

SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

1997-1998

Yves Colin de Verdière

Équations de Schrödinger couplées

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° XX, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A20_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

EQUATIONS DE SCHRÖDINGER COUPLÉES

YVES COLIN DE VERDIÈRE*

* Institut Universitaire de France
et Institut Fourier, UMR CNRS-UJF 5582
BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex (France)
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

1. INTRODUCTION

Ce texte est une introduction aux articles [3] et [4]. On considère un système $n \times n$, H , de h -opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0. On suppose H autoadjoint. Au voisinage des points où la matrice H_0 des symboles principaux n'a que des valeurs propres simples, le système est microlocalement équivalent à n équations découplées. En un point où le symbole a une valeur propre double, on se ramène à étudier un système 2×2 . Le but est donc d'étudier un système 2×2 d'opérateurs pseudo-différentiels près d'un croisement (ou presque croisement), puis d'en déduire les propriétés globales d'un système $n \times n$ ne présentant que des (presque-)croisements de 2 niveaux génériques.

Les résultats sont une reformulation microlocale de la formule de Landau-Zener (voir [4]) et une méthode générale pour calculer les phases globales (conditions de quantifications, matrices de diffusion) (voir [3]).

2. CROISEMENTS ÉVITÉS

Soit $t \rightarrow A(t)$ une application C^∞ de \mathbb{R} dans les matrices 2×2 réelles symétriques. Génériquement, les valeurs propres de $A(t)$ sont simples pour tout t :

$$\forall t, \lambda_1(t) < \lambda_2(t) .$$

Ce n'est plus le cas pour une famille à 2 paramètres. On considère ainsi une famille

$$A_\epsilon(t)$$

dépendant d'un paramètre réel ϵ et on suppose que $A_0(t_0)$ admet une valeur propre double. Alors, dans le cas générique, on peut trouver une base de \mathbb{R}^2 telle que

$$(1) \quad A_\epsilon(t) = \begin{pmatrix} a_\epsilon(t) & \epsilon w_\epsilon(t) \\ \epsilon w_\epsilon(t) & b_\epsilon(t) \end{pmatrix} ,$$

où $a_0(t)$ et $b_0(t)$ se croisent transversalement en t_0 et $w_0(t_0) \neq 0$. Pour ϵ petit, on est en présence d'un croisement évité des valeurs propres dont la distance minimale est de l'ordre de $|\epsilon|$. Dans ce qui suit on peut se débarrasser de la

Date: 26 mai 1998.

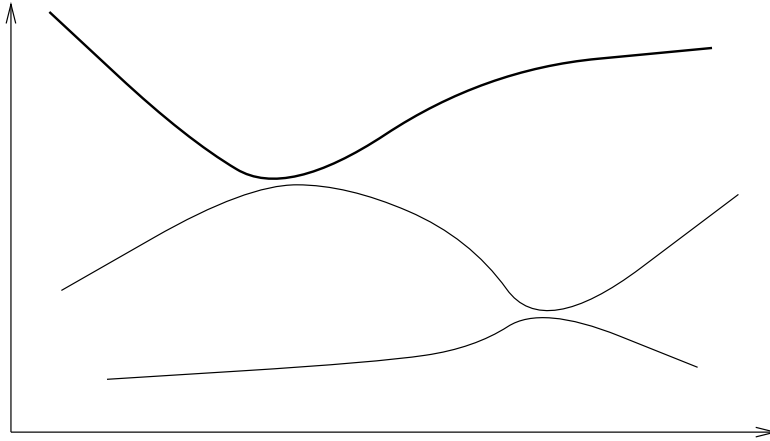


FIGURE 1. Croisements évités

dépendance de a et b en ϵ en introduisant un paramètre supplémentaire α et en faisant des estimations uniformes en α . On peut aussi supposer que $w_\epsilon(t)$ est indépendant de ϵ .

3. LIMITE ADIABATIQUE D'UN SYSTÈME À n NIVEAUX

On considère une équation de Schrödinger dépendant lentement du temps de la forme

$$\frac{1}{i} \frac{dU}{ds} = H(hs)U$$

où $H(t)$ est une matrice $n \times n$ symétrique et h tend vers 0. Posant $t = hs$, on a un système semi-classique :

$$\frac{h}{i} \frac{dU}{dt} = H(t)U ,$$

dont le symbole principal est :

$$\tau \text{Id} - H(t) .$$

On suppose que $H(t)$ présente des croisements évités génériques du type précédent et on est ramené à étudier le système :

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \frac{h}{i} \frac{d}{dt} - a(t) & \epsilon w(t) \\ \epsilon w(t) & \frac{h}{i} \frac{d}{dt} - b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 ,$$

où $a(0) = b(0) = 0$, a et b ont des dérivées distinctes en 0 et $w(0) \neq 0$.

