées locales $(x_1,\cdots,x_n)$ est de la forme $\sum \xi_j dx_j$, on prend comme coordonnées locales canoniques $(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)$. Les changements de cartes s'explicitent facilement ; si $y=f(x)$ est le changement de coordonnées dans X, on a $f^\star(\sum \xi_j dx_j)=\sum \eta_j dy_j$ avec $\eta_j=\sum \xi_j \frac{\partial x_j}{\partial y_j}$.

Le cotangent d'une variété est muni d'une 2-forme canonique qui, en coordonnées locales canoniques (x_j,ξ_j), vaut $\sum d\xi_j \wedge dx_j$. On peut définir cette forme de façon plus intrinsèque par $\omega=d\alpha$, où α, la *1-forme de Liouville*, est définie géométriquement par $\alpha_z(V)=z(\pi'(V))$, où z est un point du cotangent, π la projection canonique de $T^\star(X)$ sur X, π' sa dérivée. En coordonnées locales canoniques, $\alpha=\sum \xi_i dx_i$.

Pour résumer, le fibré cotangent $T^\star X$ d'une variété X est muni automatiquement d'une structure symplectique ω dont l'expression dans les cartes canoniques est $\omega=\sum_i d\xi_i \wedge dx_i$.

3.2.2. *Le théorème de Darboux.* Le théorème de Darboux assure que toute variété symplectique est localement difféomorphe à ce modèle. En géométrie symplectique, il n'y a pas d'analogue de la courbure en géométrie riemannienne, la géométrie symplectique est une géométrie "globale".

THÉORÈME 4. *Soient ω_0 et ω_1 2 germes de structures symplectiques à l'origine O de E qui coïncident en O. Alors il existe un germe de difféomorphisme φ tel que*

$$\varphi^\star \omega_1 = \omega_0 \ .$$

PREUVE. Une preuve utilise la méthode du *chemin* de Moser. On cherche une famille de germes de difféomorphismes φ_t tels que $\varphi_t^\star \omega_t = \omega_0$ où $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. On cherche $X_t(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)$; il doit satisfaire :

$$\varphi_t^\star(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t) = 0 \ .$$

Par la formule de Cartan, il suffit d'avoir :

$$\iota(X_t)\omega_t + \alpha_t = 0 \ ,$$

avec $d\alpha_t = \frac{d}{dt}\omega_t$. Comme on peut choisir α_t nulle en 0, le champ X_t est nul en 0 et donc s'intègre en un germe de difféo pour $0 \leq t \leq 1$.

□

L'avantage de cette preuve, trouvée par A. Weinstein, est qu'elle permet de montrer des énoncés plus généraux ; par exemple des énoncés de forme normale le long d'une sous-variété. On montre aussi de la même façon que si 2 structures symplectiques sur une variété compacte sont homotopes dans les structures symplectiques par une homotopie qui est dans une classe de cohomologie fixe, elles sont conjuguées par un difféomorphisme global.

Une autre preuve, plus élémentaire, a l'avantage de marcher aussi pour les structures de Poisson (voir [**Wei83**] et aussi la section 5.2).

3.2.3. *Surfaces.* Sur une surface une forme symplectique est une forme volume. Toute surface orientable admet donc autant de strcutures symplectiques que de formes volumes. D'après Moser [**Mos5**], 2 structures symplectique sur une surface sont équivalentes si elles ont même aire totale.

3.2.4. *Variétés kählériennes.* Une variété kählérienne est une variété holomorphe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire est une 2-forme fermée. Une telle variété est donc munie d'une structure symplectique. Il est clair que les sous-variétés holomorphes d'une variété kählérienne le sont encore.

3.2.5. *Les projectifs complexes $P^N(\mathbb{C})$.* Il y a beaucoup de façons de munir $P^N(\mathbb{C})$ d'une structure symplectique.

Le plus simple est de partir de l'unique (à scalaire près) métrique hermitienne invariante par le groupe unitaire $U(N+1)$. Sa partie imaginaire est une 2-forme non dégénérée ω. Soit $z_0 \in P^N(\mathbb{C})$ et A un élément du groupe d'isotropie de z_0 dont la différentielle en z_0 est B (qui s'identifie facilement à $U(N)$ opérant sur $\mathbb{C}^N$). Alors $d\omega(Bx, By, Bz) = d\omega(x, y, z)$ où $x, y, z \in T_{z_0}(P^N(\mathbb{C}))$. De plus il est facile de vérifier que, si on prend $z_0 = [1, 0, \cdots, 0]$, on peut prendre $Bx = -x$ différentielle de $A[x_0, \cdots, x_N] = [x_0, -x_1, \cdots, -x_N]$.

Les sous-variétés algébriques de $P^N(\mathbb{C})$ sont donc aussi symplectiques par restriction de la métrique hermitienne.

On peut aussi obtenir cette structure par réduction (voir 3.3) d'une couche d'énergie de l'oscillateur harmonique standard.

3.2.6. *Orbites co-adjointes.* Soit G un groupe de Lie, le dual de son algèbre de Lie $\mathcal{G}^\star$ est muni d'une structure de Poisson canonique. Le groupe G opère sur $\mathcal{G}^\star$ par la transposée inverse de l'application adjointe (représentation co-adjointe). Les orbites de cette action sont symplectiques pour le crochet de Poisson précédent, en particulier, elles sont de dimension paires (voir [**Kir74**]). Par exemple, pour les groupe linéaire, les orbites s'identifient aux classes de conjugaison des matrices.

3.3. La réduction symplectique. C'est une opération très utile qui a en particulier l'effet de changer la dimension de la variété symplectique. On considère une sous-variété coisotrope W de (Z, ω). C'est une sous-variété dont l'espace tangent en tout point z est un sous-espace coisotrope de $T_z Z$. Une formulation équivalente est de dire que si f et g sont nulles sur W, leur crochet de Poisson (voir 5) l'est aussi :

en effet, la définition de $\mathcal{X}_f$ montre que si f est nulle sur W, $\mathcal{X}_f$ est orthogonal à W. Donc si g s'annule sur W co-isotrope, $dg(\mathcal{X}_f) = 0$.

Réciproquement, en utilisant des équations locales $f_1 = \cdots = f_k = 0$ de W en involution, on voit que W est coisotrope car son orthogonal est engendré par les $\mathcal{X}_{f_i}$.

En particulier, W est localement définie comme l'ensemble des zéros de $k = codim Z$ fonctions en involutions. Les hypersurfaces sont toujours co-isotropes.

Les gradients symplectiques de fonctions nulles sur W définissent alors des champs de vecteurs contenus dans l'orthogonal de TW et qui commutent.

Ainsi la distribution des TW^o est intégrable (le critère de Frobenius s'applique) et définit donc un feuilletage de W. De plus, ω est invariante le long de ces feuilles (ie la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X(\omega)$ est nulle pour tout champ tangent au feuilletage) et nulle sur TW^o, et donc le quotient (local en général) de W par ce feuilletage est symplectique.

Exemple : $Z = T^\star(X \times Y)$, et W est le fibré normal de la fibration canonique $p : X \times Y \to X$, alors les feuilles sont les fibres de la projection sur $T^\star X$ et le quotient est $T^\star X$.

L'exemple le plus important (voir 4.4) est l'espace des trajectoires d'un système hamiltonien contenues dans une couche d'énergie, obtenu comme réduction de l'hypersurface $\{H = E\}$.

Si on prend sur $\mathbb{C}^n$ l'hamiltonien $H = \frac{1}{2}\sum |z_i^2|$ les trajectoires sont toutes périodiques de période 2π et les variétés de trajectoires dans $\{H = E\}$ sont toutes difféomorphes à $P^n(\mathbb{C})$ (une trajectoire est l'intersection de la sphère $\{H = E\}$ avec une droite projective) : ce sont les structures symplectiques standards ω_E sur $P^n(\mathbb{C})$. La fibration obtenue ainsi

$$\{H = E\} \to P^n(\mathbb{C})$$

est la fibration de Hopf.

4. Systèmes hamiltoniens

4.1. Formalisme lagrangien.

Définition 11. *Un* lagrangien $L = L(x, v)$ *est une fonction lisse de* $T(X)$ *dans* $\mathbb{R}$. *L'*action *d'une courbe* $\gamma : [O, T] \to X$ *est* $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T L(x, dx/dt)dt$

DÉFINITION 12. *Une* extrémale *de L est une courbe $\gamma : I \to X$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, telle que pour toute variation γ_u de γ telle que γ_u et γ coïncident en dehors d'un compact $[a,b]$ de I, on ait*

$$\frac{d}{du}_{|u=0}\mathcal{L}(\gamma_u) = 0$$

où l'action est calculée sur l'intervalle $[a,b]$.

Le *principe de moindre action* affirme que les trajectoires classiques du système considéré sont exactement les extrémales de $\mathcal{L}$.

THÉORÈME 5. *Une courbe $t \to \gamma(t)$ est une extrémale de L si et seulement si elle satisfait les* équations d'Euler-Lagrange *:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(x,x')\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(x,x')$$

Les lagrangiens que l'on considère en pratique sont de la forme :

$$L(x,v) = \frac{1}{2}\sum g_{i,j}(x)v_i v_j + \sum a_i(x)v_i - V(x) \ ,$$

(on appellera *standard* tout lagrangien de ce type), où $g_{i,j}$ est une métrique riemannienne (énergie cinétique), $\sum a_i dx_i$ le potentiel magnétique et V le potentiel électrique.

On a la formule :

$$(1) \quad \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\gamma + \varepsilon\delta\gamma)_{|\varepsilon=0} = \sum_i \left(\int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)\delta x_i\right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v_i}\delta x_i\right]_0^T)\right) \ .$$

En utilisant la transformation de Legendre (cf. section 4.2) l'expression entre crochets se réécrit :

$$[\xi\delta x]_0^T \ .$$

4.2. Transformation de Legendre et formalisme hamiltonien. Soit T un espace vectoriel réel et $P : T \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, on définit la transformée de Legendre $\hat{P} : T^\star \to \mathbb{R}$ par

$$\hat{P}(\xi) = \sup_{x\in T}(\xi(x) - P(x)) \ \leq +\infty \ .$$

Si P est strictement convexe et C^2, le sup est atteint en l'unique point tel que $P'(x) = \xi$ (l'application $x \to P'(x)$, appelée transformation de Legendre, est alors un difféomorphisme de T sur un ouvert de $T^\star$).

En fait, la convexité n'est pas nécessaire ; la propriété importante est que les variétés lagrangiennes associées aux graphes de dP et de $d\hat{P}$ coïncident. La transformée de Legendre nécessite alors uniquement une condition de normalisation donnée par

$$P(x) + \hat{P}(\xi) = x\xi$$

pour tout (x,ξ) de cette variété lagrangienne.

Dans la pratique, P sera un polynôme du second degré dont la partie de degré 2 est une forme quadratique non dégénérée et l'application $\hat{P}$ sera encore un polynôme du second degré sur T'.

EXEMPLE 4.1. *Si* $P = 1/2 \sum g_{i,j} v_i v_j + \sum a_i v_i - V$*, alors dans la base duale, on a*

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \sum g^{i,j} (\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j) + V \ .$$

Maintenant, si X est une variété et L un lagrangien strictement convexe par rapport aux v_i, on note H la transformée de Legendre de L par rapport aux v_i: H est une fonction sur le cotangent $T^\star(X)$. Les équations d'Euler-Lagrange prennent alors une forme très agréable :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \ \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \ ,$$

et prennent le nom d'*équations canoniques.*

En effet, de $dH = \xi dv + v d\xi - d_x L dx - d_v L dv$ et de la définition de ξ, on tire

$$dH = v d\xi - d_x L dx$$

et donc

$$v_i = \partial_{\xi_i} H, \ \partial_{x_i} H = -\partial_{x_i} L \ .$$

On peut réécrire ces équations sous la forme dite *canonique* :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \ \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \ .$$

On remarque alors que ces équations sont déterminées à partir de H et de ω par la relation :

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{X}_H, \ \iota(\mathcal{X}_H)\omega = -dH \ . \tag{2}$$

$\mathcal{X}_H$ est au signe près le *gradient* de H relativement à ω.

En particulier, on peut maintenant sans effort faire des changements de variables dans $T^\star(X)$ qui mélangent les x_i et les ξ_i. Une telle transformation qui préserve ω sera aussi dite *canonique.*

4.3. Conservation de H et de ω par le flot hamiltonien. On peut même oublier L et considérer des fonctions H arbitraires sur une variété symplectique arbitraire. H est interprétée comme l'énergie totale.

