Séminaire IUF : turbulence et déterminisme
Grenoble, 23-24 janvier 1997

UN EXEMPLE DE CHAOS CLASSIQUE ET QUANTIQUE : LES SURFACES DE RIEMANN.

Yves Colin de Verdière
Institut Fourier et Institut universitaire de France

1. Introduction. —

S'étant convaincu que la plupart des équations différentielles de la mécanique ne sont pas *intégrables* (en un sens analytique, c'est-à-dire qu'on peut réduire le calcul des solutions à des quadratures et à la résolution d'équations algébriques), Henri Poincaré a proposé de faire une étude qualitative des trajectoires basée en particulier sur l'*analysis situs* (appellée aujourd'hui *topologie*) fondant ainsi un nouveau domaine scientifique que nous appellons *les systèmes dynamiques.*

L'équation différentielle est une version mathématique d'un système *déterministe* (par opposition à un processus stochastique du type mouvement brownien ou chaine de Markov).

Cette science des systèmes dynamiques, ou plutôt sa branche consacrée aux systèmes instables et chaotiques, est revenue sur le devant de la scène depuis les années 60 sous le nom de *théorie du chaos.*

Certains systèmes dynamiques, déterministes donc, présente une grande instabilité dynamique (*effet papillon* : un petit changement dans les conditions initiales se traduira à terme par une évolution très différente). Toute prévision est donc limitée dans le temps par l'insuffisance de l'information sur les conditions initiales.

Pour ces systèmes, on peut parfois adopter une description purement statistique des trajectoires (ergodicité, mélange). L'exemple le plus simple a déjà été étudié par Hadamard, il s'agit des géodésiques sur une surface à courbure de Gauss négative; sans rentrer dans trop de détails, disons que la courbure négative force la divergence exponentielle des géodésiques; en effet les géodésiques infiniment proches de la géodésique considérée sont alors données par l'équation de Jacobi qui est de la forme

$$X'' + KX = 0 ,$$

où K est la courbure de Gauss et dont les solutions, si $K = -1$, sont des exponentielles.

Certains systèmes de la mécanique des fluides, par exemple les équations d'Euler, peuvent présenter de la courbure négative (voir Arnold [AR1]).

La mécanique newtonienne n'est pas suffisante pour décrire un certain nombre de phénomènes en particulier de la physique des échelles atomiques; elle est impuissante à expliquer les raies spectrales des atomes et des molécules.

La mécanique quantique, qui contient la mécanique newtonienne ou classique comme cas limite (un peu comme l'optique géométrique est le cas limite de l'optique ondulatoire aux courtes longueurs d'ondes), fournit un modèle adapté pour décrire la physique à l'échelle de l'atome. Pour une introduction, on peut consulter par exemple [MA] ou [F-H].

Un des caractères les plus marquants d'un système quantique est l'existence d'un *spectre*, suite de nombres réels

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_n < \cdots ,$$

qui est une sorte de signature du système considéré et qui est observable expérimentalement (spectroscopies).

Considérons maintenant un système quantique qui soit proche du régime classique, on dit alors que le système est *semi- ou quasi-classique.*

Dans le cas où la dynamique classique est intégrable, le spectre s'exprime en termes de nombres entiers appellés *nombres quantiques* : ce sont les fameuses conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. Un cas particulier est celui des géodésiques du tore pour lequel on retrouve la théorie des séries de Fourier.

Déjà en 1917, dans [EI], Einstein remarquait que ces conditions n'ont aucun sens pour un système générique (et donc non intégrable). Une question naturelle est alors la suivante :

quelles propriétés du spectre quantique sont-elles la trace du chaos classique ?

La thématique scientifique ainsi décrite porte le nom de *chaos quantique*, nom mal adapté, car il n'y a pas à proprement parler de chaos quantique : un système quantique est en fait un système classique linéaire en dimension infinie et il est intégrable en tant que tel !! Ce problème est l'objet de recherches intenses depuis une vingtaine d'années à la *recherche du chaos quantique.*

Une formule exacte remarquable relie le spectre quantique à son analogue classique l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques : *la formule des traces de Selberg* (Selberg 1956, [B-V], [HE]). Elle donne une information sur les oscillations de la densité spectrale en termes des longueurs des géodésiques périodiques (en ces termes, elle est généralisable en une formule asymptotique valable dans le régime semi-classique, connue sous le nom de formule des traces de Gutzwiller (1970-71), mais à laquelle sont aussi attachés les noms de R. Balian et C. Bloch et dont j'ai donné dans ma thèse en 1973 la première formulation mathématique, ensuite J. Chazarain, puis H. Duistermaat et V. Guillemin ont donné une version plus maniable). Ces formules ne permettent pas une résolution assez fine du spectre pour séparer les niveaux spectraux à cause du principe d'incertitude temps-énergie ($\Delta t \Delta E \geq \hbar$) et de la prolifération exponentielle des géodésiques périodiques. Elles ne sont donc pas aussi précises, mais d'application plus générale, que les conditions de Bohr-Sommerfeld.

La théorie des matrices aléatoires a été proposée par E. Wigner, dans les années 50, pour décrire le spectre des gros atomes (grand nombre de degrés de libertés classiques). C'est une théorie statistique analogue à la théorie thermodynamique de Boltzmann.

