

Un exemple de problème inverse : la méthode d'imagerie passive en sismologie

Yves Colin de Verdière
Institut Fourier (Grenoble)

IREM, Col de Porte, 15 avril 2011

Qu'est ce qu'un problème inverse ?

Exemples simples :

Maths : factoriser un nombre entier/multiplier 2 entiers ; calcul d'une primitive/calcul d'une dérivée ;

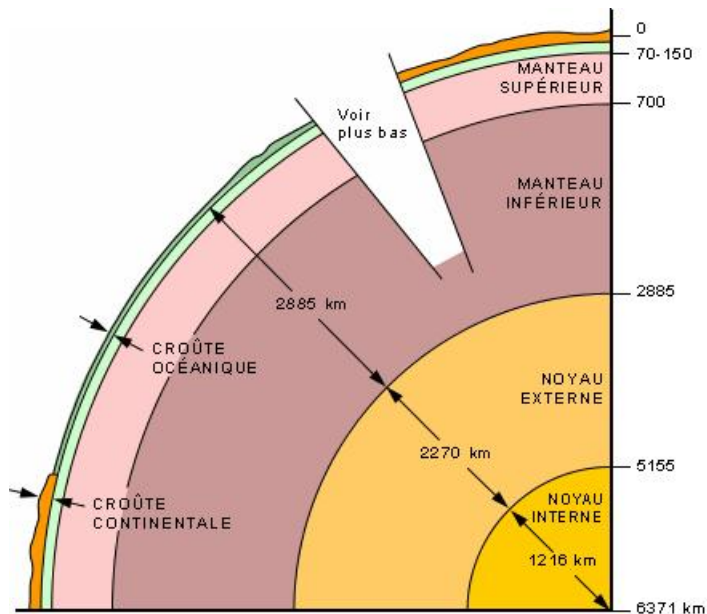
Sciences et techniques : imagerie, cryptographie (décodage), ressources minières,...

Plan :

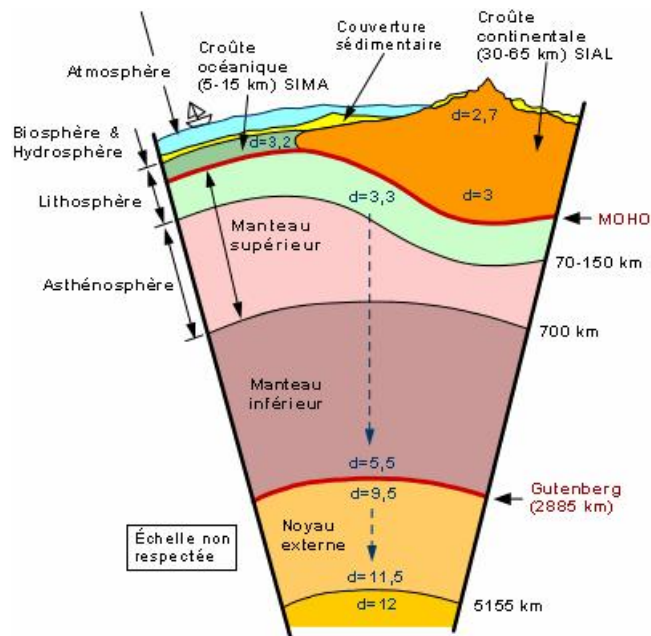
1. La méthode d'imagerie passive en sismologie : aspects physiques
2. Problèmes inverses
3. La méthode d'imagerie passive : aspects mathématiques

I. La méthode d'imagerie passive en sismologie : aspects physiques

La structure interne de la terre est connue grâce à la propagation des ondes sismiques. Notre connaissance de la structure globale est assez bonne.

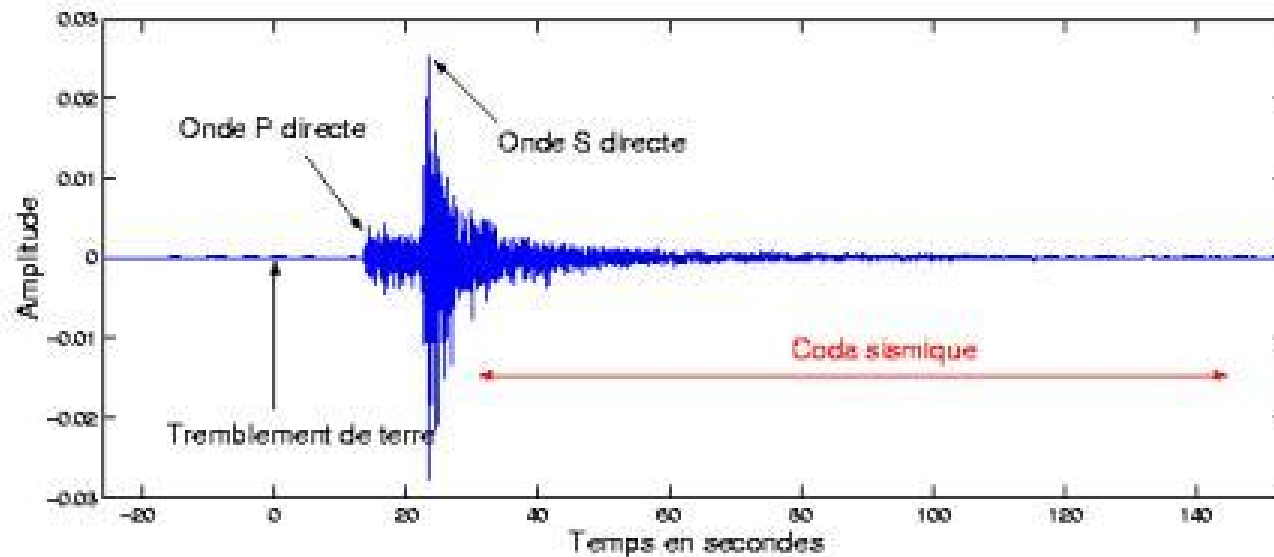


La structure de la croûte terrestre (jusqu'à environ 50km de profondeur) est plus difficile à déterminer et plus importante : prévision des séismes et des éruptions volcaniques, ressources minières, ...