On a le :

THÉORÈME 6.
- *H est constante sur les trajectoires de $\mathcal{X}_H$*
- *Le flot de $\mathcal{X}_H$ préserve ω.*
- *Le flot conserve la mesure de Liouville $|dL| = \frac{1}{n!}|\wedge^n \omega|$.*
- *Le flot conserve la mesure micro-canonique $|dL/dH|$ sur les couches d'énergie Σ_E.*

Preuve.–

- On a $dH(\mathcal{X}_H) = -\omega(\mathcal{X}_H, \mathcal{X}_H) = 0$.
- La dérivée de Lie
$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H}\omega = d(\iota(\mathcal{X}_H)\omega) + \iota(\mathcal{X}_H)d\omega$$
est nulle comme valant $-ddH + \iota(\mathcal{X}_H)0$.
- Les 2 derniers points sont des conséquences évidentes de ce qui précède.

□

Un exemple instructif est de reprendre pour Z un espace hermitien complexe et pour H une forme hermitienne $H(z) = \frac{1}{2} < Az|z >$. On vérifie sans peine que l'équation d'évolution associée est l'équation de Schrödinger :

$$\frac{dz}{dt} = -iAz \ (= -2i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}) \ .$$

Par la réduction décrite plus haut, on obtient même l'équation de Schrödinger comme un système hamiltonien sur le projectif complexe, dont les points fixes (points critiques de H) sont les vecteurs propres de A.

En particulier, on voit que le groupe des difféomorphismes symplectiques de (Z,ω) est de dimension infinie (contrairement au cas riemannien, où le groupe des isométries est un groupe de Lie de dimension finie).

Une conséquence plaisante est le *théorème de récurrence de Poincaré* : si Σ_E est de volume fini et U un ouvert non vide de Σ_E, alors $\forall T_o$, il existe $t > T_o$ tel que

$$\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset \ ,$$

où φ_t désigne (et désignera dans la suite) le flot de $\mathcal{X}_H$.

Il faut remarquer que l'énoncé " $\forall z \in \Sigma_E$, $\forall T_o$, $\forall U$ voisinage de z, il existe $t \geq T_o$ tel que $\varphi_t(z) \in U$ " (qui est parfois proposé) est faux : par exemple, z peut être dans la variété instable d'un point singulier hyperbolique de H.

Par contre, l'énoncé : *presque tous les points z de Σ_E sont récurrents* est aussi vrai.

4.4. Les sections de Poincaré. On se donne un système hamiltonien d'hamiltonien H sur (Z,ω) de dimension $2n$. Alors si E est donné, l'espace des trajectoires de $\mathcal{X}_H$ d'énergie E est (localement en général) naturellement une variété symplectique obtenue par réduction à partir de la variété coisotrope $H = E$.

Une manière de paramétrer les trajectoires localement utilise les *sections de Poincaré.* Une section de Poincaré Σ est une sous-variété de dimension $2n-2$ (pas fermée en général) de la couche d'énergie $\{H = E\}$ qui soit partout transverse au flot $\mathcal{X}_H$.

Si on considère 2 sections de Poincaré Σ_1 et Σ_2, on définit un application de Poincaré comme un difféomorphisme P d'un ouvert $U_1 \subset \Sigma_1$ sur un ouvert $U_2 \subset \Sigma_2$ tel que, $\forall z \in U_1$, z et Pz soient sur la même trajectoire du flot hamiltonien. On a alors $Pz = \varphi_{T(z)}(z)$ où $T(z)$ dépend différentiablement de z.

Si γ est une trajectoire périodique de période T_0, on peut prendre $\Sigma_1 = \Sigma_2$ un germe de variété transverse à γ en un point z_0. L'application P obtenue en prenant pour U_i des voisinages de z_0 et $T(z)$ voisin de T_0 est appelée *application de premier retour* de Poincaré. C'est un germe de difféo. symplectique qui ne dépend que de γ.

L'exemple le plus connu est celui des droites d'un espace euclidien (ou plus généralement les géodésiques d'une variété riemannienne) que l'on voit comme les trajectoires d'énergie 1 de l'hamiltonien $\frac{1}{2}\|\xi\|^2$. En particulier, il y a une mesure naturelle sur ces espaces qui est bien connue en géométrie intégrale.

Un autre exemple est celui des hamiltoniens dont toutes les trajectoires d'énergie E sont périodiques de période T (par exemple le problème à 2 corps dans un potentiel Coulombien avec une énergie négative ou le système hamiltonien associé à un champ magnétique constant sur $\mathbb{R}^2$ euclidien) : la structure symplectique sur l'ensemble de ces trajectoires périodiques intervient dans la méthode de moyennisation : si on considère un hamiltonien $H_\varepsilon = H + \varepsilon K$, on peut voir le mouvement perturbé comme donnant une dynamique à l'ensemble des trajectoires, l'hamiltonien de cette dynamique étant obtenu par moyennisation de εK sur les trajectoires de H.

4.5. Réduction d'un système hamiltonien. Si f est une intégrale première de $\mathcal{X}_H$, c'est-à-dire si $\{f, H\} = 0$, on peut réduire Z à partir d'une hypersurface de niveau de f, soit W. H passe au quotient sur Z_W et donne un nouvel hamiltonien dont les trajectoires sont les projections de celles de H contenues dans W.

Par exemple, pour le problème à 2 corps dans le plan, $H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + V(r)$, et $f = p_\theta$, on obtient

$$h = \frac{1}{2}p^2 + \frac{C}{r^2} + V(r) \ .$$

La symétrie initiale du système est cachée. Cette construction permet d'interpréter de nombreux systèmes hamiltoniens : géodésiques des ellipsoïdes, réseaux de Toda,... (voir [**Per90**]).

4.6. Variations infinitésimales. Soit $z(t)$ une courbe intégrale de $\mathcal{X}_H$. On cherche à calculer la différentielle du flot hamiltonien φ_t au point $z(0)$. La stratégie valable pour tout champ de vecteurs sur une variété consiste à *linéariser* le champ de vecteurs le long de la trajectoire considérée.

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire dépendant du temps portant sur les champs de vecteurs $Z(t)$ tangents à Z aux points $z(t)$. On voit facilement que, dans des coordonnées canoniques (x, ξ) avec $Z = (X, Y)$, on a :

$$\begin{aligned} X'(t) &= H_{x,\xi}(z(t))X(t) + H_{\xi,\xi}(z(t))Y(t) \\ Y'(t) &= -H_{x,x}(z(t))X(t) - H_{\xi,x}(z(t))Y(t) \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs $X(t)$ le long de la courbe $x(t)$ s'appellent *champs de Jacobi* : ce sont les variations infinitésimales des extrémales du lagrangien. Ils forment un espace vectoriel de dimension $2n$ qui est muni d'une structure symplectique induite par les données de Cauchy en un point quelconque de la trajectoire.

Il est facile de vérifier que si on réécrit l'équation aux variations sous la forme $Z'(t) = A(t)Z(t)$. L'application linéaire $A(t)$ est dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique. La différentielle de φ_t en $z(0)$ est l'application linéaire symplectique $Z(0) \to Z(t)$.

Cas d'un cotangent :

DÉFINITION 13. *Si $z(0)$ est contenu dans une variété lagrangienne λ contenue dans une couche d'énergie, si L_0 est l'espace tangent à Λ en $z(0)$ et $L_t = d\varphi_t(L_0)$, on appelle* points conjugués (ou focaux) *les $z(t)$ tels que L_t ne coupe pas trasnversalement l'espace vertical.*

Les points conjugués sont les points d'intersection de la courbe $z(t)$ avec la caustique de Λ.

5. Variétés et crochets de Poisson

DÉFINITION 14. *Une variété de Poisson $(X, \{\ \})$ est une variété munie d'un champ de bi-vecteurs antisymétrique B (section du produit extérieur $TX \wedge TX$)*

permetttant de définir les crochet de Poisson $\{f,g\} = B(df \otimes dg)$ *vérifiant l'identité de Jacobi :*

$$(J)\ \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

Si on définit le champ hamiltonien associé à f par :

$$\mathcal{X}_f g = \{f,g\}\ ,$$

la relation (J) de Jacobi équivaut à :

$$[\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g] = \mathcal{X}_{\{f,g\}}\ .$$

Cette relation exprime donc que $f \to \mathcal{X}_f$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie des fonctions munies du crochet de Poisson dans les champs de vecteurs sur Z.

DÉFINITION 15. *Les Casimir d'une structure de Poisson sont les hamiltoniens* f *tels que* $\mathcal{X}_f = 0$.

5.1. Cas symplectique.

PROPOSITION 8. *Une variété symplectique est de Poisson par transport de* ω *sur l'espace tangent. On a :*

$$\{f,g\} = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g)$$

Si f, g sont 2 fonctions sur (Z,ω), leur crochet de Poissson est aussi défini par $\{f,g\} = -df(\mathcal{X}_g) = dg(\mathcal{X}_f)$. En coordonnées canoniques

$$\{f,g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i}\ .$$

Preuve.–

On va montrer que la relation de Jacobi est équivalente à $d\omega = 0$.

On part de l'identité générale (voir [**God69**] p. 90) :

$$d\omega(X,Y,Z) = \sum X\omega(Y,Z) - \sum \omega([X,Y],Z)$$

(où les sommes portent sur les permutations circulaires) que l'on applique avec $X = \mathcal{X}_f, Y = \mathcal{X}_g, Z = \mathcal{X}_h$. $X\omega(Y,Z) = \{f,\{g,h\}\}$ et $\omega([X,Y],Z) = [X,Y]h = Xdh(Y) - Ydh(X) = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\}$. Par sommation on obtient

$$d\omega(X,Y,Z) = -\sum\{f,\{g,h\}\}$$

qui montre que (J) équivaut à $d\omega = 0$.

□

Le noyau de l'homomorphisme $f \to \mathcal{X}_f$ est formé des fonctions constantes et son image localement (et globalement si $H^1(Z) = 0$) l'ensemble des champs hamiltoniens, i.e. ceux qui préservent ω.

Le crochet de Poisson permet de décrire l'évolution des observables : si $f : X \to \mathbf{R}$ est une observable et H un hamiltonien de flot φ_t, on a :

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(z)) = \{H,f\} \circ \varphi_t(z)\ .$$

Si on revient à l'exemple de Schrödinger, on obtient :

$$\{H_A, H_B\} = H_{\frac{1}{i}[A,B]}\ ,$$

où le crochet est celui des opérateurs.

L'évolution des observables quantiques est alors donnée par l'équation de Lax : $\frac{dL}{dt} = -i[L, A]$ (en général, on considère des cas où A dépend de t, mais ici pour simplifier nous n'avons considéré que des hamiltoniens indépendants du temps). On remarque que le flot de Lax est infinitésimalement unitaire et donc isospectral : les valeurs propres de L sont indépendantes de t.

5.2. Variétés de Poisson.

PROPOSITION 9. *Si $(X, \{\ \})$ est de Poisson, la distribution $L_{\{.|.\}}$ donnée par l'orthogonal du noyau est intégrable et les feuilles sont symplectiques.*

Un énoncé plus précis (voir [**Wei83**]) donne la structure locale des variétés de Poisson :

THÉORÈME 7. *Au voisinage d'un point O d'une variété de Poisson, il existe des coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_k, \xi_1, \cdots, \xi_k, y_1, \cdots, y_l)$ telles que*

$$B = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \varphi_{\alpha,\beta}(y) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial y_\beta}$$

avec $\varphi_{\alpha,\beta}(0) = 0$.

Preuve.–

Si $B(O) = 0$, c'est fini. Sinon il existe 2 fonctions ξ_1 et x_1 telles que $\{\xi_1, x_1\} = 1$. Leurs champs hamiltoniens commutent et définissent donc un feuilletage de dimension 2. On choisit des coordonnées locales (x_1, ξ_1, z_γ) telles que les z_γ soient constantes sur les feuilles et donc les crochets de Poisson des z_γ avec x_1 et ξ_1 sont nuls. De plus les crochets $\{z_\gamma, z_{\gamma'}\}$ sont indépendants de x_1 et de ξ_1. On a l'expression voulue avec $k = 1$ et sans la nullité de φ. Puis on recommence.

□

Notons que ce théorème donne l'existence de la feuille symplectique locale.

On remarque de plus que la fonction f prise au début est quelconque pourvu que $\mathcal{X}_f \neq 0$: cela implique dans le cas symplectique que tous les systèmes hamiltoniens non critiques sont localement équivalents.

5.3. Orbites co-adjointes. Le dual de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G est muni canoniquement d'une structure de variété de Poisson : si $z \in \mathcal{G}^\star$ et f, g sont des fonctions C^∞ sur $\mathcal{G}^\star$, on pose

$$\{f, g\}(z) = z([df(z), dg(z)])$$

où $df(z)$ est un élément de $\mathcal{G}$ (par bidualité) et le crochet est celui de $\mathcal{G}$.