Depuis les années 75-80, plusieurs groupes de physiciens, en particulier des chercheurs du groupe de l'IPN d'Orsay (O. Bohigas, M.-J. Giannoni, C. Schmit), se sont lancés dans l'exploration numérique des spectres de systèmes classiquement chaotiques. Ces études remarquables ont stimulés de nombreuses recherches théoriques, mais on peut dire que la situation de ce point de vue est loin d'être clarifiée, même si l'on est maintenant en état de faire quelques conjectures raisonnables; il est intéressant de constater que ce sont les méthodes de la théorie analytique des nombres qui ont été à la base des progrès récents, en particulier autour de P. Sarnak, à Princeton.

Un autre thème en plein développement est celui de la localisation des fonctions propres : il s'agit de savoir si les fonctions propres du laplacien (modes propres) présentent un caractère aléatoire. La situation n'est pas non plus très claire : le théorème ergodique semi-classique proposé dans les années 75 par Shnirelman ne permet pas une théorie pertinente des cicatrices observées numériquement. L'absence de cicatrices fortes dans le cas arithmétique est le seul résultat théorique connu aujourd'hui !

Le but de l'exposé qui suit est de discuter de ce point de vue le cas des surfaces à courbure négative : la mécanique quantique correspondant au flot géodésique est alors donné par l'opérateur de Laplace dont le spectre est un objet d'un grand intérêt, indépendamment même des problèmes liés au chaos quantique.

Après avoir décrit les surfaces à courbure négative, leurs géodésiques et les propriétés chaotiques de celles-ci, ainsi que le laplacien et son spectre, on présentera la relation la plus nette entre classique et quantique, la formule des traces de Selberg, puis le théorème ergodique semi-classique; on parlera ensuite de description statistique d'un spectre, des ensembles de Wigner (GOE, GUE) et de ce qu'on peut dire dans le cas des surfaces à courbure négative.

2. Les géodésiques des surfaces de Riemann. —

La géométrie de dimension 2 la plus simple est la géométrie euclidienne du plan $P = \mathbf{R}^2$ dont les géodésiques sont les droites usuelles. Un modèle compact (borné) de cette géométrie est obtenue en considérant un réseau $\Gamma = \mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}e_2$ où (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ et le quotient $X = \mathbf{R}^2/\Gamma$ dont la topologie est celle du tore. Les géodésiques, projections de celles de P, sont périodiques ou quasi-périodiques. Le flot géodésique est *intégrable* : la vitesse est constante en longueur et direction.

Sur la figure, on a représenté le tore vu comme le plan périodisé ainsi qu'un tore concret plongé dans l'espace $\mathbf{R}^3$. Le dessin dans $\mathbf{R}^3$ est correct du point de vue topologique, mais pas du point de vue métrique : la métrique induite par celle de l'espace $\mathbf{R}^3$ n'est pas localement euclidienne. Du point de vue analytique, il est beaucoup plus facile de travailler dans la première représentation; les fonctions sur le tore s'identifient alors aux fonctions Γ-périodiques sur le plan. Les géodésiques sont simplement les droites affines du plan lues modulo Γ.

Figure III–1: les géodésiques du tore

Cette dynamique simple ne se retrouve pas pour les surfaces de Riemann de genre plus élevé qui n'admettent pas de métrique localement euclidienne, mais admettent des métriques à courbure de Gauss constante < 0, les métriques hyperboliques.

La géométrie locale est alors la géométrie hyperbolique de Lobatchevski dans son modèle le plus simple celui du disque de Poincaré H :

$$H = \{z = x + iy \mid x^2 + y^2 < 1\} \ ,$$

muni infinitésimalement de la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2} \ ,$$

dont la courbure de Gauss est constante et égale à -1.

Les géodésiques de cette métrique sont les arcs de cercles euclidiens orthogonaux au cercle de centre 0 et de rayon 1 et intérieurs à H.

On vérifie que, par 2 points A et B distincts de H, passe une unique géodésique; en cela bien sûr rien de remarquable, ce qui l'est est que cela reste vrai pour 2 points à

Figure III–2: des géodésiques du disque de Poincaré

l'infini α et ω ; ici les points à l'infini (classes de géodésiques asymptotes) sont les points du cercle $|z| = 1$. Ce phénomène de non rigidité des géodésiques à l'infini, non vérifié en géométrie euclidienne, est la base de la preuve merveilleusement simple de l'ergodicité du flot géodésique par E. Hopf en 1937.

Ce modèle est trop simple pour avoir des propriétés dynamiques non triviales : il est utile de considérer des modèles bornés (les mathématiciens disent compacts) où la dynamique reste localisée. Ces modèles, inventés essentiellement par Poincaré, consistent à regarder un problème périodisé, autrement dit des quotients par l'action d'un groupe discret Γ (analogue des tores euclidiens vus plus haut).

De tels groupes existent et dépendent de paramètres continus. Les quotients H/Γ ont toutes les topologies possibles de surfaces de caractéristiques d'Euler < 0. Il est plus simple de construire directement les surfaces H/Γ avec des ciseaux et de la colle. Les morceaux peuvent être des hexagones de H à côtés géodésiques et à angles droits. Un tel hexagone est entièrement décrit par les longueurs de 3 de ces côtés (un sur 2). A partir de 2 hexagones de même taille, on construit un pantalon en identifiant un côté sur 2. On recolle ensuite des pantalons dont les bords ont même longueurs.