On voit qu'il s'agit d'un problème à 2 petits paramètres ϵ et h que l'on souhaite traiter uniformément. Dans ce contexte, on cherche en général à déterminer le comportement asymptotique de la matrice S qui fait passer des solutions en $s = -\infty$ à leurs valeurs en $s = +\infty$ (voir [12] et [14]).

4. EQUATIONS DE SCHRÖDINGER COUPLÉES EN DIMENSION 1

On considère une équation de Schrödinger en dimension 1 avec un potentiel vectoriel $V(x)$. Une telle équation se rencontre dans l'approximation de Born-Oppenheimer. On est amené à supposer que $V(x)$ présente des croisements évités génériques comme plus haut. L'équation stationnaire modèle est donc :

$$(3) \quad \begin{pmatrix} -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) - E & \epsilon W(x) \\ \epsilon W(x) & -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 ,$$

avec le même type d'hypothèses que plus haut ; il existe x_0 tel que $V_1(x_0) = V_2(x_0) < E$, $V_1'(x_0) \neq V_2'(x_0)$ et $W(x_0) \neq 0$.

5. LE MODÈLE

Il suffit donc dans tous les cas d'étudier un système pseudo-différentiel auto-adjoint vectoriel de la forme

$$(4) \quad \begin{pmatrix} P_1 & \epsilon W \\ \epsilon W & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 ,$$

avec les hypothèses suivantes :

(a) les courbes caractéristiques $p_1 = 0$ et $p_2 = 0$ des P_j ont un point commun z_0 où les dp_j sont indépendantes.

(b) le symbole principal de W en z_0 est non nul.

Il se trouve que sous ces hypothèses génériques, on peut décrire de façon précise et uniforme en ϵ les solutions microlocales.

6. LE LEMME DE MORSE SEMI-CLASSIQUE ET L'INVARIANT DES POINTS DE CROISEMENTS

Grâce à l'hypothèse (b), le système (4) équivaut microlocalement à une unique équation purement scalaire dont le symbole principal présente un point col. Cela permet d'utiliser le lemme de Morse semi-classique comme dans [1]. Le point est qu'on doit éviter le calcul fonctionnel, car l'équation scalaire n'est plus auto-adjointe. On se contente d'étudier les solutions : on peut donc multiplier l'opérateur à gauche par un facteur elliptique.

6.1. Le contexte. Soient p_j , $j = 1, 2$ deux fonctions C^∞ de $T^*\mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . On suppose qu'on se place près d'un point $z_0 \in T^*\mathbb{R}$ (*point col*) tel que

$$(5) \quad p_1(z_0) = p_2(z_0) = 0 \text{ et les différentielles } dp_1(z_0) , dp_2(z_0) \text{ sont indépendantes.}$$

Soit Q_α , où α est un paramètre réel variant dans un voisinage fixe de 0, un h -OPD d'ordre 0 dépendant de façon C^∞ de α . On note q_α le symbole principal de Q_α et on suppose $q_0 = p_1 p_2$ et $\frac{d}{d\alpha} q_\alpha(z_0) = \omega_0 \neq 0$: ω_0 est la dérivée en $\alpha = 0$ de la valeur critique de q_α .