A. La méthode classique :

on utilise les ondes créées par un **tremblement de terre ou une explosion**. Ces ondes se propagent à l'intérieur de la terre et leurs temps de propagation permet de déterminer la structure interne de la terre.



Cette méthode a des limitations intrinsèques :

- il y a des régions non sismiques
- la puissance engendrée par les explosions est limitée !

B. La méthode d'imagerie passive développée par Michel Campillo (LGIT, Grenoble) et ses collègues : ils se servent du *bruit sismique* qui est enregistré en permanence par les sismographes. Le **champ** (et pas uniquement son amplitude) enregistré en un unique point est un bruit qui ne contient pas d'information, mais les champs enregistrés par différentes stations sont **corrélés**. On calcule les fonctions de corrélation de ces bruits enregistrés sur de longs intervalles de temps (des mois) dans un réseau de stations.

Le bruit a différentes sources, les plus intéressantes étant celles créées par l'interaction de l'atmosphère et, surtout, des océans avec la surface de la terre.

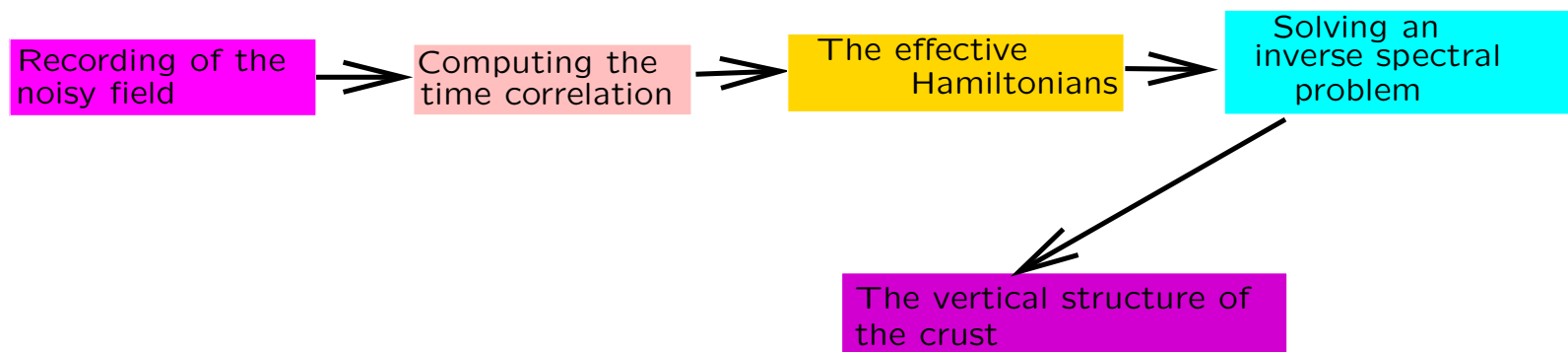
L'observation cruciale est que la fonction de corrélation $C_{A,B}(\tau)$ des bruits sismiques aux points A et B est très semblable au signal observé au point A quand il y a un tremblement de terre au point B qui s'est propagé durant le temps τ ; c'est-à-dire que $C_{A,B}(\tau)$ **ressemble à la fonction de Green de l'équation d'ondes.**

Cela veut dire que la fonction $C_{A,B}(\tau)$ "ressemble" au signal enregistré en A à partir d'un tremblement de terre en B .

Le schéma de reconstruction:

La corrélation se fait au travers des ondes de surfaces dont la relation de dispersion est non triviale : leur vitesse dépend de la fréquence. Cette relation de dispersion provient d'un Hamiltonien effectif de la propagation des ondes de surfaces.

Il reste à comprendre comment cet Hamiltonien effectif lit la structure verticale (stratifiée) de la croûte.



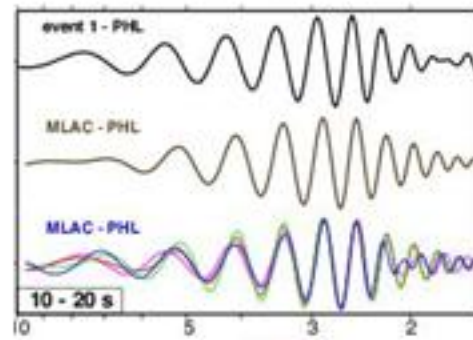
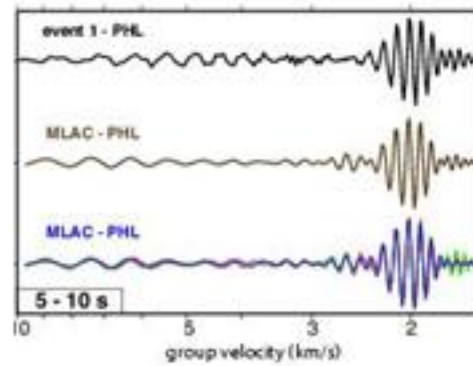
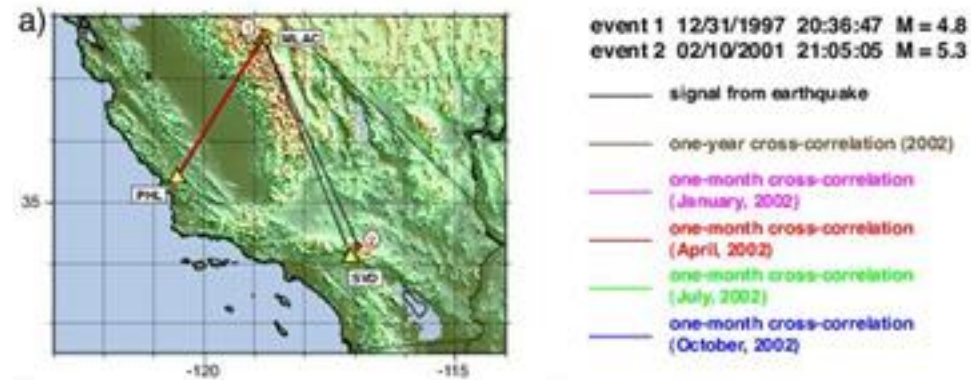
Ca marche ! Michel Campillo et son groupe du LGIT ont ainsi réussi à produire des cartes du sous-sol californien avec une meilleure résolution que ce qui était connu avant.