On obtient par exemple une surface X de genre 2 en recollant 4 tels hexagones (ou 2 pantalons): les modules sont 3 des longueurs précédentes et 3 angles. On peut aussi obtenir la même surface par identifications de côtés opposés d'un octogone de H.

Une telle surface à courbure -1 peut aussi être obtenue comme périodisation de H par un groupe Γ.

La figure obtenue dans le disque H s'appelle pavage hyperbolique.

La figure représente le cas du groupe engendré par les réflexions par rapport aux

Figure III–3: construction d'une surface de genre 2 à partir de 4 hexagones

côtés d'un triangle géodésique d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}$.

Comme on voit sur la figure, les triangles sont de plus en plus petits pour la distance euclidienne, alors qu'ils restent tous de même taille pour la métrique de Poincaré. On pourra consulter le livre de Escher pour d'autres dessins de pavages hyperboliques.

Figure III–4: un pavage du plan hyperbolique

Un autre exemple remarquable est celui du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$, prototype du cas *arithmétique* (on verra plus tard que si, du point de vue classique, le cas arithmétique est normal, il n'en est pas de même du point de vue quantique).

Le flot géodésique:

on considère tout d'abord, comme Newton, un espace de phases qui est celui des paires (position-impulsion). Comme la dynamique géodésique est à vitesse constante, on peut se restreindre au cas de la vitesse 1. On obtient ainsi un espace de phases P de dimension 3 dont un point $Z = (z, v)$ est la donnée d'un point z de la surface X et d'un vecteur unitaire v en ce point. Cet espace de phase P est muni d'une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique $d\mu(z)$, la mesure *micro-canonique* de Liouville. La dynamique (flot géodésique) $\varphi_t(z, v) = (z', v')$ est donnée ainsi : on parcourt la géodésique de vecteur vitesse initiale v pendant le temps t, on obtient le point z' et le vecteur vitesse à cet instant est v'.

Figure III–5: Le flot géodésique.

Il est aisé de mettre en évidence les propriétés statistiques de ce flot : l'argument de Hopf montre l'ergodicité (chaos faible), des arguments d'analyse harmonique (généralisation des séries de Fourier) montrent les propriétés de mélange et de décroissance des corrélations, le *closing-lemma* et le théorème de récurrence de Poincaré montrent la densité des géodésiques périodiques.

Ergodicité:

il s'agit de la propriété statistique la plus simple : le temps moyen passé par une géodésique typique dans un domaine de la surface (et même de l'espace des phases) est proportionel à l'aire de ce domaine D :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\varphi_t(x))dt = \mu(D) \ .$$

En particulier, presque toutes les trajectoires approchent tout point de l'espace des phases.

Donnons un argument caricaturant celui de Hopf. Admettons que ce temps moyen existe pour toute demi-géodésique. Il ne dépend alors que du point à l'infini de cette géodésique. Birkhoff nous dit que ce temps moyen est indépendant de la direction de propagation. On

Figure III–6: L'ergodicité du flot géodésique et l'argument de Hopf.

en déduit que ce temps moyen est indépendant de la géodésique considérée en considérant pour 2 géodésiques γ_1 et γ_2 une géodésique γ positivement asymptote à γ_1 et négativement à γ_2.

Mélange: la propriété d'ergodicité n'est pas une propriété forte, elle est satisfaite par un rotation irrationnelle du cercle pour laquelle d'autres propriétés statistiques sont fausses. La propriété de mélange s'exprime ainsi: pour tout domaine A et B de P, on a

$$\lim_{t \to \infty} \mu(A \cap \varphi_t(B)) = \mu(A).\mu(B) \ .$$

Figure III–7: Flot mélangeant.

Exposants de Liapounov:

ces exposants mesurent la sensibilité aux conditions intiales et la divergence exponentielle des trajectoires. Le modèle de Poincaré permet un calcul trivial de ces exposants ; si γ_1 et γ_2 sont 2 géodésiques distinctes non asymptotes $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t) \sim Ce^t$ (t tend vers

$+\infty$). Ainsi donc une petite perturbation des conditions initiales de l'ordre de $\varepsilon > 0$ devient macroscopique en un temps de l'ordre de $\text{Log}\,|\varepsilon|$.

Trajectoires périodiques:

le flot géodésique sur une surface de Riemann a beaucoup de trajectoires périodiques : chaque classe d'homotopie d'applications de S^1 dans X contient une unique courbe de longueur minimale qui est une géodésique périodique. Comme le groupe de Poincaré de ces surfaces est hautement non commutatif, les classes d'homotopie précédentes prolifèrent exponentiellement. On peut montrer des résultats asymptotiques du type $N(l) \sim e^l/l$ où $N(l)$ est le nombre de géodésiques périodiques de période $\leq l$. La preuve la plus simple de cette asymptotique fait intervenir la quantification du flot géodésique via la formule des traces de Selberg.

Figure III–8: une géodésique périodique.

On peut facilement montrer la densité des géodésiques périodiques: pour tout Z de P, il existe une suite (Z_n, T_n) tel que Z_n tend vers Z et la trajectoire issue de Z_n est périodique de période T_n (T_n tend vers l'infini). L'idée est d'utiliser le théorème de retour de Poincaré pour fabriquer T'_n tel que $\varphi_{T'_n}(Z)$ est proche de Z, puis de montrer que cette trajectoire presque fermée est proche d'une trajectoire fermée, par calcul de la dérivée seconde de l'action qui est *uniformément* minorée.