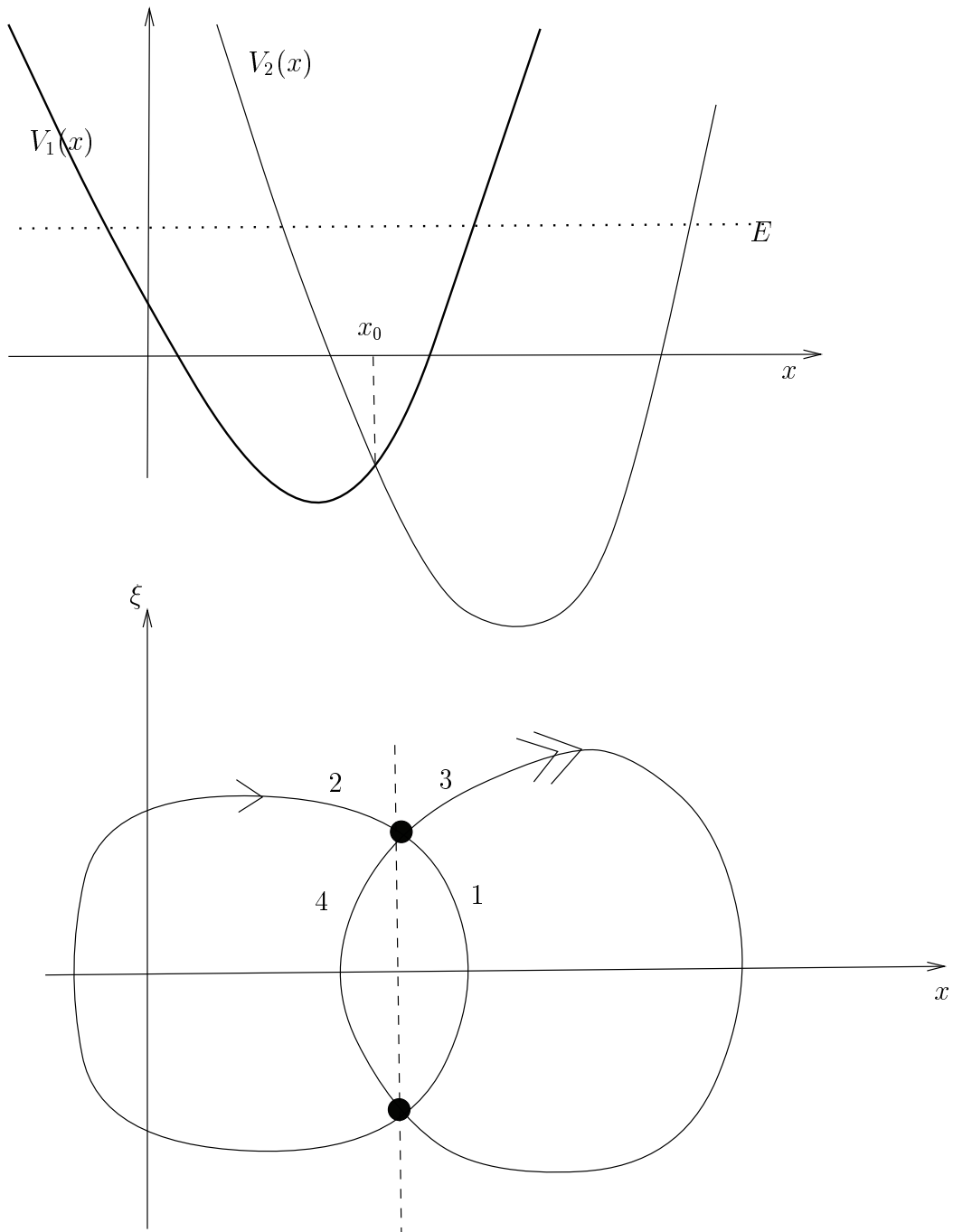


FIGURE 2. Le cas de 2 équations de Schrödinger

6.2. La forme normale. Le théorème suivant donne une variante du lemme de Morse isochore de [5] et de son pendant semi-classique [1]. L'avantage est de ne pas utiliser le calcul fonctionnel, ni le caractère autoadjoint des hamiltoniens (on suppose seulement les symboles principaux réels).

Théorème 1. (a) *Il existe des familles C^∞ de germes de transformations canoniques $\chi_\alpha : (\mathbb{R}^2, O) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_\alpha)$ et de fonctions $e_\alpha(y, \eta)$ telles que $q_\alpha \circ \chi_\alpha = e_\alpha(y, \eta)(y\eta - \Phi_0(\alpha))$.*

La fonction C^∞ Φ_0 n'est pas unique, mais son développement de Taylor

$$\Phi_0(\alpha) \sim \sum_{j=1}^{\infty} c_{0,j} \alpha^j$$

l'est et on a :

$$(6) \quad c_{0,1} = \pm \frac{\omega_0}{\{p_1, p_2\}(z_0)}$$

où le signe dépend du choix de χ_α (voir la section 6.3).

(b) *Il existe un OIF (opérateur intégral de Fourier) U_α associé à χ_α et un OPD E_α elliptique en O tels que l'on ait, microlocalement près de O :*

$$(7) \quad U_\alpha^{-1} \circ Q_\alpha \circ U_\alpha = E_\alpha \circ \left(\frac{h}{i} y \frac{d}{dy} - \Phi(\alpha, h) \right)$$

où Φ est un symbole en h de la forme

$$(8) \quad \Phi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\alpha) h^k$$

Les Φ_k sont C^∞ et ont des développements de Taylor uniquement déterminés

$$\Phi_k(\alpha) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \alpha^j .$$

(c) *Si $Q_0 = P_2 P_1$, $\Phi_1(0) = c_{1,0} = 0$. On a donc dans ce cas*

$$\Phi = c_{0,1} \alpha + O(\alpha^2) + O(h^2) .$$

6.3. Choix des branches. Le crochet de Poisson est défini par :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \xi} .$$

On peut toujours choisir χ de façon à faire correspondre les courbes $p_1 = 0$ avec $\eta = 0$ et $p_2 = 0$ avec $y = 0$.