On montre (voir [**Kir74**]) que les feuilles symplectiques sont les orbites de l'action (adjointe) naturelle de G sur $\mathcal{G}^\star$. Pour cela il suffit d'identifier l'espace tangent à ces orbites à l'orthogonal de l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie.

6. Variétés lagrangiennes

DÉFINITION 16. *Une sous-variété Λ de (Z, ω) est dite lagrangienne si, $\forall l \in \Lambda$, $T_l(\Lambda)$ est un sous-espace lagrangien de $(T_l(Z), \omega(l))$.*

Les variétés lagrangiennes jouent un rôle important dans la géométrie symplectique et ses applications : elles sont les “morphismes” de la catégorie des variétés symplectiques ; dans l'analyse semi-classique, elles servent de base géométrique pour construire les fonctions et opérateurs semi-classiques.

On va s'intéresser essentiellement aux variétés lagrangiennes dans le cas du cotangent ; en effet le théorème suivant de Weinstein affirme qu'il y a peu de choses à en dire dans le cas général :

Théorème 8. *Si Λ est une variété lagrangienne de (Z,ω), il existe un voisinage de Λ qui est symplectiquement équivalent à un voisinage de la section nulle du cotangent $T^\star\Lambda$.*

Si $\Lambda \subset T^\star X$ est le graphe d'une 1-forme différentielle α réelle sur X, Λ est lagrangienne si et seulement si α est fermée et donc localement exacte : si $df=\alpha$, on dit que f est une *fonction génératrice* pour Λ. Il est agréable de de considérer les variétés lagrangiennes comme des fonctions généralisées (de même que les formes quadratiques avec domaine pour le cas linéaire).

Les variétés lagrangiennes jouent un rôle considérable en analyse (voir à ce sujet [**Wei77**]).

Une des raisons de leur importance en analyse semi-classique est qu'elles donnent des solutions généralisées de l'équation de Hamilton-Jacobi. En effet, une solution f de $H(x, df(x)) = E$ est exactement une fonction dont le graphe de la différentielle est une variété lagrangienne contenue dans $H = E$.

On considérera donc qu'une variété lagrangienne contenue dans $H = E$ est *une solution généralisée de l'équation de Hamilton-Jacobi.*

On peut facilement construire de telles variétés en remarquant leur invariance par le flot $\mathcal{X}_H$:

comme dH est nulle sur Λ et par dualité, $\mathcal{X}_H$ est tangent à Λ.

Si $W \subset \{H = E\}$ est une sous-variété isotrope de dimension $n-1$, telle que le champ de vecteur $\mathcal{X}_H$ est transversal à W, l'application $J : W \times \mathbb{R} \to Z$ définie par $J(w,t) = \varphi_t(w)$ est une immersion lagrangienne dont l'image est contenue dans $H = E$.

Un exemple géométrique :

on dira qu'une famille Λ de droites de $\mathbb{R}^3$ est une congruence (voir [**Dar72**] tome 3) si c'est une sous-variété de dimension 2 de l'espace des droites orientées qui soit l'ensemble des normales d'une surface.

Théorème 9. *Soit (Z,ω) la variété symplectique (de dimension 4) de l'espace des droites affines de $\mathbb{R}^3$, alors Λ est localement une congruence si et seulement si elle est lagrangienne.*

Preuve.–

Soit S un germe de surface tel que Λ est l'ensemble des normales à S. Soit $D_0 \in \Lambda$. On peut prendre comme section de Poincaré de D_0 l'ensemble des covecteurs unitaires en les points de S. Λ correspond dans cette carte aux covecteurs unitaires transformés de Legendre $\nu^\star(m)$ des vecteurs normaux à S. Donc la 1 forme de Liouville sur Λ vaut $\nu^\star(m)dm = \nu(m).dm = 0$.

Réciproquement, supposons Λ lagrangienne, et soit $\tilde{\Lambda}$ la variété lagrangienne, image réciproque de Λ, contenue dans le fibré cotangent unitaire de $\mathbb{R}^3$. Soit $m(t) = \varphi_t(m_0)$ parcourant la droite D_0

de Λ vue comme orbite du flot géodésique φ_t. Soit $L_t = \varphi_t'(L_0)$ l'espace lagrangien tangent en $m(t)$ à $\tilde{\Lambda}$. Les points conjugués sont les points où L_t n'est pas transverse à l'espace vertical : ils forment un ensemble discret (en fait de moins de 2 points). Soit t_0 tel que L_{t_0} est transverse à la verticale et S normale à D_0 en $\pi(m(t_0))$. On vérifie que l'application $D \to D \cap S$ de Λ dans S est un difféomorphisme local. Λ est donc donnée localement comme l'ensemble des droites issues d'un point m de S de vecteurs unitaires $\tau(m)$. La structure symplectique sur Λ est donnée par $\omega = d\alpha$ avec $\alpha = \tau(m).dm$. On a localement $\alpha = d\varphi$ avec φ nulle en $D_0 \cap S$ et Λ est l'ensemble des normales à la surface obtenue en reportant une longueur $-\varphi$ à partir de $m \in S$ sur la droite de Λ passant par ce point.

□

7. Réduction et intersection transverse au sens de Bott

soit $W \subset Z$ une sous-variété coisotrope et Z_W la variété réduite. On a une application r de W dans Z_W. Soit maintenant Λ une sous-variété lagrangienne de Z. Alors $r(W \cap \Lambda)$ n'est pas nécessairement une sous-variété. C'est cependant le cas si Λ et W se coupent transversalement au sens de Bott (clean intersection en anglais) ie si $\Lambda \cap W$ est une sous-variété et si $T(W \cap \Lambda) = TW \cap T\Lambda$. Dans ce cas $r(\Lambda)$ est lagrangienne (c'est alors un résultat d'algèbre linéaire et le fait que r est de rang constant sur $W \cap \Lambda$).

8. Trajectoires périodiques

8.1. Trajectoires périodiques : le point de vue dynamique. Soit Σ_E une couche d'énergie lisse de l'hamiltonien H. Soit μ la mesure de probabilité microcanonique sur Σ_E. Soit $\mathcal{X}$ la restriction de $\mathcal{X}_H$ à Σ_E.

On considère le flot φ_t de $\mathcal{X}$ comme un système dynamique préservant μ.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma_E$ une trajectoire de $\mathcal{X}$. On dira que γ est périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t+T) = \gamma(t)$. On notera $T_0 > 0$ la plus petite période > 0 de γ. Les autres sont des multiples entiers de T_0.

On définit alors une (un germe de) section de Poincaré S_γ comme un germe d'hypersurface de Σ_E (donc de dimension $2n-2$) transversal à γ en un $x_0 = \gamma(t_0)$. S_γ est symplectique.

Soit x un point de S_γ proche de x_0, alors la trajectoire de x recoupe S_γ en un temps T_x proche de $T_0 = T_{x_0}$.

L'application de Poincaré P_γ (germe d'application de (S_γ, x_0) dans elle-même) est l'application qui à x associe $\varphi_{T_x}(x)$.

Il est facile de voir grâce à la formule de Stokes que P_γ est symplectique. De plus, un changement de point x_0 et de section S_γ ne change P_γ qu'à conjugaison symplectique près.

En particulier, la différentielle P_γ' de l'application de Poincaré en x_0 est bien définie à conjugaison près dans le groupe linéaire symplectique.

On dira que γ est hyperbolique (resp. elliptique) si P_γ' l'est.

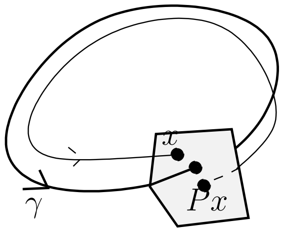

FIGURE 1. Section de Poincaré d'une orbite périodique

Si γ est hyperbolique, il existe des sous-variétés lagrangiennes immergées de Σ_E appelées variétés stables et instables $W_\gamma^\pm$ définies par :

$$W_\gamma^\pm = \{y|\varphi_t(y) \to \gamma \text{ lorsque } t \to \pm\infty\} \ .$$

Lorsque γ est elliptique, les itérées de P'_γ ne le sont pas toujours. C'est le cas cependant si $P'\gamma$ est elliptique générique.

Stabilité structurelle : si 1 n'est pas valeur propre de P'_γ, γ est structurellement stable : cela signifie que si l'on fait une perturbation lisse de H (ou de l'énergie) on ne fait pas disparaitre la trajectoire périodique.

Si P'_γ admet une valeur propre qui est racine de l'unité, il y a une itérée de γ qui admet 1 comme valeur propre, on a souvent affaire à une bifurcation (création d'orbites périodiques de périodes multiples de T_0).

8.2. Trajectoires périodiques : le point de vue calcul des variations. Dans tout ce §, X sera supposée compacte et le lagrangien standard.

8.2.1. *La variété des chemins H^1.* Si $X \subset \mathbb{R}^N$ est une sous-variété compacte, on peut définir l'ensemble Ω_X^T des chemins H^1 comme le sous-ensemble de l'espace de Sobolev $H^1([0,T],\mathbb{R}^N)$ formé des chemins contenus dans X.

Topologies: Il y a par force décroissante au moins 3 toplogies intéressantes sur Ω_X^T :

- La topologie induite par la topologie de l'espace de Hilbert H^1.
- La topologie de la convergence uniforme
- La toplogie faible

On montre qu'en fait cet ensemble ne dépend que de X et pas du plongement, de même que les topologies précédentes.

Structure de variété : Ω_T^X est munie naturellement d'une structure de variété banachique modelée sur H^1.

L'espace tangent en γ est formé des champs de vecteurs H^1 le long de γ.

8.2.2. *Existence d'extrémales.* Si L est un lagrangien standard, et si on suppose la métrique sci et les potentiels magnétiques et électriques continus, la fonction d'action $\mathcal{L}(\gamma)$ est sci pour la topologie faible.

On en déduit les théorèmes d'existence de courbes minimisantes pour $\mathcal{L}$ pour les problèmes périodiques et à extrémités fixées.

THÉORÈME 10. *Soit X compacte et L standard sci, soit C une classe d'homotopie de $\Omega_{T,per}$ (lacets T périodiques) ou $\Omega_{T,A,B}$ (chemins d'extrémités A, B), alors $\mathcal{L}$ atteint son minimum sur C.*

Il est en effet clair qu'on peut appliquer la méthode directe de calcul des variations : toute fonction sci sur un compact atteint son minimum.

On peut alors montrer que les courbes minimales satisfont les équations d'Euler-Lagrange dans tout ouvert où L est lisse (elles les satisfont au sens des distributions et donc au sens ordinaire).

8.2.3. *Méthode de calibration.* Il existe une autre méthode voisine de la méthode de calibration.

Soit L un lagrangien lisse, strictement convexe par rapport aux vitesses, et H l'hamiltonien associé. Soit Λ une variété lagrangienne contenue dans $H = E$ se projettant de façon difféomorphe sur un ouvert U de X.

Par tout point x de U passe donc une extrémale dont le relevé est contenu dans Λ.

PROPOSITION 10. *Sous les hypothèses précédentes, si $\gamma_0(t)$ est une extrémale de la famille joignant A, B de U, γ_0 minimise $\mathcal{L}$ parmi les chemins homotopes à γ_0 dans U .*

Pour $x \in U$, on note $v(x)$, *resp* $\xi(x)$, les vitesses et moments de la trajectoire passant par x.

On a alors pour un chemin $x(t)$ dans U de vitesse x' et par convexité de L par rapport aux vitesses :

$$L(x, x') \geq d_v L(x, v)(x' - v) + L(x, v)$$

soit en intégrant :

$$\int_0^T L(x, x')dt \geq \int \xi dx - Edt$$

où la deuxième intégrale est calculée sur le relèvement à Λ de $x(t)$.

Il reste à utiliser le fait que ξdx est fermée sur λ. □

On en déduit en particulier, sous les mêmes hypothèses sur L, que si $\gamma : [0, T] \to X$ est une extrémale, il existe un $t_0 > 0$, tel que γ minimise $\mathcal{L}$ parmi les chemins de $\Omega_{t_0, \gamma(0), \gamma(t_0)}$.

Il suffit de prendre dans la proposition précédente l'ensemble des trajectoires d'énergie égale à celle de γ issue de $\gamma(0)$ pendant un temps t_1 assez petit. Puis prendre t_0 petit par rapport à t_1.

8.2.4. *Approximations de dimension finie.* Soit (X, g) une variété riemannienne (lisse) compacte. Notons $r > 0$ son rayon d'injectivité. Rappelons que le rayon d'injectivité de X est le plus grand nombre r qui vérifie : pour tout couple de point $a, b \in X$ tel que $d(a, b) < r$, il existe une unique géodésique de a à b dont la longueur est égale à $d(a, b)$. On montre sans peine que cette géodésique dépend de façon lise de a, b. Dans l'ouvert $D_r = \{(a, b) \in X \times X | d(a, b) < r\}$, la fonction *carré de la distance* est lisse.