Stabilité structurelle:

les trajectoires du flot géodésiques sont donc dynamiquement instables, mais ont une autre propriété de stabilité mise en évidence par Anosov : la stabilité structurelle; si on perturbe un peu le système hamiltonien, on obtient un nouveau système dont le portrait de phases est homéomorphe au premier. Les aspects qualitatifs de la dynamique n'ont pas changé.

3. La mécanique quantique sur les surfaces de Riemann. —

En mécanique quantique, l'espace des phases est un espace de Hilbert (espace fonctionnnel), ici $L^2(X)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur la surface X. La dynamique, associée à un hamiltonien quantique $\hat{H}$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \hat{H}u, \; u(0) = u_o \; .$$

On la résoud formellement par

$$u(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar} u_o \; .$$

Dans le cas euclidien, le laplacien est le laplacien usuel

$$\Delta = -({\partial_x}^2 + {\partial_y}^2) \; .$$

L'espace de Hilbert associé au tore $\mathbf{R}^2/\Gamma$ est formé des fonctions périodiques sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs complexes et de périodes Γ. On a une décomposition spectrale explicite donnée par les séries de Fourier et les valeurs propres

$$4\pi^2(m^2 + n^2), \; m, n \in \mathbf{Z} \; .$$

On voit donc que, même au sens quantique, la dynamique est intégrable.

Le laplacien associé à la métrique de Poincaré est donné en coordonnées locales par

$$\Delta = -\frac{(1 - |z|^2)^2}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2) \; .$$

L'équation de Schrödinger, correspondante quantique du flot géodésique, associée à $\hat{H} = \hbar^2 \Delta$ s'écrit:

$$i\hbar \frac{du}{dt} = \hbar^2 \Delta u \; .$$

On peut tout aussi bien considérer l'hamiltonien *pseudo-différentiel* $\hbar\sqrt{\Delta}$ et l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{du}{dt} = \hbar \sqrt{\Delta} u$$

qui élimine le paramètre $\hbar$ (inutile à cause de l'homogénéité du problème). On note $U(t) = e^{-it\sqrt{\Delta}}$ le groupe à un paramètre unitaire qui résoud l'équation de Schrödinger et $Z(t) = \mathrm{trace}(U(t)) = \sum e^{-it\mu_n}$ la fonction (distribution) de partition quantique.

Cette dernière équation admet les solutions stationnaires

$$u_n(t) = e^{-i\mu_n t}\varphi_n \; ,$$

où $\Delta\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ et $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$. Ici $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ est le spectre du laplacien sur X.

La limite semi-classique:

les niveaux d'énergie quantiques, valeurs propres de $\hbar\sqrt{\Delta}$, sont les $\hbar\mu_n$. Si on se fixe une énergie voisine de 1 (analogue de la normalisation des vitesses pour l'espace des phases classique), on a donc :

$$E_n = \hbar\mu_n \sim 1 \ .$$

L'asymptotique semi-classique ($\hbar$ tend vers 0) correspond donc à l'asymptotique des grandes valeurs propres :

$$\mu_n \to \infty \ ,$$

et plus précisément $\mu_n \sim \frac{1}{\hbar}$.

L'asymptotique de Weyl (conjecturée par Hilbert) de la densité de valeurs propres $N(\mu) = \#\{n \mid \mu_n \leq \mu\}$ est donnée par la formule simple suivante :

$$N(\mu) \sim \frac{\mathrm{aire}(X)}{4\pi}\mu^2 \ ,$$

qui s'identifie à l'approximation de Thomas-Fermi :

$$\#\{E_n(\hbar) \leq E\} \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\mathrm{vol}(H(x,p) \leq E) \ ,$$

où H est l'Hamiltonien classique, ici $H = \frac{(1-|z|^2)^2}{4}(p_x^2 + p_y^2)$ et $d = 2$.

Pour obtenir des renseignements plus fins sur la fonction (discontinue) $N(\mu)$, il est agréable de la régulariser (au sens de Schwartz), on pose donc pour une fonction ρ lisse, d'intégrale 1 et à décroissance rapide:

$$N_\rho(\mu) = \sum_n \rho(\mu - \mu_n) \ .$$

En fait, on utilise souvent une famille

$$\rho_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{u}{\varepsilon}) \ .$$

Lorsque ε tend vers 0, $N_{\rho_\varepsilon}(\mu)$ décrit une densité régularisée correspondant à un regroupement de paquets de valeurs propres de largeur $\sim \varepsilon$. Autrement dit on observe le spectre avec un grossissement $1/\varepsilon$.

Le lien entre la densité régularisée et l'équation de Schrödinger est donné par la formule d'inversion de Fourier : si $\hat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu}\rho(\mu)d\mu$, on a :

$$N_\rho(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} Z(t)e^{it\mu}\hat{\rho}(t)dt \ .$$

Si on veut une analyse fine ρ doit être très localisée et cela implique que $\hat{\rho}$ est très étalée et donc une connaissance de $Z(t)$ (et donc de $U(t)$) pour t grand. A la limite le spectre exact est lié aux solutions périodiques de l'équation de Schrödinger qui sont donc connues pour tout $t \in \mathbf{R}$.