Le signe de $e_0(O)$ est \pm suivant que l'image par χ du quadrant $\{y > 0, \eta > 0\}$ vérifie $p_1 p_2 > 0$ ou < 0 . Comme $p_1 \circ \chi = f_1 \eta$ et $p_2 \circ \chi = f_2 y$ avec $f_1(O) f_2(O) = e_0(O)$, on a la relation :

$$(9) \quad \{p_1, p_2\}(z_0) = e_0(O) \{\eta, y\}(O) = e_0(O)$$

par l'invariance du crochet de Poisson et

$$\omega_0 = -e_0(O) c_{0,1}$$

par le calcul de la dérivée en $\alpha = 0$ de la valeur critique. D'où la formule (6) avec un $-$. On aurait un $+$ si on avait la correspondance opposée entre les axes et les courbes caractéristiques des p_j .

6.4. Birapport et unicité. Soient \mathcal{E} un sous-espace de dimension 2 de la somme directe de 4 espaces de dimension 1, E_j , $1 \leq j \leq 4$, tel que \mathcal{E} coupe chaque hyperplan $H_j = \bigoplus_{k \neq j} E_k$ suivant une droite D_j . Soit $m_{1,2,3,4}$ le birapport des 4 droites D_j . Si \mathcal{E} est le graphe d'une application $A : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_3 \oplus E_4$ de matrice $(a_{i,j})$, on a

$$m_{1,2,3,4} = \frac{a_{4,1}a_{3,2}}{a_{3,1}a_{4,2}}.$$

L'indice α sera souvent implicite dans ce qui suit. D'après [1], l'espace \mathcal{E} des solutions microlocales de $Pu = 0$ près de z_0 est de dimension 2 (comme module sur l'anneau $\mathbb{C}(h)$ des séries formelles en h). Numérotions 1, 2, 3, 4 les 4 branches comme sur la figure (3)

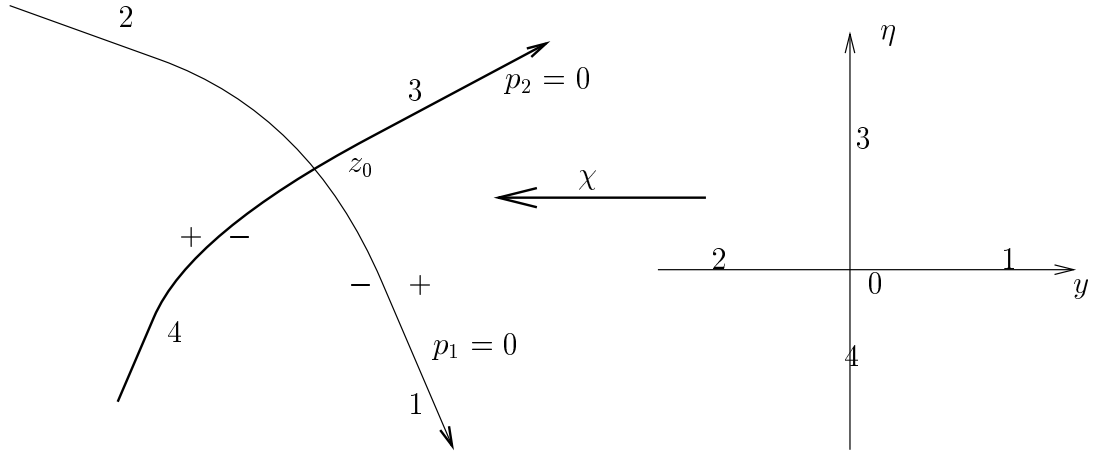


FIGURE 3. Numérotation des branches

et soient $D_j \subset \mathcal{E}$ la droite des solutions nulles sur la branche j . On définit $m_{1,2,3,4} \in \mathbb{C}(h) \cup \infty$ comme le birapport des 4 droites D_j .

Théorème 2. On a :

$$(10) \quad m_{1,2,3,4} = e^{-2\pi\Phi(\alpha,h)/h}.$$

Il y a une difficulté pour interpréter cette formule car $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 h + \dots$ et qu'on n'obtient pas une série formelle. On tourne la difficulté en couplant α et h de façon que $\alpha = O(h)$. Le birapport prend alors un sens comme série formelle en (β, h) avec $\alpha = h\beta$. Si $\alpha \geq Ch^{1+\rho}$ (avec $C, \rho > 0$), on a

$$(11) \quad m_{1,2,3,4} = \begin{cases} 0, & \text{si } c_{0,1} > 0; \\ \infty, & \text{si } c_{0,1} < 0. \end{cases}$$

Preuve.—

La formule résulte de la formule (38) de [1]. En effet la matrice de transfert $T(\varepsilon)$ y est donnée par

$$(12) \quad T(\varepsilon) = C(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-\varepsilon\pi} \\ -ie^{-\varepsilon\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

et dans le contexte présent $\varepsilon = \frac{\Phi}{h} + \frac{1}{2i}$.