Le but de ce qui suit est d'exhiber une équivalence d'homotopie entre l'espace $\Omega_{T,E}$ des chemins H^1 d'énergie $< E$ et une sous-variété de dimension finie $\Omega^N_{T,E}$, la variété des *géodésiques brisées.* Cette sous-variété contient les points critiques de la fonctionnelle énergie et les indices de Morse de $\mathcal{L}$ restreinte à $\Omega^N_{T,E}$ sont les indices de Morse de $\mathcal{L}$ sur $\Omega_{T,E}$. Cela permet d'appliquer la théorie de Morse à l'espace des lacets. Cette idée de l'espace des géodésiques brisées est excellemment décrite dans [**Mil67**].

On note $\Omega_T = H^1([0,T],X)$, $\mathcal{L}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^T \|\gamma'(t)\|^2 dt$ et

$$\Omega_{T,E} = \{\gamma \in \Omega_T | \mathcal{L}(\gamma) < E\} \ .$$

Soit N un entier tel que $2ET/N < r^2$. Si $\gamma \in \Omega_{T,E}$ et $0 \leq t' < t'' \leq t' + \frac{T}{N} \leq T$, on montre, avec Cauchy-Schwarz, que $d(\gamma(t'), \gamma(t'')) < r$.

Soit alors $\Omega_{T,E}^N$ l'ensemble des chemins de $\Omega_{T,E}$ qui sont géodésiques sur les intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \cdots, N-1$ avec $t_j = \frac{j}{N}$.

$\Omega_{T,E}^N$ est une sous-variété de dimension $n(N+1)$ de $\Omega_{T,E}$.

Soit j l'injection de $\Omega_{T,E}^N$ dans $\Omega_{T,E}$ et $\pi : \Omega_{T,E} \to \Omega_{T,E}^N$ l'application qui consiste à remplacer γ sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ par la géodésique minimisante.

Alors les applications $j \circ \pi$ et $\pi \circ j$ sont homotopes à l'identité et définissent donc une équivalence d'homotopie entre $\Omega_{T,E}$ et $\Omega_{T,E}^N$. C'est clair pour $\pi \circ j$ qui est l'identité de $\Omega_{T,E}^N$. On interpole entre Id et $\pi \circ j$ de la façon suivante ; on définit l'application π_u $(0 \leq u \leq T)$, en notant $\gamma_u = \pi_u(\gamma)$, pour $t_i \leq u \leq t_{i+1}$, par :

- $\gamma_u(t) = \pi(\gamma)(t)$ pour $t \leq t_i$,
- $\gamma_u(t) = \gamma(t)$ pour $t \geq u$,
- $\gamma_u(t)$ est la géodésique minimisante de $\gamma(t_i)$ à $\gamma(u)$ pour $u \leq t \leq t_{i+1}$.

Si on introduit les sous-variétés des précédentes formées des chemins périodiques ou des chemins d'extrémités A, B fixées, on conserve la même équivalence d'homotopie.

On voit que les extrémales de $\Omega_{T,E}$ sont contenues dans $\Omega_{T,E}^N$.

Il en des de même des points critiques de $\mathcal{L}$ sur les sous-variétés de chemins périodiques ou à extrémités fixées.

En fait, les indices de Morse de ces points critiques coïncident. Ces indices de Morse sont donc finis.

Cela résulte de la décomposition orthogonale, en tout point de $\Omega_{T,E}^N$ pour le hessien de $\mathcal{L}$ de l'espace tangent à $\Omega_{T,E}^N$ et de l'espace des champs de vecteurs nuls aux points t_i. La différentielle de $\mathcal{L}$ restreinte à ce dernier espace est nulle.

Il est aussi utile de remarquer que $\Omega_{T,E}^N$ s'identifie par l'application $\gamma \to (\gamma(t_i))$ à une sous-variété de X^{N+1} et que la restriction de $\mathcal{L}$ à $\Omega_{T,E}^N$ s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{L}_N(x_0, x_1, \cdots, x_N) = \frac{N}{2T} \sum_{j=0}^{N-1} d^2(x_j, x_{j+1}) \ .$$

9. Fonctions génératrices

9.1. Famille de fonctions génératrices. Soit $\pi : T^\star X \to X$ la projection canonique.

DÉFINITION 17. *Si Λ est une variété lagrangienne de $T^\star X$, la* caustique Σ *de Λ est l'ensemble des $z \in \Lambda$ telle que la restriction de π à Λ n'est pas un difféomorphisme local en z.*

Si $z \notin \Sigma$, Λ est près de z le graphe de la différentielle d'une fonction $\varphi : X \to \mathbf{R}$; on dit que φ (qui est définie à une constante près) est une fonction génératrice de Λ.

Comment représenter Λ si ce n'est pas le cas ?

Soit $\varphi(x, \theta)$ une fonction définie sur $X \times \mathbb{R}^N$ à valeurs réelles. Soit $C_\varphi = \{(x,\theta) | \partial\varphi/\partial\theta = 0\}$. On suppose que les différentielles $d_{x,\theta}(\partial\varphi/\partial\theta_i)$, $i = 1, \cdots, N$

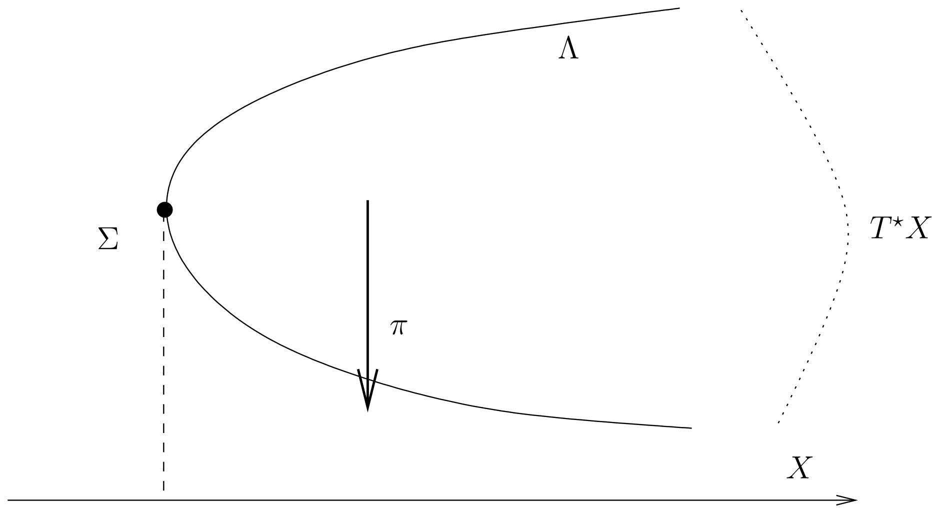

Figure 2. Variété lagrangienne et sa caustique

sont indépendantes. Alors C_φ est une sous-variété de dimension $n = \dim(X)$ de $X \times \mathbb{R}^N$. On introduit $j_\varphi : C_\varphi \to T^\star X$ définie par $j_\varphi(x,\theta) = (x, \partial_x\varphi)$. On a alors :

Théorème 11. *L'application j_φ est une immersion de C_φ dans $T^\star X$ dont l'image est une variété lagrangienne Λ_φ de $T^\star X$. De plus $j_\varphi^\star(\xi dx) = d\varphi_{|C_\varphi}$.*

Définition 18. *Sous les hypothèses précédentes, on dit que $\varphi(x,\theta)$ est une* famille (de fonctions) génératrice de $\Lambda_\varphi = j_\varphi(C_\varphi)$.

Preuve.–

Soit J la différentielle de j_φ. On a $J(dx, d\theta) = (dx, \partial_{x,x}\varphi dx + \partial_{\theta,x}\varphi d\theta)$, alors que $TC_\varphi = \{(dx, d\theta) | \partial_{x,\theta}\varphi dx + \partial_{\theta,\theta} d\theta = 0\}$. On en déduit que $\ker J = 0$ et donc que j_φ est une immersion. On calcule ensuite $j_\varphi^\star(\xi dx) = d\varphi_{|C_\varphi}$.

□

On peut reformuler plus géométriquement la notion de famille génératrice : si $p : M \to X$ est une submersion et $\varphi : M \to \mathbb{R}$, on peut définir la dérivée partielle de φ suivant les fibres et ainsi C_φ. L'application j_φ est alors bien définie, car la dérivée horizontale $\partial_x\varphi$ est bien définie en tout point où la dérivée verticale s'annule.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 12. *Toute sous-variété lagrangienne est localement de la forme Λ_φ pour un φ convenable. On peut toujours prendre $N \le n$ et même $N = \mathrm{rang}(d\pi)$.*

Preuve. Soit $z_0 \in \Lambda$ et $T_{z_0}\Lambda = L$ que l'on voit comme sous-espace vectoriel lagrangien de $\mathcal{E} = E \oplus E^\star$ (avec $E = T_{x_0}X$; on note p (resp $p^\star$) les projections de $\mathcal{E}$ sur E (resp $E^\star$).

Soit $F = p(L)$, $E = F \oplus G$ et $E^\star = F^\star \oplus G^\star$. On a : $0 \oplus G^\star \subset L^o = L$ et donc la projection $P : L \to F \oplus G^\star$ est un isomorphisme. On en déduit que cela reste vrai au voisinage de z_0 : localement Λ est de la forme

$$\Lambda = \{(x', g(x', \xi''), f(x', \xi''), \xi'') | x' \in F,\ \xi'' \in G^\star\}\ .$$

On exprime que Λ est lagrangienne, ce qui donne

$$df \wedge dx' + d\xi'' \wedge dg = 0$$

et donc

$$d(gd\xi'' - fdx') = 0 \ .$$

Soit localement $S(x', \xi'')$ telle que

$$dS = gd\xi'' - fdx'$$

on prend

$$\Phi(x', x'', \xi'') = \xi'' x'' - S(x', \xi'') \ ,$$

dont il est facile de vérifier les propriétés. □

Si $\Lambda = \Lambda_\varphi$ est donnée, elle admet plusieurs familles génératrices :

(1) Si $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda_{\varphi+a} = \Lambda_\varphi$.

(2) Si $q(\theta')$ est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^{N'}$, $\Lambda_{\varphi(x,\theta)+q(\theta')} = \Lambda_\varphi$.

(3) Si $F = \mathbb{R}^{N'} \to \mathbb{R}^N$ est une submersion, $\Lambda_{\varphi \circ F} = \Lambda_\varphi$.

Hörmander a démontré le remarquable résultat suivant :

Théorème 13. *Si $z \in \Lambda_\varphi = \Lambda_{\varphi_1}$, on peut au voisinage de z passer de φ à φ_1 grâce aux opérations précédentes.*

On dira qu'une fonction phase représentant Λ est réduite en $\lambda_0 \in \Lambda$ si $\partial^2\varphi/\partial\theta^2$ est nulle au point de C_φ correspondant à λ_0. Par le lemme de Morse, on peut toujours réduire une fonction phase en un point donné et alors le nombre de variables θ est donné par la dimension du noyau de la différentielle de la projection de Λ sur X en λ_0. Pour réduire, on choisit une sous-variété $X \times \mathbb{R}^{N'} \subset X \times \mathbb{R}^N$ telle que $\partial^2\varphi/\partial\theta'^2$ soit non dégénérée et on applique le lemme de Morse à paramètre près de C_φ.

9.2. Exemples géométriques. Les fonctions distances sont souvent de bonnes candidates à être des fonctions génératrices. Le problème est leur manque de différentiabilité aux points conjugués.

Plus généralement, soit x_0 et y_0 2 points non conjugués le long d'une extrémale $\gamma_0(t)$ tels que $x = \gamma_0(0), y = \gamma_0(T_0)$. Soit (x_0, ξ_0), (y_0, η_0) les relevés de ces points dans le cotangent.

Alors pour tout (x, y) voisins de (x_0, y_0), et T voisin de T_0, il existe une unique extrémale γ proche de γ_0 telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$. Soit $S(T, x, y)$ l'action le long de ces extrémales (intégrales du lagrangien).

Dans le cas riemannien, on a :

$$S(T, x, y) = \frac{d^2(x, y)}{2T} \ ,$$

où $d(x, y)$ est la distance entre x et y comptée le long d'une géodésique de x à y proche de celle considérée de x_0 à y_0.

Alors, on a le :

Théorème 14. *La fontion $S(T, x, y)$ vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi :*

$$\partial_T S + H(y, \partial_y S) = 0 \ ,$$

et $S(T_0, x, y)$ est une fonction génératrice du flot Hamiltonien φ_{T_0} près de (x_0, ξ_0).

Preuve. La seconde assertion résulte du calcul de la dérivée de $\mathcal{L}$ par rapport aux extrémités fait dans la section 4.1.

La première est plus subtile : il faut calculer

$$\partial_T \int_0^T L(\gamma_T(t), \gamma_T'(t))dt \ ,$$

où γ_T est l'extrémale de x_0 à y_0 en le temps T. On décompose en $\int_0^{T_0} + \int_{T_0}^T$: la 2ème dérivée vaut $L(y_0, v_0)$ avec $v_0 = \gamma_0'(T_0)$; la première vaut (en utilisant le caractère extrémal de γ_0) :

$$\eta_0 \frac{\delta \gamma_T(T_0)}{\delta T} \ .$$

On écrit alors $\gamma_T(T) = y_0$ que l'on dérive par rapport à T en T_0. Cela donne $-\eta_0 v_0$ pour cette première dérivée et finit la preuve. □

9.3. Fonctions génératrices et espace des chemins. Soit $H(x, \xi)$ l'hamiltonien associé au lagrangien $L(x, v)$ supposé strictement convexe par rapport à v. Soit $T > 0$ et $\varphi_T : T^\star(X) \to T^\star(X)$ le flot de $\mathcal{X}_H$ à l'instant T. Le graphe de φ_T est une sous-variété lagrangienne de $T^\star(X) \times T^\star(X)$ munie de la forme $pr_2^\star(\omega) - pr_1^\star(\omega)$.

Soit Ω l'ensemble des chemins γ de classe H^1 avec $\gamma : [0, T] \to X$. On a la fibration (introduite par Serre) $\Omega \to X \times X$ qui à γ associe le couple $(\gamma(0) = x, \gamma(1) = y)$. Considérons maintenant la fonction $\mathcal{L} : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma, \gamma')dt$. C'est une famille de fonctions génératrices de φ_T. En effet, les points critiques $C_{\mathcal{L}}$ sont exactement les extrémales de $\mathcal{L}$ à extrémités fixées. Il reste à calculer les dérivées $\partial \mathcal{L}/\partial x$ et $\partial \mathcal{L}/\partial y$, ce qui résulte de la formule de variation première de $\mathcal{L}$ (équation (1)).

Une autre variété intéressante à considérer dans le même contexte est Λ_{x_0} définie par

$$\Lambda_{x_0} = \{(\varphi_t(x_0, p), t, -H(x_0, p)) | p \in T^\star(x_0), t \in \mathbb{R}\} \ .$$

On définit un fibré analogue $\Omega_{x_0} \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$, où Ω_{x_0} est l'ensemble des chemins d'origine x_0 et la fibration est donnée par : $(\gamma, t) \to (\gamma(t), t)$. On a la famille génératrice donnée par :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \int_0^t L(\gamma, \gamma')du \ .$$

Ces familles génératrices utilisent des variétés de dimension infinie, mais il est classique que l'on peut facilement se ramener à la dimension finie par la technique des géodésiques brisées (voir [**Mil67**] et sous-section 8.2.4). Voyons comment procéder dans le premier cas pour trouver une fonction génératrice du graphe de φ_T au voisinage du point $((x_0, \xi_0), \varphi_T(x_0, \xi_0)$ d'énergie E : on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $z_i = \varphi_{iT/N}(x_0, \xi_0)$ et $z_i = (x_i, \xi_i)$, $\mathcal{L}$ ait, $\forall i$, $0 \le i \le N-1$, un unique minimum non dégénéré d'extrémités x_i et x_{i+1} sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = iT/N$ (ie $\inf(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(x, x')dt)$). On note $S_i(x, x')$ ce minimum pour x, x' voisins de x_i, x_{i+1}. On introduit alors la fibration (locale) $\pi : Z \to X \times X$, où Z est un voisinage de $(x_0, x_1, x_2, ..., x_N)$ dans X^{N+1}, et $\pi(x_0, ..., x_N) = (x_0, x_N)$. La fonction $\varphi(z_i) = \sum_i S_i(x_i, x_{i+1})$ est une famille génératrice pour $\Lambda = \text{graphe}(\varphi_T)$.

9.4. Fonctions génératrices des transformations canoniques. Soit $\chi : T^\star\mathbb{R}^n \to T^\star\mathbb{R}^n$ un germe de transformation canonique. On pose $\chi(x, \xi) = (y, \eta)$.

On a plusieurs types de fonctions génératrices :

- On suppose que l'application $(x,\xi) \to (x,\eta)$ est un difféomorphisme d'un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^{2n}$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. De $d(\xi dx + yd\eta) = 0$, on déduit l'existence de $S(x,\eta)$ telle que $\xi = \partial_x S,\ y = \partial_\eta S$. Soit
$$\Lambda = \{(x,\xi,y,-\eta) | (y,\eta) = \chi(x,\xi)\} \subset T^\star(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n) \ .$$
Alors $S(x,\eta) - y\eta$ est une famille génératrice pour Λ. On a donc :
$$\chi(x, \partial_x S) = (\partial_y S, \eta)$$
Les hypothèse précédentes sont satisfaites si χ est C^1 proche de Id.
- On suppose que l'application $(x,\xi) \to (x,y)$ est un difféomorphisme défini sur un ouvert 1-connexe. On peut alors trouver une fonction génératrice S telle que
$$\chi(x, -\partial_x S) = (y, \partial_y S)$$

10. Indice de Morse

10.1. Définitions.

Définition 19. *Si q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E (de dimension finie ou non), l'indice de Morse de q est le sup des dimensions des sous-espaces de E où q est strictement négative.*

Définition 20. *Si x_0 est un point critique d'une fonction $F : X \to \mathbb{R}$, où X est une variété de dimension finie ou banachique, l'indice de Morse de F en x_0 est l'indice de Morse de la Hessienne de F qui est une forme quadratique sur $T_{x_0}X$.*

Soit L un lagrangien standard (voir 4.1) et $\gamma_0 : \mathbb{R} \to X$ une extrémale de $\mathcal{L} = \int L dt$.

Soient Y et Z 2 champs de vecteurs le long de $(\gamma_0)_{|[0,T]}$, c'est à dire que $\forall 0 \le t \le T,\ Y(t), Z(t) \in T_{\gamma_0(t)}X$, et $\gamma(t,u,v)$ telle que $\gamma(t,0,0) = \gamma_0(t)$,
$$\frac{\partial \gamma}{\partial u}(t,0,0) = Y,\ \frac{\partial \gamma}{\partial v}(t,0,0) = Z \ ,$$
une déformation de γ_0 sur $[0,T]$. On note
$$Q(Y,Z) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial v}_{|u=v=0} \ .$$

On vérifie que
$$Q(Y,Z) = \int_0^T (A(t)Y'Z' + B(t)YZ' + B(t)ZY' + C(t)YZ)\, dt$$
où $A,\ B,\ C$ sont des formes quadratiques dépendant de t. De plus $A(t)$ est définie positive si L est strictement convexe en v.

Munissant X d'une métrique riemannienne, la forme quadratique précédente est associée à un opérateur différentiel du second ordre J auto-adjoint, appellé *opérateur de Jacobi.*

Les solutions de $JY = 0$ sont les champs de Jacobi : si $\gamma_u = \gamma(., u, 0)$ est une famille d'extrémales,la différentielle de $\mathcal{L}$ en tout point γ_u est nulle et il en est donc de même de $Q(Y,Z)$.

Remarque : J dépend du choix d'une métrique, alors que, ni Q, ni les champs de Jacobi, n'en dépendent.

THÉORÈME 15. *L'indice de Morse de γ_0 pour le problème à extrémités $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$ fixées est le nombre de valeurs propres < 0 de J pour le problème de Dirichlet sur $[0, T]$.*

L'indice de Morse de γ_0 pour le problème périodique est le nombre de valeurs propres < 0 de J pour le problème périodique.

Par exemple, si $L = \frac{1}{2}x'^2 - V(x)$, $A = 0$ et $B(t) = -V"(\gamma(t))$; dans le cas des géodésiques si on prend un repère parallèle $B(t)$ s'exprime à l'aide de la courbure de la métrique (formule dite de la variation seconde). En particulier, la forme B est définie positive dès que la courbure sectionnelle est strictement négative. Dans ce cas, les indices de Morse sont nuls.

DÉFINITION 21. *Les champs Y qui vérifient $JY = 0$ sont appelés champs de Jacobi.*

THÉORÈME 16. *Les champs de Jacobi sont les variations infinitésimales d'extrémales. Si $\gamma(t, u)$ est pour tout u une extrémale $Y = \partial\gamma/\partial u$ est un champ de Jacobi et réciproquement, pour tout champ de Jacobi Y, il existe une famille d'extrémales dont Y est la variation infinitésimale.*

Preuve.–

En effet, soit $\gamma_{u,v}(t)$ une variation de γ_0 telle que $\gamma_{u,0}(t)$ soient des extrémales et que $Z = \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u, 0)$ soit à support compact.

On alors $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(u, 0) = 0$. Puis dérivant par rapport à u en $u = 0$, il vient :

$$Q(Y, Z) = 0$$

pour tout Z à support compact et donc Y vérifie l'équation de Jacobi.

La réciproque peut se montrer par un argument de dimension.

□

10.2. Théorème de Morse. On s'intéresse au problème à extrémités fixées. Soit $\gamma : [0, \infty[\to X$ une extrémale et $\nu(T)$ l'indice de γ restreint à l'intervalle $[0, T]$ à extrémités fixées. $\nu(T)$ est une fonction croissante de T. Cette fonction vaut 0 pour T petit et est discontinue seulement aux points où il existe une valeur propre nulle de l'opérateur de Jacobi, c'est-à-dire un champ de Jacobi nul en 0 et en T sans être identiquement nul.

Ces points sont appellés points conjugués de $\gamma(0)$ le long de γ.

THÉORÈME 17. *(Théorème d'indice de Morse) L'indice $\nu(T)$ du problème à extrémités fixées est égal au nombre de points conjugués, comptés avec leur multiplicités, de $\gamma(0)$ sur $]0, T[$.*

On en trouvera une preuve dans tous les ouvrages de géométrie riemannienne (par ex. dans [**Mil67**]). Une preuve dans l'esprit de ces notes est donnée dans la section 12.

EXEMPLE 10.1. *Les surfaces de révolution d'aire extrémale.*

Soit $L(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ le lagrangien correspondant à la recherche des surfaces de révolution de méridienne $y(x)$ d'aire extrémale. Le problème à extrémités liées correspond physiquement à la recherche de surfaces minimas s'appuyant sur 2 cercles de même axe (bulles de savon).

Les extrémales ont pour équations

$$y = b\cosh(\frac{x-x_0}{b}),\ b>0\ .$$

Supposons que l'on fixe un des cercles de centre O et de rayon $a>0$. Les extrémales issues de ce point ont une enveloppe Γ qui détermine la région A accessible de son complémentaire N.

On a alors la solution suivante du problème de minimas :

si (x_0,r_0) est dans l'intérieur de A, il y a 2 extrémales, l'une γ_1 qui touche l'enveloppe et donc a un point conjugué et est d'indice 1, l'autre γ_0 qui est minimisante.

Si par contre (x_0,r_0) est dans N, il y a une solution dégénérée : réunion des 2 disques coaxiaux et de l'axe ; physiquement, la bulle de savon finit par éclater si on écarte les 2 cercles...

10.3. Le problème périodique. Soit $\gamma_0(t)$ une extrémale périodique de période T_0 et $T=kT_0$ un multiple de la période.

On s'intéresse à l'indice de Morse $\nu_{per,T}$ de γ_0 comme application de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans X.

Cet indice est celui de la forme Q sur l'espace des champs de vecteurs $T-$périodiques de classe H^1 le long de γ_0, notons le K_T. Comme K_T contient les champs nuls aux 2 extrémités, l'indice de Morse $\nu_{per,T}$ est $\geq$ l'indice de Morse à extrémités fixées $\nu(T)$ (nombre de points conjugués). La différence, appelée concavité par Morse, est l'indice de la forme Q sur l'espace des champs de Jacobi le long de γ_0 qui vérifient $Y(0)=Y(T)$. Ce dernier indice se calcule en fonction de l'application de Poincaré linéaire. En tout cas, on a :

$$\nu(T)\leq \nu_{per,T}\leq \nu(T)+n\ .$$

11. Indice de Maslov

11.1. Définitions. L'indice de Maslov est défini dans le contexte suivant généralisant un peu celui de la section 2.9 : on considère un fibré en espaces symplectiques E au dessus du cercle ou d'un intervalle compact muni d'un sous fibré lagrangien appelé vertical. On se donne par ailleurs une section $\lambda(t)$ de $\Lambda(E)$ qui est transverse à la verticale aux bords de l'intervalle dans le cas où la base est un intervalle.