2 échelles sont très importantes, $\varepsilon = 1$ qui correspond du point de vue classique à un intervalle de temps borné et qui prend en compte un nombre de valeurs propres dans

un intervalle de longueur ~ 1 qui en compte environ μ et l'échelle $\varepsilon = \mu^{-1}$ qui correspond à la séparation des niveaux (Weyl) (et donc à une analyse fine du spectre analogue à celle donnée par Bohr-Sommerfeld) et à un temps de l'ordre de μ.

La première échelle est une échelle *non universelle* donnée par les formules de traces semi-classique (voir section III.5), alors que les échelles plus fines sont (au-delà du semi-classique) le domaine des *classes d'universalités* (GOE, GUE, Poisson) (voir section III.6). Elles sont difficiles d'accès par les méthodes semi-classiques qui décrivent mal les asymptotiques simultanées $\hbar \to 0$ et $t \to \infty$; ce phénomème fondamental (et mystérieux) est appellé par certains auteurs *rupture de l'approximation semi-classique.*

La limite semi-classique se décrit bien en termes de l'évolution d'une fonction d'onde localisée de la forme :

$$\Phi_{x_o,p_o}(x) = c e^{-\frac{1}{2\hbar}\|x-x_o\|^2} e^{\frac{i}{\hbar}p_o x} \ .$$

L'évolution semi-classique de Φ, $U(t)\Phi$, est donnée lorsque t reste borné par une fonction d'onde du même type localisée au point $\varphi_t(x_o,p_o)$ où φ_t est le flot classique. Lorsque t augmente, cette fonction gaussienne se délocalise en un temps lié à l'exposant de Liapounov λ :

$$T \sim \frac{1}{\lambda} |\ln \hbar| \ ,$$

qui est le temps nécessaire pour qu'une région initiale de diamètre $\hbar$ ne soit plus localisée près de la trajectoire classique. Au delà de ce temps la non linéarité de la dynamique classique joue pleinement son rôle et $U(t)\Phi$ reste localisé sur la variété instable de (x_o,p_o) qui s'enroule de façon compliquée dans l'espace des phases Z.

Figure III–9: variété instable d'un point hyperbolique

4. Ergodicité semi-classique. —

On sait que dans les cas complètement intégrables, par exemple le flot géodésique sur le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ dont la décomposition spectrale du laplacien est donnée par les séries de Fourier, les fonctions propres se localisent sur les tores invariants; dans le cas du tore, les tores $p = cte$ satisfaisant les conditions de Bohr-Sommerfeld, ici $p \in 2\pi\mathbf{Z}^2$: si

$$\varphi_{p_1,p_2}(x,y) = e^{2\pi i(p_1x+p_2y)} \ ,$$

on a :

$$\Delta\varphi_{p_1,p_2} = 4\pi^2(p_1^2+p_2^2)\varphi_{p_1,p_2} \ .$$

Que se passe-t-il dans le cas d'un flot chaotique? En 1976, A. Shnirelman a donné des arguments en faveur d'une ergodicité semi-classique des fonctions propres et son résultat a été confirmé par Zelditch et moi-même 10 ans plus tard.

Le résultat est le suivant; disons qu'une sous-suite λ_{n_j}, $n_j < n_{j+1}$, de la suite des valeurs propres est de densité 1 si l'on a :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\#\{j|\ \lambda_{n_j} \leq \lambda\}}{\#\{n|\ \lambda_n \leq \lambda\}} = 1 \ .$$

Shnirelman affirme, sous l'hypothèse d'ergodicité du flot géodésique, l'existence d'une suite de densité 1 de valeurs propres λ_{n_j} telle que les fonctions propres associées normalisées ($\int_X |\varphi_n(x)|^2 dx = 1$) s'équirépartissent au sens suivant : pour tout domaine $D \subset X$ assez régulier, on a :

$$\lim \int_D |\varphi_{n_j}|^2 dx = \frac{\text{aire}(D)}{\text{aire}(X)} \ .$$

Personne ne sait, pour l'instant, si on a *unique ergodicité* semi-classique, autrement dit s'il est vraiment nécessaire de prendre une sous-suite de la suite des λ_n. Rudnick et Sarnak ont montré qu'on a unique ergodicité dans le cas arithmétique à condition de prendre une base de Hecke des fonctions propres (voir plus bas).

Avec Bernard Parisse de l'IF, nous avons montré que, si une suite de fonctions propres se concentrent sur une géodésique périodique instable, la vitesse de concentration est lente (logarithmique par rapport aux λ_{n_j}).

D'autre part, des expériences numériques menées par plusieurs groupes, et d'abord par Mc Donald et Kaufman pour le billard de Bunimovitch (stade) en 1979, montrent sur les représentations de l'intensité des modes propres des lignes d'intensité maximale correspondant à certaines géodésiques périodiques qui semblent donc être lieu de concentration de fonctions propres. E. Heller a proposé une théorie pour expliquer ces marques qu'il appelle *cicatrices*. Leur statut mathématique est encore incertain. Elles ne sont pas incompatibles avec l'unique ergodicité semi-classique.

5. La formule des traces de Selberg. —

Le flot géodésique sur les surfaces de Riemann à courbure négative n'est pas intégrable et on ne peut pas espérer de formules explicites non plus pour le spectre. On devra se contenter de formules sommatoires qui généralisent la formule de Poisson.