De plus la méthode permet de faire de l'imagerie en temps réel et de mesurer les déformations, par exemple, celles d'un volcan avant une éruption ; dans le cas du Piton de la Fournaise, Florent Brenguier et ses collaborateurs ont réussi en 2007 à détecter des variations de l'ordre de 0.1% de la vitesse des ondes et à trouver ainsi des précurseurs des éruptions (dilatation du volcan dû à l'augmentation de la pression du magma).

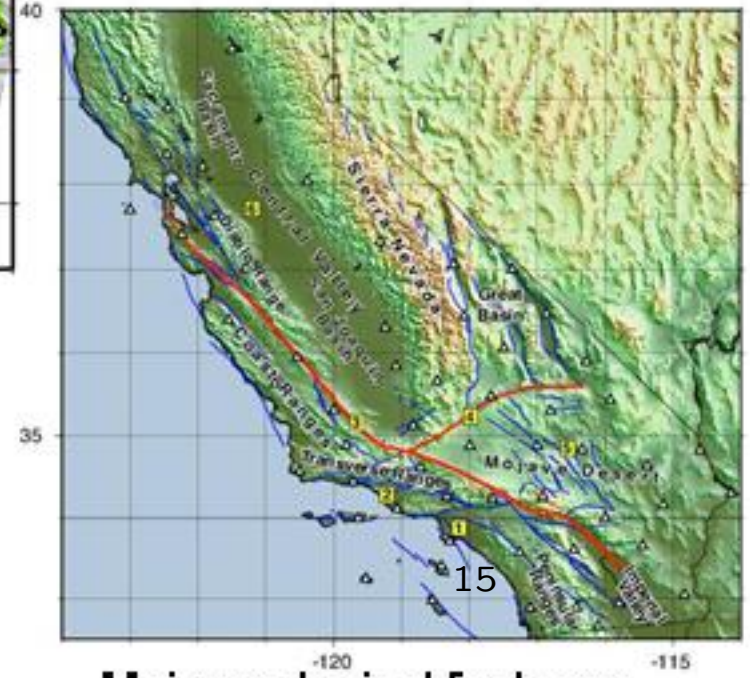
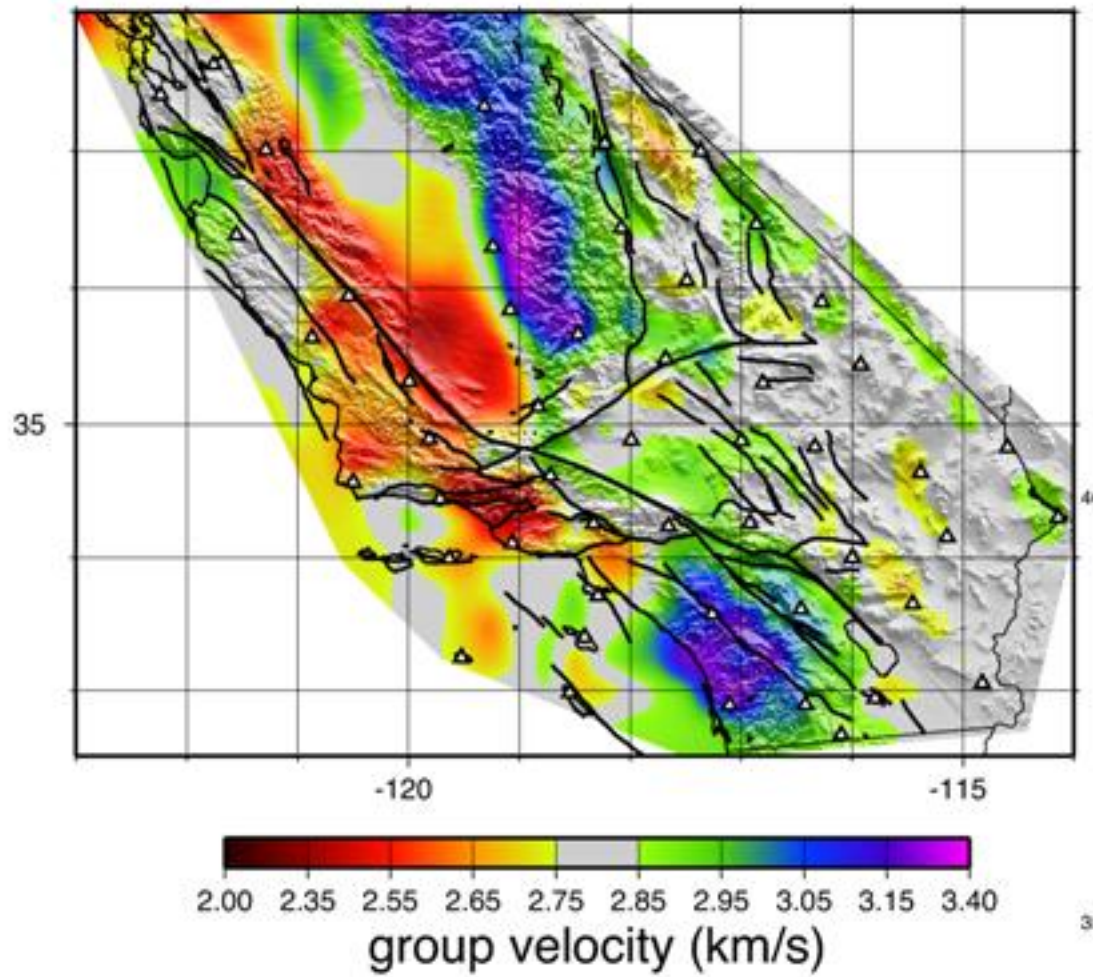
Quelques ordres de grandeur des ondes utilisées