DÉFINITION 22. *L'indice de Maslov de $\lambda(t)$ est le nombre d'intersection de cette courbe avec le cycle singulier des lagrangiens qui ne coupent pas transversalement le sous fibré vertical.*

L'exemple de base est celui d'une courbe $z(t)$ tracée sur une sous-variété lagrangienne d'un cotangent $T^\star X$. La base est l'espace des paramètres t de la courbe z, l'espace $E(t)$ est l'espace tangent à $T^\star X$ en $z(t)$, la verticale est le noyau de la différentielle de la projection sur X, la section $\lambda(t)$ est l'espace tangent à la variété lagrangienne en $z(t)$. On définit ainsi l'indice de Maslov d'une courbe contenue dans une variété lagrangienne d'un cotangnet.

11.2. Calcul avec les fonctions génératrices. On trivialise localement les fibrés de façon à se ramener au cas du cotangent de $\mathbb{R}^n$ avec le fibré vertical habituel.

11.2.1. *Cas d'un chemin générique.* Considérons d'abord un chemin générique, i.e. qui traverse le lieu singulier dans sa strate de codimension 1 transversalement. L'espace lagrangien $\lambda(0)$ à l'instant de l'intersection est donné dans des coordonnées convenables par

$$\lambda(0) = \{(0, x'; \xi_1, C_0(x'))\}$$

où C_0 est symétrique. Les lagrangiens $\lambda(t),\ t \neq 0$, sont alors donnés par

$$\lambda(t) = \{(a(t)\xi_1 + L(t)(x'), x'; \xi_1, C_t(\xi_1, x')\}$$

La condition de transversalité est $a'(0) \neq 0$. La forme quadratique associée à $\dot{\lambda}(0)$ restreinte à $D = \lambda(0) \cap V = \{(0, 0; \xi_1, 0)\}$ est $-\dot{a}(0)\xi_1^2$. Le chemin admet une fonction génératrice au sens de Hörmander du type

$$x_1\xi_1 - q_t(x', \xi_1)$$

et donc $x_1 = \partial_{\xi_1} q_t$. On voit que $a(t)$ s'interprete comme la dérivée seconde par rapport à ξ_1 de l'opposé de la fonction phase. L'indice de Maslov compte donc la diminution de l'indice de Morse de la fonction génératrice de Hörmander lorsqu'on a traversé le lieu singulier.

11.2.2. *Cas d'un chemin quelconque.*

Définition 23. *Une famille de formes quadratiques $q_t(x, \theta)$ lisse en t sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^N$ est dite non dégénérée si l'application linéaire $\partial_\theta q_t$ est surjective.*

On associe à une telle famille q_t le chemin $\lambda(t)$ dans $\Lambda(n)$ défini par :

$$\lambda(t) = \{(x, \partial_x q_t) \mid \partial_\theta q_t = 0\}$$

On montre facilement l'analogue du cas non linéaire :

Proposition 11. *Tout chemin lisse $\lambda(t)$ admet localement une famille de formes quadratiques non dégénérées le définissant.*

Deux familles q_t définissant le même chemin sont équivalentes par des changements linéaires à t constant et des adjonctions de formes quadratiques.

Si $\lambda_0(t)$ est définie par $q_{0,t}$, on peut définir tout chemin assez voisin par une déformation lisse de $q_{0,t}$.

De cette proposition, on déduit le résultat suivant :

Théorème 18. *Soit $\lambda(t),\ 0 \leq t \leq T$ une section de $\Lambda(E)$ satisfaisant les hypothèses de la section 11.1. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ tels que le fibré E soit trivial sur $[t_i, t_{i+1}]$ et que $\lambda(t)$ y soit défini par une famille de formes quadratiques $q_{i,t}$. Soit $\nu_i(t)$ l'indice de Morse de la dérivée seconde de $q_{i,t}$ par rapport à θ_i. On a :*

$$m(\gamma) = -\sum_{i=0}^{N-1} (\nu_i(t_{i+1}) - \nu_i(t_i)) \ .$$

Preuve.–

On l'a déjà montré pour un chemin qui coupe transversalement le lieu singulier. Pour un chemin quelconque, on le déforme de façon à satisfaire cette transversalité et on utilise une famille continue de formes quadratiques pour laquelle la somme précédente va être constante.

□

Pour faire la démonstration précédente, on doit relever une déformation de chemin, ce qui peut se faire dans le cas d'une submersion. On a ainsi besoin du :

LEMME 3. *Soit Q l'ouvert de l'espace des formes quadratiques q en (x, θ) telles que q est une fonction phase non dégénérée. L'application $\Phi : q \to L_q$ de Q dans la grassmannienne lagrangienne est une submersion*

Preuve.–

On se place en q_0 tel que $\phi(q_0) = L_0$. Quitte à faire un changement de variable en θ dépendant de x, on peut suppposer que $q_0 = x_1\theta - r(x', \theta) + s(\theta')$. Tout L voisin de L_0 admet une fonction phase unique de la même forme. On a ainsi exhibé des sections locales de Φ.

□

11.3. Le cas de la dimension 1. Dans le cas de $T^\star\mathbb{R}$ les variétés lagrangiennes sont des courbes lisses et la caustique correspond aux points où la tangente est verticale.

Le calcul des indices de Maslov est donné par les règles de la figure 3.

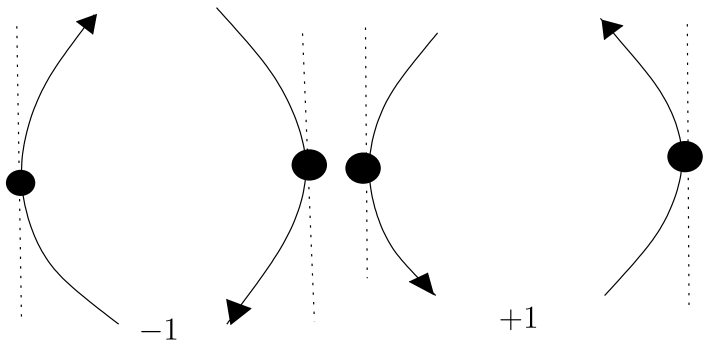

FIGURE 3. L'indice de Maslov en dimension 1

12. Relations entre indices de Morse et de Maslov

Si L est un lagrangien strictement convexe par rapport aux dérivées et γ une extrémale de $\int L$, on a la relation suivante entre indices de Morse et de Maslov due à Arnold [**Arn67**]. La preuve ci-dessous est inspirée de [**Col75**].

PROPOSITION 12. *Soit $T > 0$ tel que $\gamma(T)$ n'est pas conjugué de $\gamma(0)$ et $\tilde{\gamma}$ la courbe associée à γ tracée sur Λ_{x_0} (avec $x_0 = \gamma(0)$). On considère $\varepsilon > 0$ petit tel que $\tilde{\gamma}(\varepsilon) \notin \Sigma$. Alors l'indice de Maslov de $\tilde{\gamma}$ sur $[\varepsilon, T]$ est égal à l'opposé de l'indice de Morse $\nu(T)$.*

La démonstration est simple si on utilise la fonction phase $\int_0^t L(\gamma, \gamma')du$ et le théorème 18.

On peut aussi en déduire une démonstration du théorème d'indice de Morse grâce à la :

PROPOSITION 13. *Soit H un hamiltonien dont la dérivée seconde par rapport à ξ est définie positive, soit $z(t)$ une trajectoire de $\mathcal{X}_H$ contenue dans une variété lagrangienne $L \subset \{H = E\}$. Les points conjugués sont les valeurs de t pour lesquelles le plan tangent à L en $z(t)$ n'est pas transverse à la verticale. Ces points sont isolés et l'indice de Maslov de la courbe $z(t) \subset L$ est l'opposé de la somme des multiplicités de ces points.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du :

LEMME 4. *Soit $A(t)$ un chemin dans les formes quadratiques sur E tel que $\dim \ker A(0) = k$ et $A'(0)$ est défini positive sur $\ker A(0)$. Si L_t est le graphe de l'application linéaire symétrique associée à $A(t)$ et $M = E \oplus 0$, $L_t \cap M = 0$ pour $t = \pm\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit et l'indice de Maslov de $t \to L_t$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ vaut k.*

Preuve.–

Le lemme est immédiat si $k = 1$. Sinon, on déforme $A(t)$ en $B(t)$ à l'intérieur de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ de façon à ce que les valeurs propres de $B(t)$ s'annulent avec des dérivées non nulles et des espaces propres de dimension 1. L'indice de Maslov pour $B(t)$, et donc aussi pour $A(t)$ vaut k, puisque le nombre algébrique de sauts de $-$ à $+$ pour les valeurs propres doit être k.

$\square$

Commentaire : l'identité entre indice de Morse et de Maslov est montrée par Arnold en identifiant ces indices comme nombres d'intersection et donc en utilisant le théorème de Morse. Ici la démarche est différente : l'identité des 2 indices vient de la définition de l'indice de Morse et de l'utilisation de l'intégrale d'action comme fonction génératrice à la Hörmander. On a alors le théorème de Morse comme sous-produit d'un argument voisin de celui d'Arnold.

13. Un exemple : l'optique géométrique

13.1. L'équation eiconale. On s'intéresse à des solutions de grandes fréquences de l'équation des ondes dans $X = \mathbb{R}^N$ ($N = 2,\ 3$) avec un indice de réfraction non constant donné par une fonction $n(x)$. Si on note c la vitesse de la lumière dans le vide, cette équation s'écrit :

$$\Delta u - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ .$$

On cherche des solutions périodiques en t de la forme :

$$u(x,t) = a(x,t)e^{i\omega(t-S(x))} \ ,$$

où l'on suppose ω très grand.

L'élimination des termes en ω^2 conduit à l'équation dite *eiconale* :

$$\sum_{j=1}^{N} (\frac{\partial S}{\partial x_j})^2 = \frac{n(x)^2}{c^2} \ .$$

Le graphe de la différentielle $(x, dS(x))$ de S est donc une sous-variété lagrangienne Λ de $T^\star(X)$ contenue dans l'hypersurface :

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}$$

où le hamiltonien H est défini par

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{c^2}{n(x)^2}\sum_j \xi_j^2 \ .$$

Réciproquement si on a une telle variété lagrangienne, elle donne localement lieu à une solution $S(x)$ de l'équation eiconale pourvu que la restriction à Λ de la projection canonique $\pi : T^\star(X) \to X$ soit un difféomorphisme local.

On est donc amené à dire qu'une variété lagrangienne $\Lambda \subset T^\star(X)$ est une solution généralisée de l'équation eiconale si elle est contenue dans $H(x,\xi) = \frac{1}{2}$.

Nous allons d'abord décrire la géométrie de ces solutions généralisées. Une telle variété est invariante par le flot du gradient symplectique $\mathcal{X}_H$ de H ; les trajectoires en question ou par extension leur projection sur X s'appellent *rayons lumineux.*

On peut en particulier construire des solutions généralisées de l'équation eiconale de la façon suivante :

on se donne une hypersurface S_0 de X (qui sera la surface $S = 0$). Il existe alors au dessus de chaque $x \in S_0$ 2 vecteurs $\pm\xi(x)$ tels que

$$i)\ \xi(x)_{|T_x(S_0)} = 0 \ ,$$
$$ii)\ H(x,\xi(x)) = \frac{1}{2} \ .$$

On fait un choix continu d'un tel $\xi(x)$ qui donne une sous-variété Σ_0 de $T^\star(X)$ isotrope, de dimension $n-1$, contenue dans $H(x,\xi) = \frac{1}{2}$ et de projection S_0. De plus le champ $\mathcal{X}_H$ est transverse à Σ_0, car c'est déjà vrai de sa projection sur X qui est transverse à S_0 (cette projection est même orthogonale à S_0).

Λ est alors la variété immergée dans $T^\star X$ par l'application

$$\Phi : \Sigma_0 \times \mathbb{R} \to T^\star(X) \ ,$$

définie par :

$$\Phi(x,\xi(x),t) = \varphi_t(x,\xi(x)) \ .$$

Etudions d'un peu plus près la géométrie de Λ. Si on veut, pour simplifier, on peut supposer dans la suite que n est constant.

Fronts d'onde.

La restriction à Λ de la forme $\sum_j \xi_j dx_j$ est fermée. Elle admet donc (au moins localement une primitive) dont les surfaces de niveaux sont les $\Sigma_t = \varphi_t(\Sigma_0)$. Les projections S_t des Σ_t ne sont pas forcément lisses (caustiques). Les fronts d'ondes sont les Σ_t (et parfois les S_t), t est défini à une constante additive près par la solution Λ.

Rayons lumineux.

Les trajectoires de $\mathcal{X}_H$ contenues dans Λ sont les rayons lumineux. Si n est constant, ce sont des droites. On a

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{c^2}{n^2}\xi_j$$

et donc

$$v^2 = \sum_j (\frac{dx_j}{dt})^2 = \frac{c^2}{n^2} \ .$$

La vitesse v de propagation le long des rayons lumineux est donc donnée par :

$$v = \frac{c}{n} \ .$$

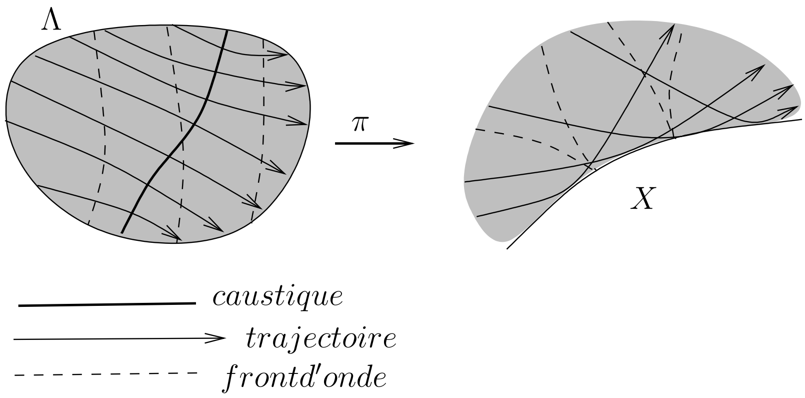

FIGURE 4. Variété lagrangienne et front d'ondes

Caustiques

Si W est le lieu singulier, ensemble des points de Λ où π n'est pas un difféomorphisme local, les rayons coupent W transversalement (points focaux) ; dans le cas où $n(x)$ est constant les points focaux sont les centres de courbure de S_0. La projection $\pi(W)$ est la caustique.

Principe de Fermat

L'hamiltonien $H(x, \xi)$ est obtenu par transformée de Legendre de la métrique riemannienne (conforme à l'euclidienne)

$$ds^2 = \frac{n^2}{c^2} ds_0^2 \ ;$$

et donc les rayons lumineux sont les géodésiques pour la longueur donnée par :

$$\int n(x) ds_0 \ ,$$

cette intégrale s'appelle en optique *chemin optique* et le principe de Fermat dit que les rayons lumineux sont les extrémales de cette longueur, qui est proportionnelle au temps nécessaire à la lumière pour aller d'un point à un autre, en vertu de la formule $v = c/n$.

13.2. Principe de Huyghens et fonctions génératrices. On s'intéresse maintenant à la représentation de Λ au moyen de fonctions phases et pour fixer les idées, on suppose que n/c est constant et égal à 1. Les rayons lumineux sont donc les normales à S_0.

Pour t petit, la fonction $S(x)$ est bien définie : ses surfaces de niveaux sont les hypersurfaces parallèles à S_0. Lorsque t augmente on rencontre des points focaux (centres de courbure de S_0).

Soit $d(x, \theta), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \theta \in S_0$, la distance euclidienne de x à θ.

Pour chaque θ, la fonction $d(., \theta)$ est solution de l'équation eiconale. Les fronts d'ondes sont les sphères de rayons $a > 0$ centrées en $\theta \in S_0$.

Assertion : la famille $d(x, \theta)$ est une famille génératrice pour Λ (ou du moins la partie $t > 0$ de Λ). Cela résulte d'un calcul immédiat.

Ceci est évidemment relié au principe de Huyghens : donnons-en une forme plus générale. Soit $\varphi(x, \theta)$ une famille de solutions de l'équation eiconale. Considérons pour chaque valeur de a, l'enveloppe S_a des fronts (projetés) $\varphi(x,\theta) = a$. Cette enveloppe est donnée par :

$$\varphi(x,\theta) = a, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \ .$$

On obtient ainsi une variété lagrangienne Λ solution de l'équation eiconale, définie par la famille $\varphi(x,\theta)$ et dont les fronts d'ondes sont les S_a.

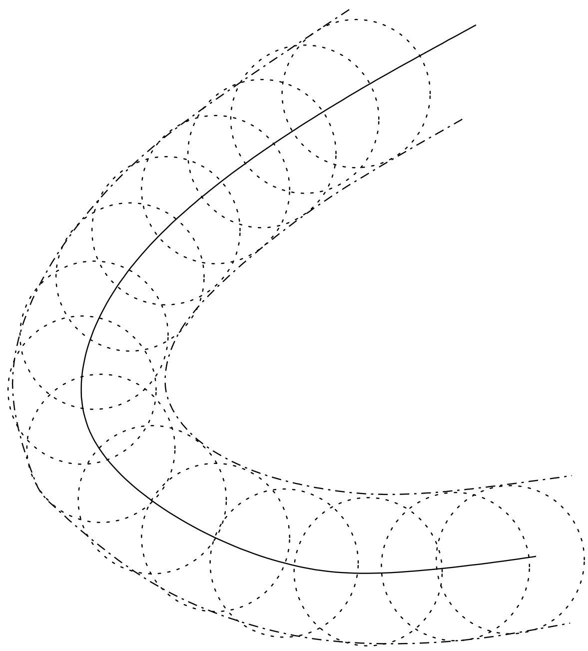

FIGURE 5. Principe de Huyghens

13.3. Miroirs. On se donne maintenant une hypersurface $\mathcal{M}$ (le miroir) supposée transversale aux rayons lumineux de Λ.

Soit R l'hypersurface de Λ qui se projette sur $\mathcal{M}$. Pour tout $(x, \xi(x)) \in R$, il existe un unique $(x, \tilde{\xi}(x))$ qui induit 0 sur $T_x\mathcal{M}$, qui vérifie $H(x, \tilde{\xi}(x)) = 1/2$ et qui est différent de $\xi(x)$. L'ensemble des $(x, \tilde{\xi}(x))$, $x \in \mathcal{M}$ est donc une sous-variété isotrope de $T^\star(X)$ contenue dans $H = 1/2$ et de dimension $n-1$. Par propagation par le flot, elle engendre une nouvelle solution de l'équation eiconale $\tilde{\Lambda}$, qui est la obtenue à partir de Λ par réflexion sur le miroir $\mathcal{M}$. Il est facile de vérifier que les rayons lumineux sont bien obtenus par la loi usuelle de l'optique géométrique.

On peut du reste obtenir facilement une famille de fonctions phases. Si $\Lambda = \Lambda_\varphi$, on pose (dans le cas $n/c = 1$) $\psi(x, \alpha, \theta) = \varphi(\alpha, \theta) + d(x, \alpha)$, où $\alpha \in \mathcal{M}$.

14. Introduction à KAM

KAM sont les initiales de Kolmogorov, Arnold et Moser. L'idée originale remonte à Kolmogorov (1954) (voir [**Kol54**]) traduit dans [**AM78**]) et les premiers énoncés ont été donnés par Arnold [**Arn63**] et Moser [**Mos62**] en 62-63. Pour des présentations récentes, voir [**Bos86**] ou [**LM88**]. Depuis Poincaré, on sait que les systèmes hamiltoniens génériques ne sont pas intégrables. Il est donc important d'étudier les systèmes proches des systèmes intégrables. Le théorème de Birkhoff assure l'existence d'orbites fermées, les théorèmes KAM assurent l'existence de tores invariants surlesquels la dynamique est quasi-périodique.

14.1. Systèmes intégrables. On va se placer dans un cadre C^∞ (comme Moser), mais la théorie analytique développée par Arnold est aussi intéressante. Soit (Z, ω) une variété symplectique de dimension $2n$.

DÉFINITION 24. *Un hamiltonien $H\ : Z \to \mathbb{R}$ est dit complètement intégrable s'il existe de n fonctions $F_j : Z \to \mathbb{R}$ en involution pour le crochet de Poisson, fonctionnellement indépendantes presque partout, telles que l'application* moment *$F = (F_j) : Z \to \mathbb{R}^n$ est propre et qu'il existe une fonction Φ de n variables avec $H = \Phi(F_1, \cdots, F_n)$.*

La variété Z est ainsi munie d'une action de $\mathbb{R}^n$ presque partout libre dont les orbites sont contenues dans les fibres de l'application moment. Si a_0 est une valeur non critique de F, la fibre $F^{-1}(a_0)$ est une réunion de tores lagrangiens sur lesquels la dynamique est linéarisable.

Il existe de nombreux exemples classiques : le problème à 2 corps pour un potentiel central, le flot géodésique sur un ellipsoïde. Il y a aussi des exemples en dimension infinie : l'équation de Korteweg-de Vries.

14.2. Intégrabilité du billard elliptique. Soit E une ellipse de foyer F et F'. Soit D_1 une droite qui coupe E. On pose $I(D_1) = d(F, D_1).d(F', D_1)$. Si D_2 est réfléchie en $M \in E$ de D_1 par la loi *angle de réflexion = angle d'incidence*, $I(D_1) = I(D_2)$. La preuve est purement géométrique et utilise uniquement le fait que les angles de (D_1, MF) et (D_2, MF') sont égaux. Il faut identifier 2 paires de triangles semblables : si on note m_1, m_2 (resp. m_1', m_2') les projections orthogonales de F (resp. F') sur D_1 et D_2, les triangles m_1FM et $m_2'F'M$ d'une part, m_2FM et $m_1'F'M$ d'autre part, sont semblables. Donc

$$\frac{Fm_1}{FM} = \frac{F'm_2'}{F'M}, \ \frac{Fm_2}{FM} = \frac{F'm_1'}{F'M} \ ,$$

d'où la relation cherchée.

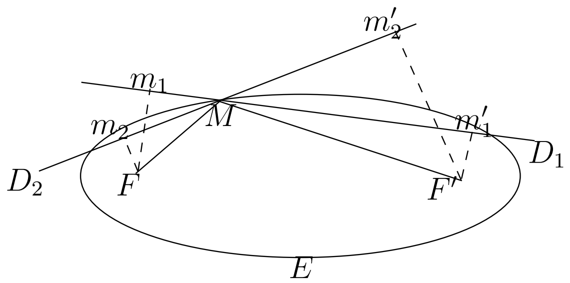

FIGURE 6. Intégrabilité du bilard elliptique

14.3. Coordonnées actions-angles.

THÉORÈME 19. *Soit (Z,ω,F) un système complètement intégrable avec F propre. Soit $\Lambda_a \subset F^{-1}(a)$ une feuille connexe compacte du feuilletage lagrangien. Alors Λ est un tore de dimension n sur lequel la dynamique est quasi-périodique. Il existe des cooordonnées $(x_1,\cdots,x_n)\in T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ telles que le flot Φ_t de H est donné par*

$$\Phi_t(x_1,\cdots,x_n)=(x_1+t\omega_1,\cdots,x_n+t\omega_n)$$

où $\Omega(a)=(\omega_j(a))$ est un vecteur constant sur Λ_a.

Preuve.–

Les vecteurs $\mathcal{X}_{F_j}$ commutent et sont indépendants en tout point de Λ_a. Ils définissent donc une action de $\mathbb{R}^n$ localement libre. Le groupe d'isotropie est donc un réseau et Λ_a un tore sur lequel les dynamiques des $\mathcal{X}_{F_j}$ et de $\mathcal{X}_H=\sum\frac{\partial\Phi}{\partial t_j}\mathcal{X}_{f_j}$ sont quasi-périodiques.

□

On peut même décrire un système de coordonnées semi-globales (θ,I) appellées *coordonnées actions-angles.*

THÉORÈME 20. *Soit (Z,ω,F) un système complètement intégrable avec F propre. Soit $\Lambda_0\subset F^{-1}(a_0)$ un tore lagrangien invariant. Il existe :*

- *un voisinage invariant U de Λ_0.*
- *Un difféomorphisme symplectique χ de U sur un ouvert $V=\{(\theta,I)\in T^\star T^n \mid |I-I_0|\le r\}$*

tels que les tores $\chi(\Lambda_a)$, pour a proche de a_0, soient les tores $I=$ constante.

Les actions I_j sont données par $I_j(z)=\int_{\gamma_j(z)}\xi dx$ où $\gamma_j(z)$ est un lacet de la variété Λ_a qui passe par z dont l'image par χ est homotope au j-ème lacet de base de T^n. Les $F_j\circ\chi^{-1}$ sont des fonctions des I_j ; en particulier $H\circ\chi^{-1}=K(I_1,\cdots,I_n)$.

Preuve.–

(1) *Le cas de la dimension* 1 *:* soit H un hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 2 supposé propre. Soit $[E_0,E_1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de valeurs critiques de H. On suppose que $\Sigma=H^{-1}([E_0,E_1])$ est connexe. C'est alors un anneau feuilleté par les trajectoires $\gamma_E=H^{-1}(E)$ de $\mathcal{X}_H$. Soit $E\to\delta(E)$ un arc transverse aux γ_E. Soit $\chi(E,t)=\varphi_t(\delta(E))$, alors χ est un difféomorphisme canonique de
$$\{(E,t)\mid E_0\le E\le E_1,\ 0\le t\le T(E)\}$$
(où $T(E)$ est la période de γ_E) muni de $\omega_0=dE\wedge dt$ sur (Σ,ω). Le caractère canonique vient de $\omega(\mathcal{X}_H,\delta'(E))=-1$. On en déduit, en posant $I(E)=\int_{\gamma_E}\xi dx$ que $I(E)-I(E_0)=\int_{E_0}^{E}T(E)dE$ et que $I'(E)=T(E)$. Donc, si on prend $H=I$, on a $T(E)=1$.