Prenons l'hamiltonien quantique

$$\hat{H} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

sur le tore de dimension 1, $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Son spectre est formé des nombres $2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ (séries de Fourier).

On a alors la formule suivante, pour $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \rho(\mu - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \hat{\rho}(m)e^{im\mu} \ ,$$

où

$$\hat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu}\rho(\mu)d\mu$$

la transformée de Fourier de ρ (qui est bien une fonction du temps...). C'est la classique formule sommatoire de Poisson.

On s'intéresse donc à la densité régularisée

$$N_\rho(\mu) = \sum_n \rho(\mu - \mu_n) \ .$$

Motivé par l'analogie avec la fonction ζ de Riemann, A. Selberg a montré en 1956 que, pour des fonctions ρ convenables, $N_\rho(\mu)$ admet une expression exacte comme somme d'un terme régulier non oscillant $N_{TF}(\mu)$ dont la partie principale est donnée par Weyl :

$$N_{TF}(\mu) \sim \frac{\text{Aire}(X)}{2\pi}\mu$$

et de termes oscillants $N_\gamma(\mu)$ associés aux géodésiques périodiques.

L'expression de N_γ est :

$$N_\gamma(\mu) = \hat{\rho}(L_\gamma)c(\gamma)e^{i\mu L_\gamma} \ ,$$

où L_γ est la longueur de la géodésique périodique γ et $c(\gamma)$ est un nombre complexe non nul calculable en termes de la dynamique linéarisée près de γ (application de Poincaré linéarisée, indice de Morse).

Cette formule s'étend en une formule asymptotique (appellée formule de traces de Gutzwiller dans la littérature) valable en toute généralité (en particulier sans aucune hypothèse de type chaos classique, le cas complètement intégrable étant une conséquence de la formule sommatoire de Poisson) à condition de prendre ρ telle que $\hat{\rho}$ soit à support compact, ce qui revient à ne considérer la dynamique de l'équation de Schrödinger que sur un intervalle borné en temps et donc une contribution d'un nombre fini de géodésiques périodiques, en vertu de la formule d'inversion de Fourier :

$$\rho(\mu - \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{it\mu}e^{-it\sqrt{\Delta}}\hat{\rho}(t)dt \ .$$

La justification heuristique la plus simple est liée à l'intégrale de Feynman ; donnons-la : le propagateur quantique

$$p(t,x,y)$$

noyau intégral de l'opérateur $U(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}$ est donné selon Feynman ([F-H]) comme une superposition d'amplitudes associées aux différents chemins $\gamma \in \Omega_{x,y,t}$ qui est l'ensemble de chemins ($\gamma : [0,t] \to X$ tels que $\gamma(0) = x,\ \gamma(t) = y$) :

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{x,y,t}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t L(\gamma(s),\gamma'(s))ds} |d\gamma| \ ,$$

où $L : TX \to \mathbf{R}$ est le lagrangien classique. Dans le cas des géodésiques, le lagrangien est l'énergie cinétique $\|\gamma'\|^2$.

Figure III–10: l'intégrale de Feynman.

Si Ω_t désigne maintenant l'espace des lacets fermés parcouru en le temps t, on obtient la fonction de partition quantique :

$$Z(t) = \sum e^{-itE_j/\hbar} = \int_X p(t,x,x)dx = \int_{\Omega_t} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t L(\gamma(s),\gamma'(s))ds} |d\gamma| \ ,$$

comme une intégrale sur les *lacets*. L'application de la phase stationnaire, lorsque $\hbar$ tend vers 0, fait apparaitre les trajectoires fermées comme points critiques de $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^t L(\gamma(s),\gamma'(s))ds$ sur Ω_t.

Dans le cas qui nous préoccupe, il se trouve que, bien que la surface X puisse être compliquée, l'espace Ω_t se décompose en composantes connexes simples, une par géodésique périodique et que la décomposition de $Z(t)$ en somme d'intégrales sur ces composantes connexes permet de prévoir une formule sommatoire exacte.

La fonction ζ de Riemann :

la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi_{p \text{ premier}}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1},\ \mathrm{Re}(s) > 1,$$

s'étend en une fonction méromorphe sur **C** ayant des zéros aux entiers pairs < 0. Riemann a fait l'hypothèse semon laquelle les autres zéros satisfont $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Cette hypothèse centrale en théorie des nombres est restée improuvée depuis environ 150 ans.

Il existe des formules sommatoires ayant une analogie formelle avec celle de Selberg pour ces zéros. A. Connes [CO] vient de proposer un hamiltonien quantique dont le spectre serait donné par ces zéros et ainsi une voie d'attaque de l'hypothèse de Riemann.

6. Statistiques spectrales. —

Il s'agit d'exprimer des propriétés de nature statistique d'une suite (infinie) de nombres.

Soit $E_1 < E_2 < \cdots < E_n < \cdots$ une suite infinie de nombres réels vérifiant la condition asymptotique suivante :

$$(\star)\ \lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{n} = 1 \ .$$

On peut alors introduire plusieurs invariants statistiques, les plus simples étant :

–la distribution du plus proche voisin $p(s)$,

–l'écart quadratique par rapport à loi uniforme sur un intervalle de test de longueur L, $\Sigma^2(L)$ qui mesure la rigidité du spectre.