L'unicité découle alors de l'interprétation géométrique de $m_{1,2,3,4}$.

□

6.5. Opérateur déterminant. Revenons au système (4). Comme W est elliptique en z_0 , on peut l'inverser et on voit que les solutions microlocales du système (4) près de z_0 sont déterminées pour $\varepsilon \neq 0$ par les solutions de

$$(13) \quad \begin{cases} Q_\varepsilon u & = 0 \\ v & = -\varepsilon^{-1}W^{-1}P_1u \end{cases}$$

avec

$$(14) \quad Q_\varepsilon = WP_2W^{-1}P_1 - \varepsilon^2WW^* = Q_0 - \varepsilon^2WW^* .$$

Le symbole principal q_ε de Q_ε est $q_\varepsilon = p_1p_2 - \varepsilon^2|w|^2$ qui présente un point col $z(\varepsilon)$ avec $z(0) = z_0$.

Si on pose $\varepsilon^2 = \alpha$, on peut utiliser les résultats de la section 6.2 avec $\omega_0 = -|w_0|^2$. En particulier, on peut déterminer le birapport associé au point z_0 . On va voir que ce birapport détermine pour une matrice unitaire les modules des coefficients et c'est ce qu'on appelle la formule de Landau-Zener.

7. UNITARITÉ ET FORMULE DE LANDAU-ZENER

7.1. Bref historique. La *formule de Landau-Zener* ([13], [21]) dans le régime *adiabatique* est prouvée dans [7] et [11] : il s'agit de décrire le comportement des solutions de

$$(15) \quad i\frac{du}{ds} = H(hs)u$$

lorsque $h \rightarrow 0$ où $H(t)$ est un Hamiltonien présentant un presque-croisement de deux valeurs propres pour un certain t_0 . Des formules plus fines sont données dans [12].

La *formule de Landau-Zener* pour la propagation semi-classique des *états cohérents* dans l'approximation de Born-Oppenheimer (i.e. pour des systèmes semi-classiques) est montrée par Hagedorn et Hagedorn-Joye ([8], [9]). Pour une approche voisine, voir [14], §2.

On souhaite obtenir une formule microlocale : il faut donc définir l'unitarité de façon microlocale au moyen des courants entrants et sortants d'une région D de l'espace des phases. On va le faire sans hypothèse sur le comportement de H à l'intérieur de D .

7.2. Courants. On considère un système hamiltonien H d'OPD auto-adjoint sur un espace de phase classique \mathcal{X} de dimension 2. On s'intéresse aux solutions microlocales de $HU = 0$. Soit Z la variété caractéristique de H (i.e. $Z = \{\det(H_0) = 0\}$). Soit D un domaine à bord de l'espace \mathcal{X} dont le bord ∂D rencontre transversalement Z en des points lisses correspondants à l'annulation transversale d'une des valeurs propres $p_j(z)$ de H_0 . Il y a un nombre pairs d'arcs Z_α de Z qui coupent ainsi ∂D (c'est déjà un nombre pair pour chaque p_j : regarder les changements de signes). Chaque arc est orienté par le champ hamiltonien du p_j correspondant. Soient Z_1, \dots, Z_N les arcs entrant et Z_{N+1}, \dots, Z_{2N} les arcs sortants. Soit \mathcal{H}_j l'espace de dimension 1 des solutions microlocales de $HU = 0$ sur Z_j , $\mathcal{H}_{in} = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{H}_j$ et $\mathcal{H}_{out} = \bigoplus_{i=N+1}^{2N} \mathcal{H}_j$. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} \oplus \mathcal{H}_{out}$.

Soit Ω un petit voisinage de ∂D et Π un h -OPD d'ordre 0 égal à Id dans $D \setminus \Omega$ et à 0 dans $\mathcal{X} \setminus (D \cup \Omega)$. Soit Σ un autre OPD égal à Id là où Π n'est pas Id et nul dans D privé d'un petit voisinage de ∂D . Posons

$$(16) \quad J(U, V) = \frac{i}{2h} \langle \Sigma H(\Pi U) | \Pi V \rangle - \langle \Pi U | \Sigma H(\Pi V) \rangle .$$

On a alors le :

Théorème 3. *Les espaces \mathcal{H}_j sont 2 à 2 orthogonaux pour le produit hermitien J ; J est non dégénérée sur \mathcal{H} et de signature (N, N) . Plus précisément, si $\varphi_j \in \mathcal{H}_j$ admet ω_j comme symbole et que dt_j est la différentielle sur Z_j associée au champ hamiltonien correspondant, on a :*

$$J(\varphi_j, \varphi_j) = \pm \left| \frac{\omega_j^2}{dt_j} \right|$$

où \pm vaut $+$ dans le cas entrant et $-$ dans le cas sortant. Si U, V sont deux solutions microlocales de $HU = 0$ dans un voisinage de D , on a : $J(U, V) = 0$. On en déduit que le sous-espace de \mathcal{H} induit par les solutions dans D est le graphe d'une application unitaire de \mathcal{H}_{in} dans \mathcal{H}_{out} et est de dimension N .

Remarque : ce théorème répond positivement à une question de Gilles Lebeau lors de l'exposé oral.

7.3. La formule de Landau-Zener. Revenons au cas d'un seul croisement (4 et avec les hypothèses (a) et (b)). Soient \mathcal{H}_j , $j = 1, \dots, 4$ les espaces de solutions microlocales de $HU = 0$ sur les branches j . $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_4$ et $\mathcal{H}_{out} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3$ sont des espaces hermitiens pour le produit défini par les courants et si \mathcal{H} est l'espace des solutions microlocales près de z_0 , \mathcal{H} est le graphe d'une transformation unitaire T de \mathcal{H}_{in} dans \mathcal{H}_{out} .

Théorème 4. *(Formule de Landau-Zener) On a dans une base orthonormée pour les courants*

$$T = (t_{i,j})$$

avec :

$$|t_{1,2}| = |t_{3,4}| + O(h^\infty) = e^{\pi\Phi(\epsilon^2, h)/h} + O(h^\infty) .$$

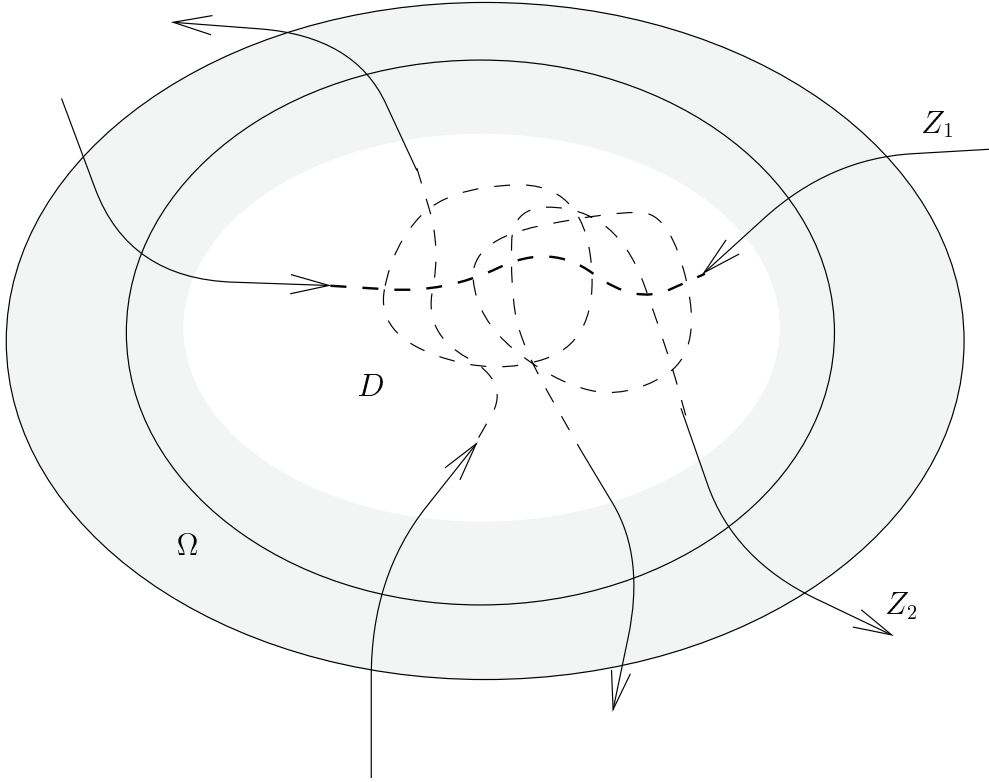


FIGURE 4. Courants

où Φ vérifie :

$$\Phi(\epsilon^2, h) = -\frac{|w_0|^2}{|\{p_1, p_2\}(z_0)|} \epsilon^2 + O(\epsilon^4) + O(h^2) .$$