(2) *Le flot hamiltonien des intégrales d'action :* on peut supposer que U est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle de $T^\star T^n$ muni de coordonnées canoniques (x,ξ) telles que Λ_0 est la section nulle. Soit $z_0(t)=(t,0,\cdots,0;0)$. Montrons

que $\gamma_0 : t \to z_0(t)$ est une orbite de l'hamiltonien d'action $I_1 = \int_{\gamma_1(z)} \xi dx$. Pour cela, il suffit de montrer que γ_0 est une extrémale de $A(\gamma) = \int_\gamma (\xi dx - I_1 dt)$. Les variations *horizontales* ne changent pas $A(\gamma)$. Soit $\gamma_\varepsilon(t) = (t, 0, \cdots, 0; \varepsilon\xi(t))$ une variation verticale. On peut supposer que le chemin γ_z sur lequel sera calculé $I_1(z)$ se projette sur $(t, 0)$. $A(\gamma)$ se calcule donc dans $T^\star(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On est ainsi ramené au cas de la dimension 1: le champ hamiltonien de I_1 le long de γ_0 est alors d/dt et de l'égalité $d\xi \wedge dx = dI_1 \wedge dt$ le long de γ_0, on déduit $dI/d\xi = 1$ sur γ_0. Cela suffit à conclure.

(3) *Les coordonnées actions-angles :* de ce qui précède, on déduit que $dI_1, dI_2, \cdots$ sont linéairement indépendantes et que les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{I_j}$ engendrent une action libre de T^n. On choisit alors comme coordonnées les I pour déterminer le tore invariant et, sur chaque tore, des coordonnées θ associées à cette action et telles que $\theta = 0$ soit une section lagrangienne. De l'invariance de ω par les translation en θ et des caractères lagrangiens des variétés $\theta = Constante$ et $I = Constante$, on déduit que $\omega = \sum a_{i,j}(I) dI_j \wedge d\theta_j$. La condition $\mathcal{X}_{I_i} = \partial_{\theta_i}$ assure que $a_{i,j} = \delta_{i,j}$.

□

Dans les coordonnées actions-angles, la dynamique est très simple : si

$$\omega(\xi) = (\frac{\partial H}{\partial \xi_j}) \ ,$$

elle s'écrit

$$\varphi_t(x, \xi) = (x + t\omega(\xi), \xi) \ .$$

Un corollaire de la preuve précédente est le suivant :

Corollaire 2. *Soit Λ_0 une feuille lagrangienne complète d'un système complètement intégrable (pas nécessairement propre) ne contenant pas de points critiques de F, soit γ_0 un lacet non trivial du cylindre $\Lambda_0 = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$ et γ_a un lacet homotope à γ_0 tracé sur Λ_a pour a voisin de a_0. Alors les trajectoires de l'hamiltonien $H(z) = \int_{\gamma_{F(z)}} \xi dx$ sont de période 1 contenues dans $\Lambda_{F(z)}$ et homotopes à $\gamma_{F(z)}$.*

14.4. Conditions diophantiennes. Un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$ est dit *diophantien* s'il existe $C > 0$ et $\alpha > n - 1$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0, \ | < k|\omega > | \geq C\|k\|^{-\alpha} \ . \tag{3}$$

Si α est fixé et $R > 0$ donné, l'ensemble des $\omega \in B(0, R)$ qui ne satisfont pas l'équation (3) a une mesure de Lebesgue $O(C)$. Autrement dit, pour presque tout ω, il existe $C > 0$ tel que l'équation (3) soit satisfaite.

Exemple : si r est algébrique de degré p et non rationnel, $(r, 1)$ satisfait (3) avec $\alpha = p$.

14.5. Enoncés de type KAM.

Lemme 5. *Soit Λ un tore lagrangien invariant sur lequel la dynamique de $\mathcal{X}_H$ est quasi-périodique avec ω diophantien.*

Il existe des coordonnées (x_j, ξ_j) canoniques telles que Λ soit le tore $\xi = 0$ et que $H = a + \omega.\xi + Q(\xi) + O(\xi^3)$, où $Q(\xi)$ est une forme quadratique.

Preuve.–

D'après Weinstein, il existe un difféomorphisme canonique d'un voisinage de Λ sur un voisinage de la section nulle de $T^\star\Lambda$. On a alors $H = a + \omega\xi + R(x,\xi)$ avec $R = O(\xi^2)$ (identification de $\mathcal{X}_H$ avec $\sum \omega_j \frac{\partial}{\partial x_j}$). On cherche alors une transformation canonique qui fixe Λ et change R en $Q(\xi) + O(\xi^3)$. On peut chercher χ comme flot à l'instant 1 de $\mathcal{X}_{S(\xi,x)}$ avec $S = O(\xi^2)$. On a alors

$$\chi(x,\xi) = (x + O(\xi), I - \frac{\partial S}{\partial x} + O(\xi^3)). \tag{4}$$

Donc

$$H \circ \chi = \omega\xi - \omega.\frac{\partial S}{\partial x} + R(x,\xi) + O(\xi^3)\ . \tag{5}$$

Il faut donc résoudre

$$R(x,\xi) - \omega\frac{\partial S}{\partial x} = Q(\xi) + O(\xi^3)\ . \tag{6}$$

En prenant les termes d'ordre 2 dans les séries de Taylor en ξ, il vient

$$R_{i,j}(x) - \omega.\frac{\partial S_{i,j}(x)}{\partial x} = Q_{i,j}\ . \tag{7}$$

On développe $R_{i,j} = \sum r_l e^{ilx}$ et $S_{i,j} = \sum s_l e^{ilx}$ en séries de Fourier et on pose $Q_{i,j} = r_0$, et

$$s_l = \frac{r_l}{< l|\omega >}\ .$$

La condition diophantienne sur ω montre que S est C^∞.

□

On introduit alors la condition :
($\star$) La forme quadratique Q est non dégénérée.
On a alors le :

THÉORÈME 21. *Soit H ayant un tore lagrangien Λ invariant avec dynamique quasi-périodique diophantienne ω et vérifiant ($\star$).*

L'hamiltonien $H + \varepsilon K$ admet pour ε assez petit un tore lagrangien invariant proche de Λ et avec une dynamique conjuguée à celle de H.

14.6. Méthode de Newton. La méthode de preuve introduite par Moser et perfectionnée par plusieurs auteurs fait appel à un théorème de fonctions implicites avec pertes de dérivées dans les espaces de Fréchet. L'idée est d'employer une méthode de Newton avec un lissage.

Montrons comment écrire et résoudre le problème linéarisé. On a donc $H_\varepsilon = H + \varepsilon K$. On suppose

$$H = \omega\xi + Q(\xi) + O(\xi^3)$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée. On cherche une transformation canonique

$$\chi_\varepsilon(x,\xi) = (x + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial x} + O(\varepsilon^2), \xi - \varepsilon\frac{\partial S}{\partial x} - \varepsilon V + O(\varepsilon^2))$$

avec $S = S_0 + \sum \xi_k S_k + O(\xi^2)$ telle que

$$H_\varepsilon \circ \chi_\varepsilon = H + \varepsilon C + O(\varepsilon^2) + O(\xi^2)\ .$$

Dans ce cas, il est clair qu'au premier ordre en ε les dynamiques de H sur T_0 et de H_ε sur $\chi_\varepsilon(T_0)$ sont conjuguées.

Le calcul mène à un système d'équation linéaires pour les dérivées partielles de S_0 et des S_k par rapport à x que l'on peut résoudre grâce au fait que Q est non dégénérée et ω diophantien.

14.7. Tores de dimension plus petite. Il existe des théorèmes de type KAM pour des tores quasi-périodiques diophnatiens de dimension $k < n$ avec une condition d'hyperbolicité (de type Anosov) pour la dynamique transverse.

14.8. Forme normale de Birkhoff. On a une forme normale de Birkhoff classique près de Λ (comparer à [**Col77a**] et [**Col73a**]). La forme normale de Birkhoff classique est de la forme

$$H \sim H(\Lambda) + \omega\xi + \sum_{i=2}^{\infty} Q_l(\xi)$$

où Q_l est homogène de degré l en ξ. Donc formellement le système est complètement intégrable près de Λ.

14.9. Perturbations des systèmes CI : le cas classique. Les hypothèses de non dégénérescence :

(ND) $\xi \to [\omega(\xi)]$ est une submersion de Ω sur un ouvert du projectif $P(\mathbb{R}^n)$.

ou (et)

(NDE) l'application $\xi \to [\omega(\xi)]$ est un difféomorphisme de chaque couche d'énergie $H = E$ sur un ouvert du projectif.

Lorsque $\omega(p)$ est multiple d'un vecteur entier les trajectoires sont périodiques : on a une famille à $n-1$ paramètres de trajectoires périodiques, ce qui n'est pas générique ainsi que l'a observé Poincaré.

Par perturbation de H cette famille éclate en général en un nombre fini de trajectoires périodiques : du point de vue calcul des variations, on a une variété critique non dégénérée au sens de Bott sous l'hypothèse (ND).

14.10. Le théorème KAM de Lazutkin-Poeschel. Le théorème KAM affirme que, sous l'hypothèse (ND), les tores sur lesquels le ω est suffisamment irrationnel sont préservés par une petite perturbation, plus précisément :

soit $\beta > n-1$ et $C > 0$, on définit

$$K_{C,\beta} = \{\xi \mid \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0,\ | < k|\omega(\xi) > | \geq C\|k\|^{-\beta}\}\ .$$

Alors, il est facile de voir que $|\Omega \setminus K_{C,\beta}| = O(C)$.

Soit $H_\epsilon = H + \epsilon K(x,\xi)$, alors les tores correspondant à $\xi \in K_{C,\beta}$ continuent à exister pourvu que $\epsilon = O(C^2)$.

En fait, on a un résultat beaucoup plus précis du à Lazutkin et généralisé par Pöschel : il existe des coordonnées actions-angles telles que dans ces coordonnées H_ϵ soit seulement fonction de p sur $T^n \times K_{C,\beta}$.

14.11. Le cas de la dimension 2. En dimension 2, sous l'hypothèse (NDE) sur chaque couche de niveau $K_1 \cap \{H(p) = E\}$ est un Cantor dont le complémentaire a une infinité de composantes connexes. C'est dans ces composantes que vont se trouver les trajectoires périodiques de l'hamiltonien perturbé.

14.12. Applications.

- *La stabilité des orbites périodiques elliptiques génériques en dimension 2.*

  Soit γ une trajectoire périodique d'un système hamiltonien à 2 degrés de liberté. γ ne peut être stable au sens de Liapounov que si l'application de Poincaré P_γ est elliptique. Une des conséquences des théorèmes KAM est l'existence de courbes invariantes entourant l'origine dans la section de Poincaré dès que le terme de twist dans la forme normale de Birkhoff de P_γ est non nul. Les disques bordés par ces courbes forment une base de voisinage du centre de la section de Poincaré invariante par P_γ montrant ainsi la stabilité au sens de Liapounov de l'orbite.
- *L'hypothèse ergodique n'est pas satisfaite pour un système hamiltonien générique.*

  En effet, si un hamiltonien admet une orbite elliptique (ce qui est une condition satisfaite dans un ouvert non trivial de l'ensemble des hamiltoniens), il y aura génériquement au voisinage de cette orbite une région invariante de mesure > 0 : la réunion des tores KAM.
- *Les caustiques des billards convexes de dimension 2.*

  Lazutkin a appliqué une version ad'hoc de KAM pour montrer qu'un billard bidimensionnel dont le bord est à courbure partout > 0 admet une famille cantorienne de caustiques s'accumulant sur le bord.

14.13. Problèmes. La théorie KAM a été étendue avec succès à de nombreux cas de dimension infinie, comme les perturbations de KdV.

La diffusion d' Arnold : Arnold a imaginé un mécanisme laissant la porte ouverte à la non stabilité des orbites elliptiques des systèmes hamiltoniens à plus de 2 degrés de liberté.

La théorie d'Aubry-Mather est une extension de la théorie KAM qui laisse la place à des ensembles invariants non lisses, de nature cantorienne. Lorsqu'on perturbe un système intégrable les tores KAM vont progressivement disparaitre, leur trace sera des ensembles de type Aubry-Mather.