Par exemple, on peut poser (en supposant que ces limites existent) :

$$p(s)ds = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{p \leq n \mid s \leq E_{p+1} - E_p \leq s + ds\}}{n} \ .$$

Et de même :

$$\Sigma^2(L) = \lim_{E\to\infty} (\#\{p \mid E \leq E_p \leq E + L\} - L)^2 \ .$$

$p(s)$ mesure donc la statistique des écarts de niveaux, alors que $\Sigma^2(L)$ mesure la rigidité : $\Sigma^2(L)$ petit signifie que la suite est presque une suite arithmétique.

Si on a un vrai spectre, la condition $(\star)$ n'est pas satisfaite en général, mais les asymptotiques de type Weyl permettent un reparamétrage du spectre par une fonction puissance

$$E'_n = cE_n^\alpha$$

de façon à ce que $(\star)$ soit satisfaite.

Les spectres suivants sont reproduits du livre [ME] :

Figure III–11: spectres

Des exemples : la distribution de Poisson consiste à prendre N points répartis de façon équiprobable dans un intervalle de longueur N et la limite quand N tend vers l'infini. Il est bien connu qu'on a alors :

$$p(s) = e^{-s} \ .$$

De même, on montre que

$$\Sigma^2(L) = L \ .$$

Les spectres génériques ne sont pas poissonniens, ne serait-ce qu'à cause de la répulsion des niveaux. Il est connu depuis Wigner et Von Neumann ($\sim$ 1930) que la condition $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ définit un sous-ensemble de codimension 2 de l'espace des opérateurs symétriques. On s'attend donc à : $p(0) = 0$ pour un hamiltonien quantique générique. Cette répulsion de niveaux n'est pas satisfaite dans les cas complètement intégrables; par exemple le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ a toutes ses valeurs propres dégénérées! Mais le cas complètement intégrable est *atypique* comme on le sait depuis Poincaré.

GOE :

Décrivons brièvement la théorie GOE. On considère des ensembles (au sens de la thermodynamique) de matrices symétriques $N \times N$ dont les éléments $a_{i,j}, \ i \leq j$ sont des variables aléatoires normales indépendantes de même loi. On s'intéresse alors aux statistiques spectrales lorsque $N \to \infty$. On montre que le spectre se répartit dans un intervalle $(-c\sqrt{N}, c\sqrt{N})$ avec donc un écart moyen $2c/\sqrt{N}$. On renormalise en considérant

$\lambda'_n = \frac{\sqrt{n}}{2c}\lambda_n$ et on peut alors calculer les limites thermodynamiques des statistiques spectrales. Le livre de Mehta [ME] en donne un exposé détaillé.

$p(s)$ est proche d'une courbe $ase^{-s^2/b}$ suggérée par Wigner.

$$\Sigma^2(L) = \frac{2}{\pi^2} \ln L + o(1),\ \ L \to \infty\ .$$

GUE : de même si on s'intéresse aux matrices hermitiennes on obtient les statistiques GUE.

Figure III–12: $\Sigma^2(L)$ et $p(s)$ pour Poisson et GOE.

Des expériences numériques :

On s'attend donc, et cela a été explicitement proposé par les physiciens d'Orsay dès 1984, à ce qu'à un flot géodésique chaotique corresponde une statistique de type GOE pour le spectre.

Les résultats numériques sont curieux : cela marche pour le stade ou le billard de Sinaï, mais les expériences menées sur certains triangles géodésiques du disque de Poincaré dont la dynamique classique a les mêmes propriétés que celles décrites plus haut semble montrer une dichotomie entre les triangles qui permettent de paver H, par exemple les angles $(\pi/2, \pi/3, \pi/7)$ (voir figure plus haut), et plus généralement l'infinité de possibilités

$$(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r})\ ,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1\ ,$$

pour lesquels GOE ne marche pas et ceux qui ne pavent pas, par exemple $(\pi/2, \pi/3, 2\pi/15)$, pour lesquels GOE était vérifiée.

Cette dichotomie n'était pas la bonne comme l'ont vu il y a quelques années E. Bogomolny, B. Georgeot et M.-J. Giannoni.

Il se trouve que, parmi les triangles (une infinité) qui pavent H, un certain nombre fini dont la liste est connue correspondent à des sous-groupes dits *arithmétiques* de $SL_2(\mathbf{R})$ et que ce sont ceux-là pour lesquels GOE n'est pas satisfaite. Je ne vais pas me lancer dans une définition précise des groupes arithmétiques, mais disons que l'arithméticité a comme conséquence une grande dégénérescence du spectre des longueurs des géodésiques périodiques. Cette dégénérescence est elle même reliée à une famille de symétries quantiques particulières, appellées correspondances de Hecke. Ces symétries supplémentaires, relativement cachées, font que ces hamiltoniens quantiques ne sont pas génériques! Luo et Sarnak ont démontré que GOE n'est effectivement pas satisfaite dans les cas arithmétiques.

Lorsque $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, H/Γ est l'espace des réseaux de $\mathbf{R}^2$ euclidien et si on définit, pour tout réseau z, $Y_n(z)$ comme l'ensemble des sous-réseaux d'indice n de z, les opérateurs $T_n\varphi(z) = \sum_{z' \in Y_n(z)} \varphi(z')$ commutent entre eux et avec Δ : ce sont les opérateurs de Hecke!