La démonstration est une application du

Lemme 1. Avec les notations de la section (6.4), si \mathcal{H} est le graphe d'une application unitaire $T : \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_4 \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3$ où les espaces sont hermitiens et les sommes orthogonales, la matrice de T dans des bases orthonormées (e_2, e_4, e_1, e_3) des \mathcal{H}_j vérifie

$$|t_{1,2}|^2 = |t_{3,4}|^2 = (m_{1,2,3,4})^{-1} .$$

En fait on montre plus précisément que l'argument de l'exponentielle est de la forme $\frac{\pi}{h} \Phi(\epsilon^2, h)$ où Φ est un symbole classique en h de la forme

$$\Phi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\epsilon^2) h^k$$

avec les $\Phi_k \in C^\infty$.

Par rapport à [14] (voir en particulier le théorème 5.1) et à la littérature existante, relevons les points suivants :

- Les résultats sont valables sans hypothèse d'analyticité.
- Les résultats sont locaux (et même microlocaux).
- On a un développement asymptotique complet par rapport aux 2 petits paramètres ϵ et h .
- Les résultats décrivent de façon uniforme la transition entre le régime adiabatique et le régime non couplé.

Le régime transitoire se produit lorsque ϵ est de l'ordre de \sqrt{h} . Si $\epsilon \gg \sqrt{h}$ (région II) l'approximation adiabatique marche ($|t_{1,2}| = O(h^\infty)$) et on se ramène à 2 équations scalaires. Si $\epsilon \ll \sqrt{h}$ (région I) les 2 équations sont découplés à l'ordre principal.

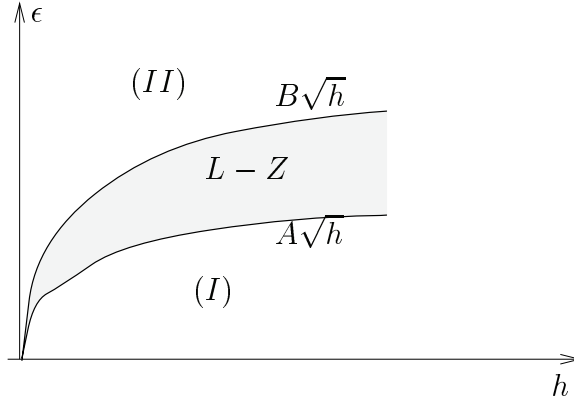


FIGURE 5. Le plan des paramètres

8. PHASES

8.1. Bohr-Sommerfeld. Dans [3], nous montrons comment calculer le spectre et les matrices de diffusion pour 2 oscillateurs couplés en utilisant en particulier le théorème 1. Une application à la matrice S et aux *oscillations de Stückelberg* ([14] p. 241) y est donnée.

8.2. Des faisceaux sur Z . Donnons le principe algébrique des calculs de [3]. Soit Z un graphe tétravalent fini. On note e l'arête générique. On suppose qu'on s'est donné pour chaque sommet une numérotation des arêtes qui y arrivent : e_1, e_2, e_3, e_4 .

On va définir un faisceau $\mathcal{F} = (Z, E_e, F_s)$ sur Z de la façon suivante : on se donne pour chaque arête un espace vectoriel E_e (ou un module libre sur un anneau) de dimension 1 sur un corps K et pour chaque sommet s un sous-espace vectoriel F_s générique de $\bigoplus_{i=1}^4 E_{e_i}$ de dimension 2. *Générique* signifie que cet espace n'est contenu dans aucune somme de 3 des E_{e_j} .

On peut écrire F_s comme le graphe d'une application linéaire $T_s : E_{e_1} \oplus E_{e_2} \rightarrow E_{e_3} \oplus E_{e_4}$. Il existe des bases des E_{e_i} telles que la matrice de T vérifie $T_{i,j} = 1$ pour $(i, j) = (1, 4), (2, 3), (2, 4)$ et $T_{1,3} = \lambda_s$.

$$(17) \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_s & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

λ_s est un scalaire non nul qui ne dépend pas de la base choisie : $\lambda_s = \frac{T_{1,3}T_{2,4}}{T_{1,4}T_{2,3}}$. De telles bases sont uniques à un scalaire global près. Un tel choix définit donc un faisceau \mathcal{F}_1 sur Z dont l'espace des sections au voisinage de chaque sommet est de dimension 1. Soit maintenant γ un cycle de Z . On lui associe un scalaire non nul h_γ qui est l'holonomie le long de γ du faisceau \mathcal{F}_1 .

On a alors le :

Théorème 5. *Les scalaires non nuls λ_s et h_γ en nombre $2n + 1$ caractérisent le faisceau $\mathcal{F} = (Z, E_e, F_s)$ à isomorphisme près. Si on appelle section de \mathcal{F} la donnée d'un élément de $\oplus E_e$ qui soit dans F_s pour chaque sommet, la dimension de l'espace des sections $b_0(\mathcal{F})$ ne dépend donc que des invariants précédents.*

Preuve. –

En coupant certaines arêtes de Z , on détermine un arbre maximal T du nouveau graphe Z' . Les données permettent de trivialisier le faisceau \mathcal{F}_1 sur T et donc de reconstruire \mathcal{F} sur T . On lit alors les holonomies h_γ sur les arêtes restantes.

□

9. EXTENSIONS ET REMARQUES

9.1. Croisements évités. On peut sans doute étendre l'étude précédente au cas d'un système auto-adjoint de 2 OPD d'ordre 0 de la forme

$$(18) \quad \begin{pmatrix} P_1 & \epsilon W \\ \epsilon W & P_2 \end{pmatrix}$$

en dimension d en un point où le crochet de Poisson $\{p_1, p_2\}$ est non nul. On a encore une forme normale dans ce cas là. Pour donner des énoncés précis, il faut recourir à l'analogie avec petit paramètre de la théorie de Guillemin-Melrose-Uhlmann des opérateurs intégraux de Fourier associés à des couples de variétés lagrangiennes qui se coupent transversalement au sens de Bott (voir [15], [6], [19]). Voir aussi [10]. Un travail est en préparation sur cette question.

9.2. Points diabolos. En dimension ≥ 2 le cas générique n'est cependant plus celui des croisements évités, mais celui de vrais croisements sur une variété de codimension 2. Voir à ce sujet [8] et [9].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Colin de Verdière et B. Parisse, Equilibre instable en régime semi-classique : I- Concentration microlocale. *Commun. PDE*, 19:1535-1563, 1994.
- [2] Y. Colin de Verdière et B. Parisse, Equilibre instable en régime semi-classique : II- Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique théorique)*, 61:347-367, 1994.
- [3] Y. Colin de Verdière et B. Parisse, Conditions de Bohr-Sommerfeld singulières. (*en préparation*).
- [4] Y. Colin de Verdière, Joël Pollet et Maurice Lombardi, La formule de Landau-Zener microlocale. *Prépublication de l'institut Fourier 412 disponible sur le serveur IF <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/>*.
- [5] Y. Colin de Verdière et J. Vey, Le lemme de Morse isochore *Topology*, 18:283-293 (1979).
- [6] V. Guillemin, G. Uhlmann, Oscillatory integrals with singular symbols, *Duke Math. J.*, 48:251-267 (1981).

- [7] G. A. Hagedorn, Proof of the Landau-Zener formula in an adiabatic limit with small eigenvalue gap, *Commun. Math. Phys.*, 136:433–449 (1991).
- [8] G. A. Hagedorn, Molecular Propagation through Electron Energy Level crossings, *Memiors of the AMS*, 536 (1994).
- [9] G. A. Hagedorn et A. Joye, Landau-Zener Transitions through small electronic eigenvalues gaps in the Born-oppenheimer approximation *Ann. IHP (physique théorique)*, 68:85–134 (1998).
- [10] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 3, *Springer 1985*.
- [11] A. Joye, Proof of the Landau-Zener formula, *Asymptotic Analysis*, 9:209–258 (1994).
- [12] A. Joye, Exponential asymptotics in a singular limit for n -level scattering systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 28:669–703 (1997).
- [13] L. Landau, *Collected papers of L. Landau*, Pergamon Press, 1965.
- [14] P. Martin et G. Nenciu, Semi-classical inelastic S -matrix for one dimensional N -states systems, *Reviews in Mathematical Physics*, 7:193–242 (1995).
- [15] R. Melrose et G. Uhlmann, Lagrangian intersection and the Cauchy problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32:483–519 (1979).
- [16] J. Pollet, Analyse semi-classique d'un système d'équations de Schrödinger couplées : formule de Landau-Zener. *Thèse de l'université de Grenoble 1*, octobre 1997.
- [17] D. Robert, Autour de l'approximation semi-classique, *Birkhäuser*, 1987.
- [18] M. Rouleux, Feshbach resonances in the semi-classical limit, *Preprint CPT*, 1997.
- [19] M. Taylor, Pseudo-differential operators, *Princeton*, 1981.
- [20] S. Vu Ngoc, Bohr-Sommerfeld conditions for Integrable Systems with critical manifold of focus-focus type. *Preprint 1997*.
- [21] C. Zener, Non-adiabatic crossing of energy levels, *Proc. Roy. Soc. Lond.* , 137:696–702 (1932).