- Vitesse des ondes : 1 à 4 km/seconde
- Périodes : 5 à 20 secondes
- Longueur d'ondes : 5 à 80 km
- Constante de Planck effective pour un continent de 5000km :
 $\hbar = 10^{-2}$ à 10^{-3}
- Durée des enregistrements : 1 mois à 1 an

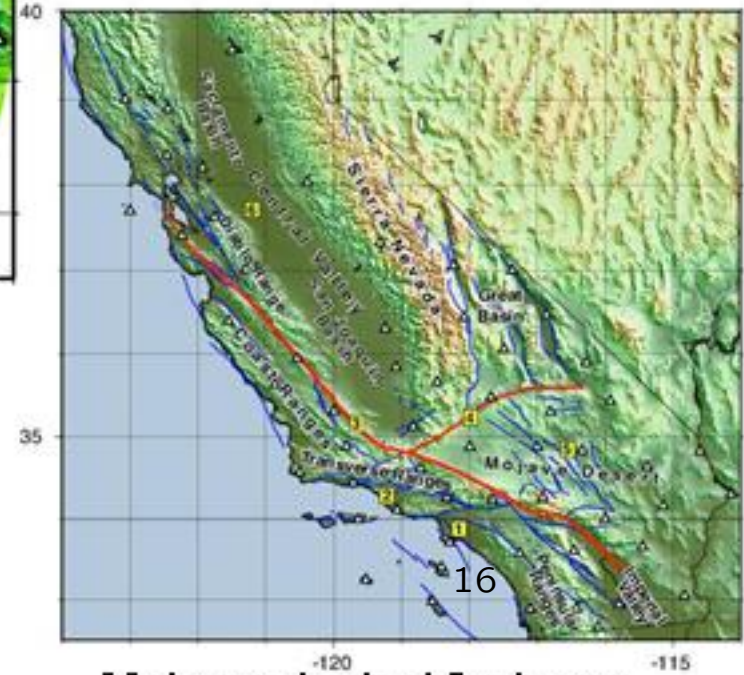
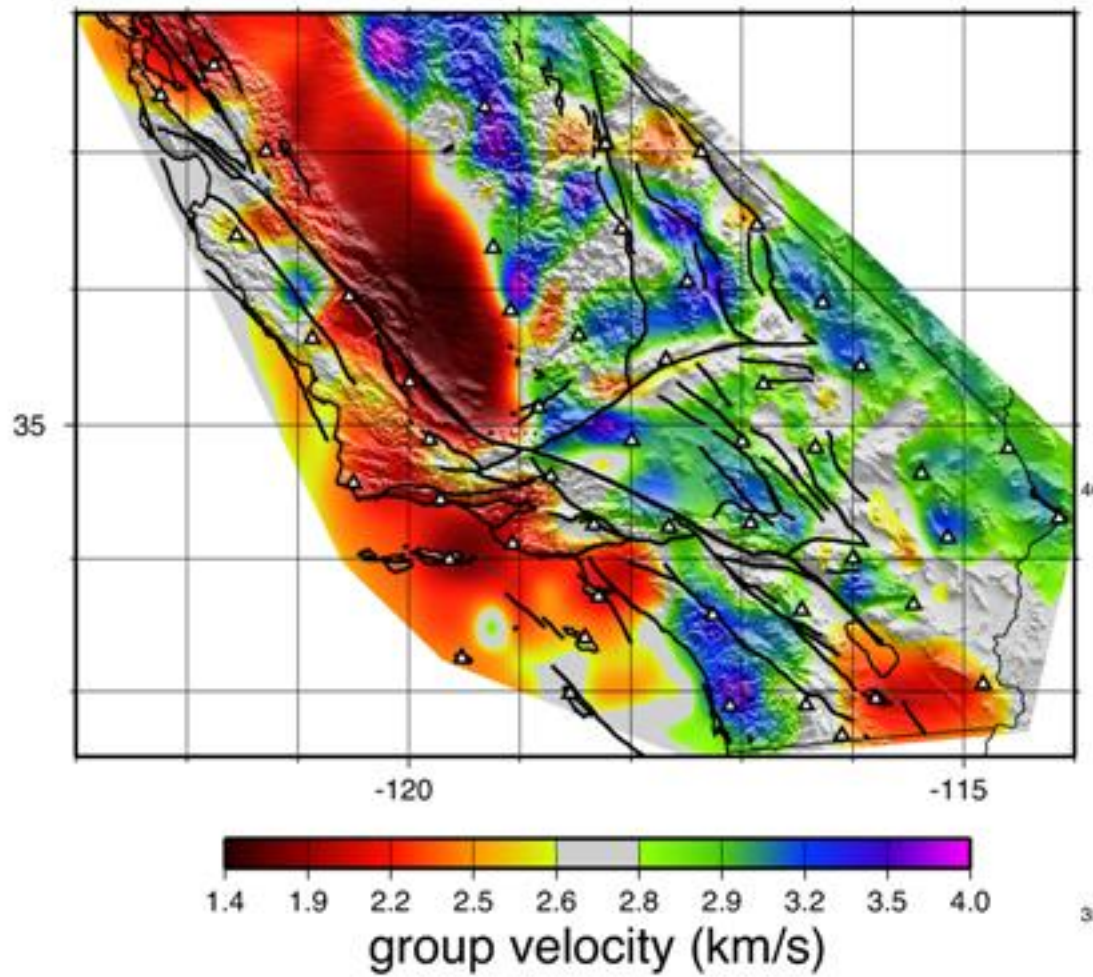
Comparison between earthquake records and reconstructed response



High resolution velocity map obtained from noise (Rayleigh 15 s ~ middle crust)



High resolution velocity map obtained from noise (Rayleigh 7.5 s)

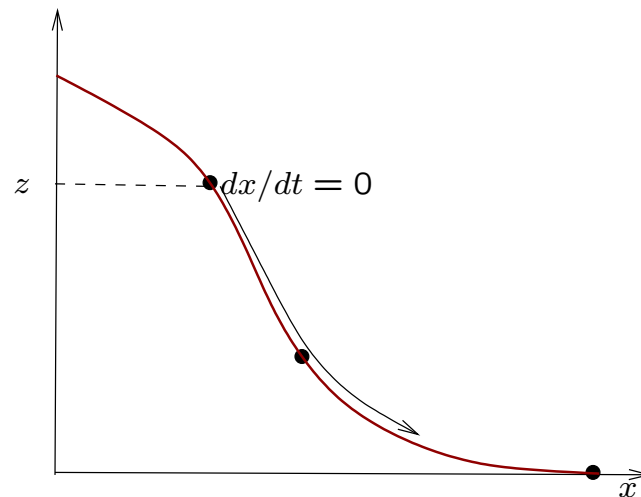


II. Problèmes inverses

1. Le problème du toboggan (Abel 1826) et la méthode de Wiechert-Herglotz en sismologie
2. Les problèmes spectraux inverses

1. Le problème inverse d'Abel : “Auflösung eine mechanischen Aufgabe” par Niels Abel (1826)

Pb : trouver la forme d'un toboggan connaissant la fonction $\tau(z)$ = temps d'arrivée à la hauteur 0 en partant à vitesse 0 de la hauteur z .



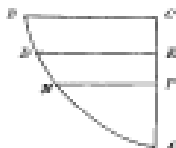
Niels Abel [1802-1829]

IX.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. 1, Berlin 1828.

Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit BC une droite horizontale et CA une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A , et soit a la hauteur EA . La quantité τ sera une certaine fonction de a , qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a .



Soit $AM = x$, $AP = x$, et soit t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM . D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{dx}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

\int_a^β désignant que les limites de l'intégrale sont $x = a$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$



Soit $z = V(s)$ la hauteur en fonction de l'abscisse curviligne (supposée monotone) ; on a (avec $V(0) = 0$) et en utilisant la conservation de l'énergie

$$E(t) = \dot{s}^2 + z = z_0 \quad :$$

$$\tau(z_0) = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}}$$

et si $s = W(z)$ est la fonction inverse de V :

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{W'(u)du}{\sqrt{z - u}} \quad .$$

Problème : retrouver W à partir de la fonction τ .

Solution : Si

$$\mathcal{A}(f)(z) := \int_0^z \frac{f(x)dx}{\sqrt{z-x}} ,$$

on a :

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}(f)(z) := \pi \int_0^z f(x)dx .$$

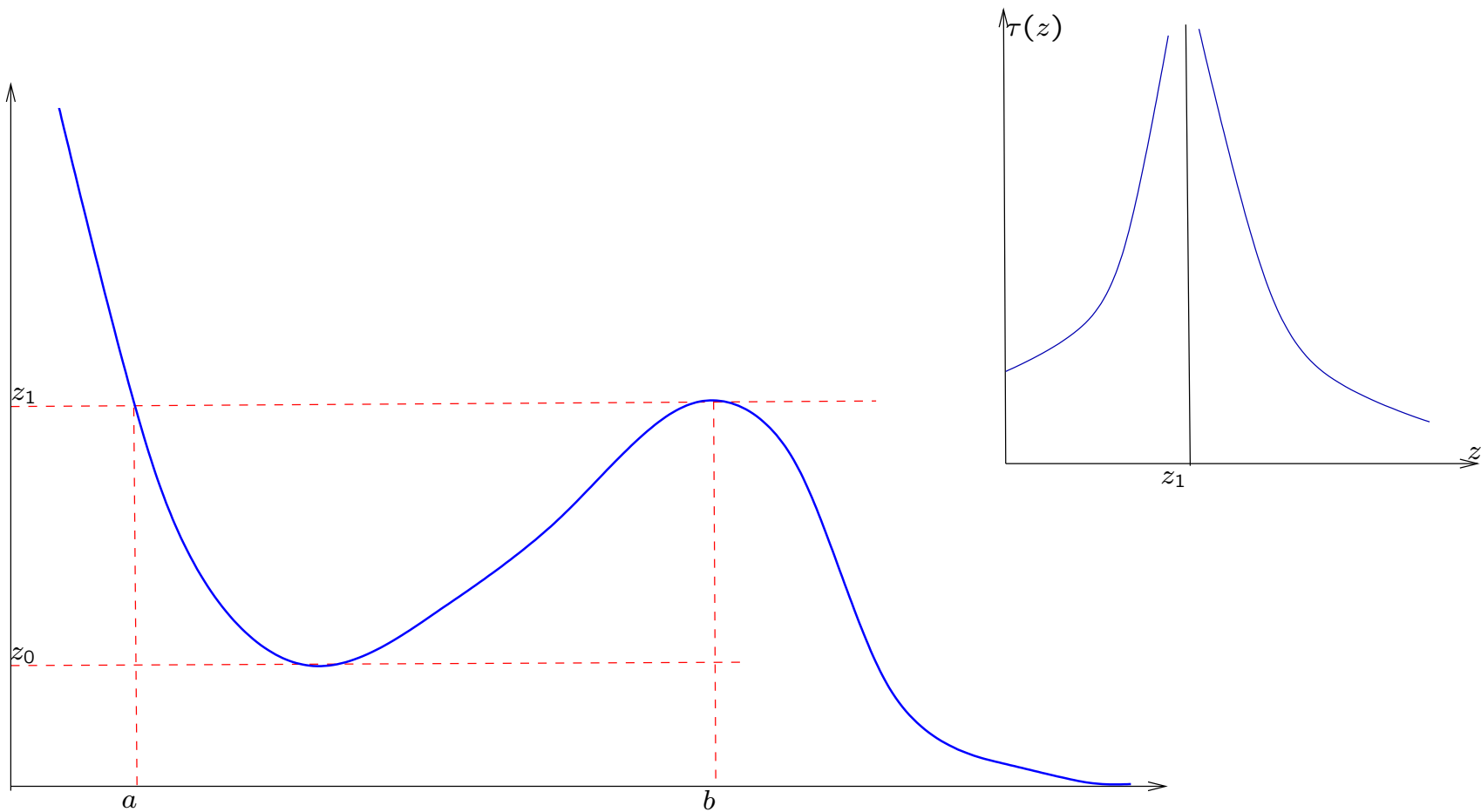
Donc $f = \pi^{-1}(\mathcal{A}^2 f)'$.

Exemple classique : si τ est constante, on trouve une cycloïde !

La fonction période :

Du résultat d'Abel, on déduit que, *si V est paire*, la fonction période $T(z) = 4\tau(z)$ en fonction de l'énergie détermine V . Ce n'est plus vrai si V n'est pas supposée paire, mais cela reste vrai d'un point de vue quantique !

Exercice : toboggan non monotone



Montrer que la forme du toboggan, en dehors du “puits” $]a, b[$, est déterminée par $\tau(z)$ et $T(z)$, ($z_0 < z < z_1$), la période des oscillations près du minimum local de V .

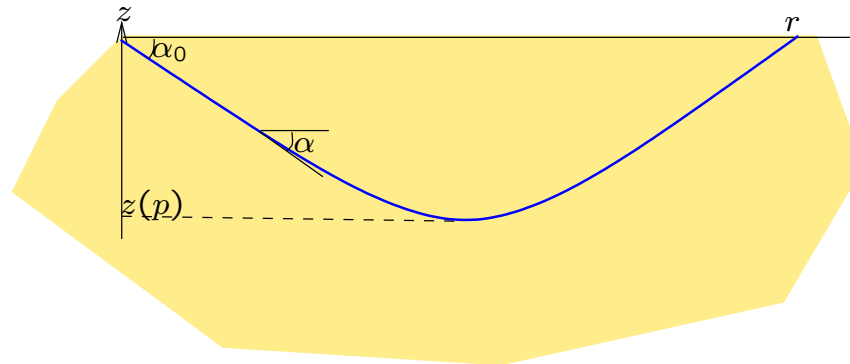
Une application de la transformation d'Abel : l'inversion de Wiechert-Herglotz (1907-1910)

on suppose, pour simplifier, que la surface de la terre est le plan $z = 0$ et que la vitesse $c(z)$ ($z < 0$) de propagation des ondes sismiques ne dépend que de z . Dans l'approximation de l'optique géométrique, la détermination des trajectoires des ondes (appelées aussi les "rais") peut se ramener à des quadratures ; on peut interpréter les rais comme les géodésiques de la métrique $ds/c(z)$, le temps de parcours étant alors la longueur de la géodésique. Supposons qu'un tremblement de terre ou une explosion a lieu à la surface au point $x = 0, z = 0$. On peut alors mesurer, en chaque point $(x, z = 0)$, le temps $T(x)$ d'arrivée de l'onde. Il s'agit de retrouver le profil $c(z)$ à partir de la connaissance de la fonction $T(x) = \tau(r)$ où $r = |x|$.

Cette fonction est déterminée par une expression de la forme :

$$\tau(r) = \int_{(\gamma)} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}{c(z)} dz$$

où (γ) est la géodésique correspondant au minimum de la fonctionnelle.



On suppose que c est une fonction strictement décroissante de z (les ondes se déplacent plus vite en profondeur).

L'équation des géodésiques est l'équation d'Euler-Lagrange associée à

$$\int \sqrt{1 + x'^2} / c(z) |dz| ,$$

soit

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{x'}{c(z) \sqrt{1 + x'^2}} \right) = 0 ,$$

ou encore :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\cos \alpha}{c(z)} \right) = 0$$

d'où l'on déduit, en définissant α comme l'angle de $\vec{0r}$ avec la géodésique et, en supposant pour simplifier $c(0) = 1$, que : $\cos \alpha = c(z) \cos \alpha_0$. On retrouve ainsi la loi de la réfraction de Snell-Descartes. Posons $p = \cos \alpha_0$ et soit $z(p)$ l'altitude du point où la tangente à la géodésique est horizontale ; on a $c(z(p)) =$

p^{-1} . La formule de variation première donne : $\frac{d\tau}{dr} = \cos \alpha_0 = p$.

Exprimant $r = 2 \int_{z(p)}^0 dz / \tan \alpha$, il vient

$$r = 2p \int_{z(p)}^0 \frac{dz}{\sqrt{c^{-2}(z) - p^2}}$$

où $c^{-2}(z(p)) = p^2$. Cette transformation intégrale s'exprime en terme d'une transformation d'Abel de la fonction c^{-2} .

2. Le problème de Kac : “Can one hear the shape of a drum?”

Ω est un domaine borné de \mathbb{R}_x^2 et on considère le problème:

$$(\star) \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Il existe une suite (ϕ_n, λ_n) avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ et ϕ_n solution de (\star) tels que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o. de $L^2(\Omega, d\mathbf{x})$.

Le cas d'un rectangle (Joseph Fourier [1768-1830]):

Soit $\Omega = [0, l] \times [0, L]$.

$$\sigma = \left\{ 4\pi^2 \left(\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{L} \right)^2 \right) \mid m, n = 1, 2, \dots \right\},$$

et

$$\phi_{m,n}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{lL}} \sin \frac{2\pi m x_1}{l} \sin \frac{2\pi n x_2}{L}.$$



Problème spectral inverse de Mark Kac (1966) : “Can one hear the shape of a drum?”

Mark Kac [1914-1984]

CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A DRUM?

MARK KAC, The Rockefeller University, New York

To George Eugene Uhlenbeck on the occasion of his sixty-fifth birthday

"La Physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes . . . , elle nous fait pressentir la solution." H. POINCARÉ.

Before I explain the title and introduce the theme of the lecture I should like to state that my presentation will be more in the nature of a leisurely excursion than of an organized tour. It will not be my purpose to reach a specified destination at a scheduled time. Rather I should like to allow myself on many occasions the luxury of stopping and looking around. So much effort is being spent on streamlining mathematics and in rendering it more efficient, that a solitary transgression against the trend could perhaps be forgiven.

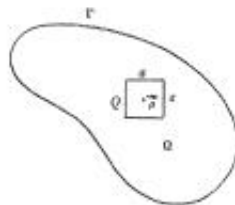


FIG. 1

1. And now to the theme and the title.

It has been known for well over a century that if a membrane Ω , held fixed along its boundary Γ (see Fig. 1), is set in motion its displacement (in the direction perpendicular to its original plane)

$$F(x, y; t) = F(\vec{p}; t)$$

obeys the wave equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

where c is a certain constant depending on the physical properties of the membrane and on the tension under which the membrane is held.

I shall choose units to make $c^2 = \frac{1}{2}$.

1



Autrement dit, est ce que la suite des λ_n détermine Ω ?

Kac a montré que le spectre détermine l'aire et la longueur du bord et introduit la méthode de l'équation de la chaleur :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} = \frac{1}{4\pi t} \left(\text{aire}(\Omega) + \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \text{longueur}(\partial\Omega) + o(t) \right) .$$

En particulier, les domaines circulaires sont caractérisés par leur spectre ($A = L^2/4\pi$).

La méthode de l'équation de la chaleur :

Fourier nous a appris comment résoudre l'équation de la chaleur dans une barre 1D ou un rectangle à l'aide de ses séries. La même méthode s'applique pour un domaine quelconque en utilisant la décomposition spectrale de son laplacien :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ avec } u(0) = u_0 ,$$

$$u_0 = \sum a_n \varphi_n, \quad u(t) = \sum a_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n .$$

Donc

$$Z(t) = \text{Trace}(e^{t\Delta}) = \sum_n e^{-t\lambda_n} ,$$

et aussi

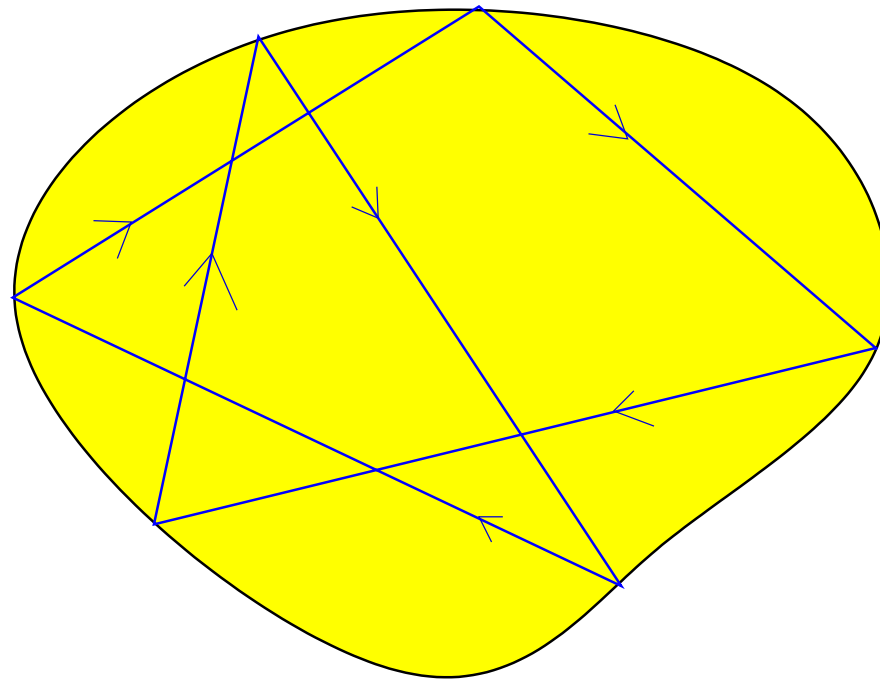
$$[e^{t\Delta}](\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi t} e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/4t} (a_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots)$$

Puis on calcule la trace $Z(t) = \int_{\Omega} [e^{t\Delta}](\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$. On trouve le d.a. :

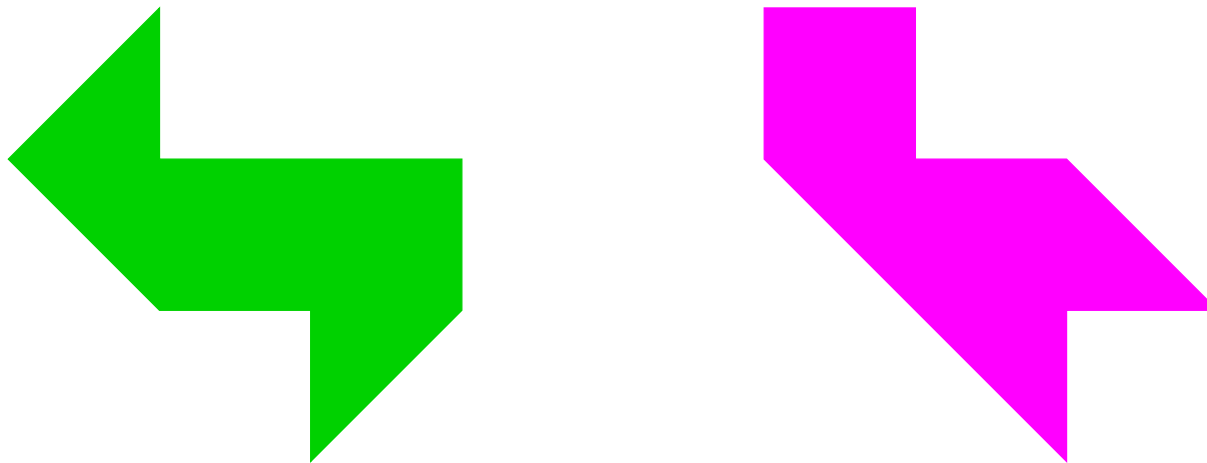
$$Z(t) = \frac{1}{4\pi t} (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots) ,$$

où les α_j sont déterminés par le spectre.

J'ai montré dans ma thèse (1973), en m'inspirant des travaux des physiciens Balian & Bloch, que le spectre détermine l'ensemble des longueurs des **trajectoires périodiques** du billard associé :



On sait aujourd'hui (Gordon-Webb-Wolpert, 1992) que la réponse à la question de Kac est NON : ces auteurs ont trouvé des contre-exemples où Ω est un polygône non convexe.



Cependant, on ne connaît ni exemples convexes, ni exemples lisses.

III. La méthode d'imagerie passive : aspects mathématiques

A. Champs aléatoires.

Pour simplifier, je vais **discrétiser le temps** (ce que l'on fait dans la pratique avec les stations de sismomètres). Je considère un champ aléatoire stationnaire de la forme suivante: une suite de variables aléatoires $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ où n représente le temps, à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathbb{C}^V$ (un espace fonctionnel dans les applications) telle que les $f(n)$ sont indépendantes et de même loi. On notera $f(n, i)$ la i ème coordonnées de $f(n)$. Sous certaines hypothèses, on a la *loi des grands nombres* : presque sûrement, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) = \mathbb{E}(f(1)) .$$

Une suite $g(n)$ de variables aléatoires d'espérance nulle sera dite

Stationnaire si la loi de probabilité sur la suite des $f(n)$ est invariante par translation $(g(n)) \rightarrow (g(n + N))$;

Ergodique si on a la loi des grands nombres.

Une caractéristique importante d'une telle suite est sa **corrélacion ou covariance** : $C(n, i, j) = \mathbb{E}(g(0, i)\overline{g(n, j)})$.

B. Imagerie passive discrète On considère une suite récurrente bruitée à valeurs dans l'espace Hermitien \mathcal{E} de la forme

$$u(n+1) = Au(n) + f(n) ,$$

où $A = cU$ et U unitaire et $0 < c < 1$. On suppose que $(u(n))$ est la solution "causale" de la récurrence, i.e. $u(n)$ dépend linéairement des $f(n-l)$ pour $l \geq 0$. On suppose que les $f(n,i)$ sont des v.a. indépendantes, bornées et de même loi avec $\mathbb{E}(f(n,i)) = 0$ et $\mathbb{E}(|f(n,i)|^2) = \sigma^2$. On alors, si

$$C_{i,j}(\tau) := \lim \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N u(l,i) \overline{u(l-\tau,j)}$$

$$C_{i,j}(\tau) = \frac{\sigma^2}{1-c^2} (A^\tau)_{i,j} .$$

preuve : la solution causale de la suite récurrente est $u(n) = f(n) + Af(n - 1) + A^2f(n - 2) + \dots$ et on calcule la corrélation par la loi des grands nombres comme espérance de $u(0, i)\overline{u(-\tau, j)}$.

C. Une équation d'ondes simplifiée

$$\frac{du}{dt} + ku + Hu = f$$

- $u = u(x, t)$, $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$, $u(., t) \in \mathcal{H}$ Hilbert
- $k > 0$ est l'atténuation
- $H = -H^*$ de façon que $U(t) = e^{-tH}$ est un groupe unitaire
- $f = f(x, t)$ est la source supposée un champ aléatoire stationnaire, ergodique, de moyenne nulle et de corrélation

$$\mathbb{E}(f(x, t)\overline{f(y, s)}) = \delta(t - s)\delta(x - y) .$$

On note $G(t, x, y)$ la fonction de Green, c'est à dire le noyau (la matrice) de $\exp(-tH)$:

$$e^{-tH}v(x, t) = \int_X G(t, x, y)v(y)dy ,$$

et donc (variation des constantes et causalité) :

$$u(x, t) = \int_0^\infty ds \int_X e^{-ks} G(s, x, y) f(t - s, y) dy .$$

Remarques :

$$G(-t, x, y) = \overline{G(t, y, x)}$$

et

$$\int_X G(s, A, x)G(s', x, B)dx = G(s + s', A, B)$$

(propriété de l'exponentielle).

D. Un calcul de corrélation

On s'intéresse à

$$C_{A,B}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(A, t) \overline{u(B, t - \tau)} dt ,$$

on a $C_{B,A}(-\tau) = C_{A,B}(\tau)$. On se restreint donc à $\tau > 0$. Le résultat principal est :

$$C_{A,B}(\tau) = \frac{e^{-k\tau}}{2k} G(\tau, A, B) .$$

Preuve formelle :

$$C_{A,B}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(A, t) \overline{u(B, t - \tau)} dt$$

On remplace u et v par leurs expressions en fonction de la source f :

$$C_{A,B}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int ds ds' dx dy \dots$$

$$\dots e^{-k(s+s')} G(s, A, x) \overline{G(s', B, y)} f(t - s, x) \overline{f(t - \tau - s', y)} .$$

Puis on remplace la limite ergodique par l'espérance :

$$C_{A,B}(\tau) = \int ds ds' dx dy e^{-k(s+s')} \dots$$

$$\dots G(s, A, x) \overline{G(s', B, y)} \mathbb{E}(f(-s, x) \overline{f(-\tau - s', y)})$$

On utilise ensuite le fait que $f(t, x)$ est un bruit blanc et que e^{-tH} est un groupe unitaire ; on obtient

$$C_{A,B}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} ds \int_X dx e^{-k(2s-\tau)} G(s, A, x) G(\tau - s, x, B)$$

$$C_{A,B}(\tau) = \frac{e^{-k\tau}}{2k} G(\tau, A, B) .$$

En utilisant la formule précédente, on peut calculer le temps de parcours des ondes sismiques entre 2 stations quelconques A et B . On peut ainsi utiliser des méthodes du type Wiechert-Herglotz pour imager la croûte terrestre.

Avantages de la méthode d'imagerie passive :

- Pas besoin d'explosifs
- Permet de suivre en continu les déformations (monitoring)

Remarques : la situation précédente est très idéalisée : dans la pratique, la source du bruit n'est pas un bruit blanc. La source est souvent localisée (cf interaction avec l'océan). On doit donc développer des modèles plus complexes qui permettent de calculer la corrélation à partir du spectre de puissance de la source.

On doit aussi résoudre des problèmes inverse plus complexes que Wiechert-Herglotz : les ondes utiles sont les ondes de surfaces qui se propagent comme dans des guides d'ondes bi-dimensionnels et ce que permet de calculer les corrélations sont les équations d'ondes effectives de ces ondes guidées. On doit ensuite résoudre (numériquement dans la pratique) un problème spectral inverse...