Les statistiques GUE sont utilisées lorsqu'il n'y a pas symétrie par inversion du temps (champs magnétiques). Montgomery a remarqué en 1973 que ces statistiques s'appliquent parfaitement aux zéros de la fonction ζ de Riemann, ce qui est cohérent avec l'approche proposée par Connes dans [CO].

7. Conclusions et perspectives. —

Au delà d'un effet de mode, on voit donc que *l'étude spectrale des systèmes quantiques classiquement chaotiques* est aujourd'hui une source de problèmes excitants et difficiles pour les mathématiciens et les physiciens : pour n'en mentionner que 2, citons le problème du statut théorique des cicatrices et celui de l'applicabilité (générique) des statistiques GOE pour les spectres des surfaces de Riemann.

Il est intéressant de voir les fausses pistes dans lequel se fourvoient parfois les chercheurs: la (fausse) dichotomie "paver-ne pas paver" en est une, les controverses sur les cicatrices, qui sont, rappellons-le, sans statut théorique bien clair, en sont une autre.

L'engouement pour les formules de trace et les questions de resommabibité comme seule voie d'accès à une analyse fine du spectre est, à mon avis, excessif, il semble qu'il faille revenir à une description semi-classique du propagateur lui-même; après tout l'objet primitif dans les matrices aléatoires n'est pas le spectre, mais les matrices...

Une évaluation en grand temps d'éléments de matrices $< \varphi_Z | U(t) | \varphi_{Z'} >$ où φ_Z désigne un *état cohérent* localisé en Z (fonction d'onde quantique présentant le maximum de localisation compatible avec le principe d'incertitude) n'apparait pas absolument hors de portée! La nature aléatoire de ces éléments de matrices, provenant du chaos classique et de phases suffisamment génériques, pourrait mener directement à l'applicabilité de la théorie des matrices aléatoires. Est-ce de la science-fiction?

8. Références. —

La principale référence sur le sujet est l'école des Houches [G-V-Z]. Le livre de

Gutzwiller [GU] déçoit en général les mathématiciens..., mais on y trouve de nombreuses informations et exemples qui font partie du folklore du sujet. Les 2 textes de Sarnak ont un net caractère mathématique. Pour les aspects mécanique classique, on pourra lire les travaux de l'école russe (Arnold, Sinaï). Pour la formule de Selberg, le meilleure référence est sans doute l'article de Hejhal [HE]; pour la mécanique quantique sur les surfaces de Riemann, le survey [B-V] est bien agréable à lire.

[A-A] V. Arnold, A. Avez. — *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.

[AR] V. Arnold. — *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, 1976.

[AR1] V. Arnold. — *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier, **16** (1966), 319-361.

[BE] A. Beardon. — *The geometry of discrete groups*, Springer, 1983.

[B-G-S] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, C. Schmit. — *Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws*, Phys. Rev. Lett., **52** (1984), 1-4.

[B-V] N. Balazs, A. Voros. — *Chaos on the pseudo-sphere*, Physics reports, **143** (1986), 109-240.

[C-F-S] I. Cornfeld, S. Fomin, Y. Sinaï. — *Ergodic theory*, Springer, 1982.

[CO] A. Connes. — *Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris, **323** (1996), 1231-1236.

[EC] B. Eckhardt. — *Quantum mechanics of classically non-integrable systems*, Phys. Report, **163** (1987), 205-297.

[EI] A. Einstein. — *Zum Quantensatz from Sommerfeld and Epstein*, Verh. Deutsch Phys. Ges., **19** (1917), 82-92.

[EK] I. Ekeland. — *Le calcul, l'imprévu*, Seuil, 1984.

[F-H] R. Feynman, A. Hibbs. — *Quantum mechanics and path integrals*, Mc Graw-Hill, 1965.

[GU] M. Gutzwiller. — *Chaos in classical and Quantum mechanics*, Springer, 1990.

[G-V-Z] M.-J. Gianonni, A. Voros, Zinn-Justin. — *Chaos and Quantization*, Ecole des Houches, 1989.

[HE] D. Hejhal. — *The Selberg trace formula*, Duke math. J., **43** (1976), 441-482.

[MA] G. Mackey. — *The mathematical foundations of quantum mechanics*, Benjamin, 1963.

[ME] M. L. Mehta. — *Random Matrices*, Academic press, 1990.

[MO] J. Moser. — *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton, 1973.

[OZ] A. M. Ozorio de Almeida. — *Hamiltonian systems, chaos and quantization*, Cambridge, 1988.

[RU] D. Ruelle. — *Hasard et chaos*, Odile Jacob, 1991.

[SA1] P. Sarnak. — *Arithmetic Quantum Chaos (Shur Lectures)*, Israel math. conf. proc., **8** (1995), 183-236.

[SA2] P. Sarnak. — *Spectra and eigenfunctions of Laplacians*, Preprint, (1995), 1-18.

[SI] Y. Sinaï. — *Introduction to ergodic theory*, Princeton, 1976.

[TE] A. Terras. — *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications*, Springer, 1985.

Y. CdV, Institut Fourier,

Unité mixte de recherche CNRS-UJF,

BP 74, F-38402-St Martin d'Hères Cedex.

ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr