

# SPECTRES DE GRAPHS

Yves COLIN de VERDIÈRE

*Institut Fourier et Institut Universitaire  
de France.*

1991 *Mathematics Subject Classification*. 05C10, 05C15, 05C50,  
35J10, 58G25

*Key words and phrases*. graphe, spectre de graphe, plongement de  
graphe, perturbation singulière de valeurs propres, effet tunnel,  
éléments finis, équation de Schrödinger

## PRÉFACE

L'origine de ce livre est un cours de DEA donné à l'ENS Lyon de février à juin 1994.

Je me suis également inspiré de plusieurs textes de survol que j'ai écrit (références [Col193] et [Col197b]).

Le sujet étant extrêmement vaste, je n'ai pas tenté de le décrire complètement (l'intersection avec les livres [CDS80], [Chu97] et [Lub94] est presque vide), mais me suis laissé guider par mes propres centres d'intérêt.

**Remerciements.** J'ai largement utilisé les notes prises par Frédéric Mathéus que je tiens à remercier ici. Je remercie aussi Roland Bacher qui a relu le texte avec une grande rigueur et suggéré de nombreuses et précieuses améliorations.

Enfin, je tiens à exprimer ici tout ce que je dois à François Jaeger (1947-1997) dont la disparition laisse un grand vide : c'est à lui que je dois ce que j'ai pu apprendre de théorie des graphes ; sa patience, sa disponibilité et sa culture m'ont toujours émerveillé. Plus qu'un collègue et un maître, c'est surtout un ami que nous avons perdu. J'espère qu'il aurait aimé ce livre ...

**Adresse de l'auteur.**

*Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF,  
BP 74,  
F-38402-St MARTIN D'HÈRES CEDEX.*

*yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr*

## Table des matières

PRÉFACE	ii
INTRODUCTION	1
Chapitre 1. DÉFINITIONS ET EXEMPLES	5
1. GRAPHERS	5
2. SPECTRE D'UN GRAPHE	6
3. EXEMPLES DE SPECTRES DE GRAPHERS	8
4. TROU SPECTRAL D'UN GRAPHE ET EXPANSION	13
5. MULTIPLICITÉS DES VALEURS PROPRES ET PLONGEMENTS DE GRAPHERS	14
6. RÉSEAUX ÉLECTRIQUES	14
7. AUTRES PROBLÈMES	15
Chapitre 2. SPECTRES	17
1. LAPLACIENS SUBORDONNÉS À UN GRAPHE	17
2. PRINCIPE DU MINIMAX	18
3. THÉORÈME DE COURANT	20
4. GRAPHERS DE CAYLEY	24
5. CALCUL FONCTIONNEL ET MESURES SPECTRALES	26
6. GRAPHERS INFINIS	28
7. CAS D'UN ARBRE HOMOGENÈME DE DEGRÉ $q + 1$	29
8. THÉORIE DE FLOQUET ET SPECTRES DE BANDES	32
9. LE CAS PÉRIODIQUE DE DIMENSION 1	34
Chapitre 3. LE TROU SPECTRAL DES GRAPHERS ET LEURS PROPRIÉTÉS D'EXPANSION	37
1. CONSTANTES DE CHEEGER	37
2. $\lambda_1$ , TROU SPECTRAL ET INÉGALITÉS DE CHEEGER	39
3. CHEEGER POUR LES PROCESSUS DE MARKOV	41
4. EXPANSEURS ET GRAPHERS DE RAMANUJAN	42
5. LES GRAPHERS DE GABBER-GALIL	44
6. LA PROPRIÉTÉ (T) DE KAZHDAN	48
7. LA PROPRIÉTÉ $(T_f)$ POUR $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$	50
8. LA PROPRIÉTÉ $(T_f)$ POUR $SL_3(\mathbb{Z})$	52

Chapitre 4. LIMITES SINGULIÈRES ET $\Gamma$ -CONVERGENCE	55
1. ESPACES LAGRANGIENS ET OPÉRATEURS AUTO-ADJOINTS AVEC DOMAINES	56
2. EXEMPLES DE $\Gamma$ -CONVERGENCE	58
3. $\Gamma$ -CONVERGENCE ET MINEURS	66
4. COMPACTIFICATION DE $O_G$	71
Chapitre 5. MULTIPLICITÉS DES VALEURS PROPRES ET INVARIANTS ASSOCIÉS	75
1. INTRODUCTION	75
2. PERTURBATIONS DES VALEURS PROPRES MULTIPLES ET TRANSVERSALITÉ	76
3. INVARIANTS SPECTRAUX DE GRAPHES	83
4. MONOTONIE PAR MINEURS	85
5. $\mu$ ET LA PLANARITÉ	86
6. $\nu$ ET LA LARGEUR D'ARBRE	88
7. PROBLÈMES	96
Chapitre 6. DISCRET ET CONTINU	99
1. INTRODUCTION	99
2. MAJORATIONS DES MULTIPLICITÉS	99
3. L'EFFET TUNNEL SEMI-CLASSIQUE	101
4. LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS REVISITÉE	104
Chapitre 7. RÉSEAUX ÉLECTRIQUES	109
1. RÉPONSE D'UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE	109
2. LIMITES SINGULIÈRES	115
3. REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES	116
4. LA COMBINATOIRE DES RPC	120
5. LE PROBLÈME INVERSE POUR LES REPC	128
Bibliographie	135
Index	141

## INTRODUCTION

Le but est de développer pour les graphes finis l'analogie de la théorie spectrale pour les opérateurs du type laplacien riemannien ou opérateur de Schrödinger (voir [BGM71], [CFKS87]). Si on se donne une variété compacte  $X$ , il y a plusieurs familles naturelles d'opérateurs différentiels elliptiques auto-adjoints sur  $X$  : les laplaciens riemanniens  $\Delta_g$  construits à partir d'une métrique riemannienne  $g$  sur  $X$ , les opérateurs de Schrödinger qui sont de la forme  $H = \Delta_g + V$  où  $V \in C^\infty(X, \mathbb{R})$  et les opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique plus compliqués à définir, utilisant outre la métrique  $g$ , la donnée d'un fibré hermitien de dimension 1 sur  $X$  muni d'une connection hermitienne  $\nabla$ .

Ces opérateurs ont un spectre discret infini

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

qui ne s'accumule qu'en  $+\infty$ . On adopte (ici et d'une façon générale dans ce livre) la convention de répéter chaque valeur propre suivant sa multiplicité.

De façon un peu schématisée et arbitraire, on peut diviser la théorie spectrale de ces opérateurs en 2 thèmes : la théorie asymptotique (asymptotique *semi-classique*) des grandes valeurs propres et la théorie des *premières valeurs propres* (minoration du trou spectral en termes géométriques, multiplicités).

Dans le cas des graphes, on a les analogues des 3 familles précédentes. Les objets de base sont les opérateurs de type Schrödinger (avec ou sans champ magnétique) sur un graphe  $G$ . Ces ensembles ( $M_G$  et  $O_G$ ) contiennent les laplaciens canoniques étudiés habituellement [CDS80]. Ils contiennent aussi ceux que l'on rencontre comme limites singulières d'opérateurs continus, dans les méthodes numériques du type éléments finis ainsi que les générateurs de processus de Markov réversibles.

Bien sûr, ce n'est pas seulement une analogie formelle entre le cas continu et le cas discret : il y a de multiples passages de l'un à l'autre (effet tunnel semi-classique, limites singulières de domaines ou de variétés, méthodes des éléments finis). Certains thèmes ou résultats ont des versions dans les 2 contextes :

L'inégalité de Cheeger, découverte dans le cas du laplacien riemannien, n'a été trouvée pour les graphes que plus tard bien qu'elle soit bien plus simple !

Un autre sujet important pour le laplacien riemannien est l'étude spectrale des dégénérescences de variétés riemanniennes (effondrement). Il se trouve que l'on peut faire une étude très poussée de cette question dans le cas des graphes liée à diverses notions de contraction d'un graphe, par exemple celle de mineurs.

Enfin le célèbre problème de Caldéron (détermination de la conductivité d'une plaque métallique à partir de l'application qui à un potentiel appliqué sur le bord associe le courant sortant) est bien sûr l'analogie continue de la détermination d'un réseau électrique résistif à partir de sa réponse.

L'idée de ce livre est donc de présenter le spectre des opérateurs sur les graphes en ayant en tête les analogues continus. Ce livre peut donc servir aussi comme introduction au spectre du laplacien riemannien !

Les sujets abordés dans ce livre sont les suivants : après un premier chapitre où sont données les premières définitions et des exemples de problèmes conduisant à des spectres de graphes et un deuxième chapitre consacré aux généralités d'analyse fonctionnelle (minimax, théorèmes de type Courant, mesures spectrales), on aborde 4 sujets.

**Trou spectral.** On introduit le *trou spectral* et les fameuses *inégalités de Cheeger*. On ne donne pas ici de construction de familles optimales de graphes (graphes de Ramanujan), mais on se contente de décrire la construction de Gabber-Galil. Cela mène directement à la propriété (T) de Kazhdan pour  $SL_3(\mathbb{Z})$ .

**Multiplicités.** On s'intéresse aux analogues du théorème de Cheng [Che76] pour les graphes :

**THÉORÈME 0.1.** *Si  $g$  est une métrique riemannienne quelconque sur la sphère  $S^2$ , la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_2$  du laplacien  $\Delta_g$  est  $\leq 3$ .*

Cela nécessite d'introduire des idées liées à la transversalité et aux limites singulières de matrices symétriques ( $\Gamma$ -convergence).

On construit à partir de là des invariants numériques des graphes liés au genre et à la largeur d'arbre.

**Discret et continu.** Une motivation importante pour étudier le spectre des opérateurs sur les graphes est d'obtenir des informations sur le cas continu. C'est pourquoi nous indiquons quelques passages du continu au discret : méthode numériques, limite semi-classique.

**Réseaux électriques.** Enfin, on considère les problèmes de type Dirichlet pour un graphe muni d'un bord : on définit la réponse d'un réseau électrique résistif et caractérise les réponses des réseaux planaires circulaires selon [Col94] et [CGV96].





## CHAPITRE 1

# DÉFINITIONS ET EXEMPLES

### 1. GRAPHERS

Ce § contient les principales définitions relatives aux graphes. On pourra consulter à ce sujet les livres [Big74], [Ber67], [Bol79], [Chu97].

**DÉFINITION 1.1.** *Un graphe (sans boucles, ni arêtes multiples)  $G = (V, E)$  est la donnée d'un ensemble  $V$ , l'ensemble des sommets et d'un sous-ensemble  $E$  de  $\mathcal{P}_2(V)$  (l'ensemble des parties à 2 éléments de  $V$ ), l'ensemble des arêtes.*

*$i, j, \dots$  sont des sommets,  $\{i, j\}$  est une arête. Le degré (ou la valence) du sommet, noté  $d(i)$ , est le nombre d'arêtes  $\{i, j\}$  de  $E$ .*

On suppose souvent que le graphe est fini, i.e.  $V$  est un ensemble fini. Les graphes infinis sont en général de degré partout fini et même borné.

Parfois, on aura des graphes avec *boucles* : cela veut dire qu'il y a aussi des arêtes du type  $\{i, i\}$  que l'on peut dessiner comme une boucle au sommet  $i$ . En chimie les arêtes sont aussi munies de multiplicités qui indique le type de liaison entre atomes.

A un graphe  $G$ , on associe un espace topologique  $G_t$  de dimension 1 : c'est le sous-espace de  $\mathbb{R}^V = \bigoplus_{i \in V} \mathbb{R}\varepsilon_i$  qui est réunion des segments  $[\varepsilon_i, \varepsilon_j]$  pour  $\{i, j\} \in E$ .

Un graphe  $G$  est *planaire* si  $G_t$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ . Plus généralement, on définit le *genre* (orientable)  $\gamma(G)$  d'un graphe comme

$$\gamma(G) = \inf_{G_t \subset S} \gamma(S)$$

où le inf est pris sur les surfaces compactes connexes orientables  $S$  telle que  $G_t$  est un sous-espace de  $S$  et  $\gamma(S)$  est le genre de  $S$ .

Un *cycle*  $\gamma$  de longueur  $k = |\gamma|$  de  $G$  est une suite  $(i_1, i_2, \dots, i_{k+1} = i_1)$  de  $V$  telle que

$$\forall j = 1, \dots, k, \{i_j, i_{j+1}\} \in E .$$

Un cycle *simple* est un cycle  $(i_1, \dots, i_{k+1} = i_1)$  ayant exactement  $k$  sommets. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle simple ayant au moins 3 sommets.

## 2. SPECTRE D'UN GRAPHE

La terminologie *spectre d'un graphe*  $G$  est un peu abusive : il s'agit en fait du spectre de certains opérateurs subordonnés au graphe  $G$ . Si  $G = (V, E)$  est un graphe *fini*, un opérateur subordonné au graphe (ou opérateur de Schrödinger sur  $G$ ) est un opérateur linéaire symétrique réel  $A : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$  de matrice  $A = (a_{i,j})$  telle que :

$$(1) \quad a_{i,j} \begin{cases} < 0, & \text{si } \{i, j\} \in E; \\ = 0, & \text{si } \{i, j\} \notin E \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

On notera  $O_G$  l'ensemble de ces opérateurs. Un élément  $x$  ou  $f$  de  $\mathbb{R}^V$  sera vu comme une fonction de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  ; on se permettra ainsi d'écrire  $x(i)$  (au lieu de  $x_i$ ) et  $f(i)$ .

*Quelques mots de justification* : on a envie de généraliser au cas d'un graphe la notion d'*opérateur différentiel elliptique autoadjoint positif*.

Un *opérateur différentiel* est un endomorphisme  $A$  de  $\mathbb{C}^V$  qui est *local* :

$$Af(i) = W_i f(i) + \sum_{j \sim i} a_{i,j} f(j) .$$

L'*ellipticité* se traduit par la non nullité des  $a_{i,j}$ .

Pour ce qui est du caractère *autoadjoint*, on se donne une structure Hilbertienne sur  $\mathbb{C}^V$ , qui consiste à identifier  $\mathbb{C}^V$  avec  $l^2(V, \pi_0)$  où  $\pi_0$  est la mesure qui donne la masse 1 à chaque sommet.

Si on part d'une autre mesure  $\pi = \sum_{j \in V} \pi_j \delta(j)$  avec  $\pi_j > 0$ , un changement de jauge convenable

$$J : f \rightarrow g \text{ avec } g(j) = \pi_j^{-\frac{1}{2}} f(j) ,$$

est unitaire de  $l^2(\pi_0)$  sur  $l^2(\pi)$  et préserve la notion d'opérateur différentiel et l'ellipticité. Si  $A$  est un opérateur différentiel sur  $G$  et autoadjoint sur  $l^2(\pi)$ ,  $A_J = J^{-1}AJ$  est un opérateur différentiel sur  $G$  autoadjoint sur  $l^2(\pi_0)$  et a bien sûr même spectre que  $A$ .

On choisira de définir le caractère auto-adjoint par rapport à  $\pi_0$ . Bien sûr, d'autre choix peuvent être naturels, par exemple pour les processus de Markov réversibles.

La *positivité* se traduit par le fait que les  $a_{i,j}$  sont  $< 0$  pour toutes les arêtes.

Plusieurs variantes sont possibles, en particulier, on peut oublier le caractère réel de la matrice et s'intéresser à l'ensemble de tous les opérateurs elliptiques auto-adjoints. On notera cet ensemble  $M_G$ . Un tel opérateur sera vu comme un *opérateur de Schrödinger avec champ magnétique discret*.

On aura aussi besoin de considérer des opérateurs sur des *fibrés vectoriels* : un tel fibré est la donnée d'une collection d'espaces vectoriels indexée par les sommets et qui sont tous isomorphes. On peut étendre la notion d'opérateur elliptique auto-adjoint à ce cadre.

Enfin, il sera souvent intéressant de considérer des graphes infinis, localement finis.

*Quelques cas particuliers :*

a)  $A = -M_G$  où  $M_G$  est la *matrice d'adjacence de  $G$* . On a donc  $a_{i,j} = -1$  lorsque  $\{i, j\} \in E$  et 0 sinon.

b) Si  $A = \Delta_G = D_G - M_G$  où  $D_G$  est la matrice diagonale dont le coefficient  $a_{i,i}$  est égal au degré (valence)  $d_i$  de  $i$ . L'opérateur  $\Delta_G$  est appelé *laplacien canonique* ou *laplacien combinatoire* sur le graphe. La forme quadratique associée est

$$\langle x | \Delta_G | x \rangle = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2 .$$

Si on oriente chaque arête, on peut définir pour  $x \in \mathbb{R}^V$ ,  $dx \in \mathbb{R}^E$  par

$$dx((i, j)) = x(i) - x(j)$$

et on a alors  $\Delta_G = d^*d$ , où  $\mathbb{R}^E$  est muni de la structure euclidienne canonique.

Lorsque les sommets de  $G$  sont de degré constant égal à  $d$ , on a évidemment :

$$\Delta_G = d\text{Id} - M_G .$$

c) Il y a un autre laplacien noté  $\Delta'_G$  défini par

$$\Delta'_G x(i) = x(i) - \frac{1}{d(i)} \sum_{j \sim i} x(j) .$$

On peut l'appeler *laplacien harmonique de  $G$* . Il est autoadjoint par rapport à  $\pi = \sum d_i \delta(i)$ .

d) On dira que  $A$  est un *laplacien* si les sommes  $\sum_j a_{i,j}$  sont toutes nulles. Les vecteurs constants sont alors dans le noyau de  $A$ ,

On s'intéresse maintenant au spectre de  $A \in O_G$ . On verra que, si  $G$  est connexe, les valeurs propres (répétées avec multiplicité) vérifient :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\#V} .$$

En particulier, on étudiera le *trou spectral* ou *gap* défini par  $g(A) = \lambda_2 - \lambda_1$  et aussi la multiplicité de  $\lambda_2$ .

*Remarque :* (je dois cette remarque à Pierre de la Harpe).

C'est à Lagrange ([Lag67] p.72 à 79) que l'on doit le premier calcul général de spectre de graphe : celui du laplacien standard du graphe

linéaire à  $m$  sommets. Il a été conduit à ce problème en discrétisant l'équation de la propagation du son.

### 3. EXEMPLES DE SPECTRES DE GRAPHES

Les opérateurs introduits au § 2 et leurs spectres interviennent dans de nombreux problèmes :

**3.1. Petites oscillations de pendules couplés.** On considère une famille de pendules à un degré de liberté de masses  $m_i$  (les sommets de  $G$ ) dont certains sont reliés par des ressorts (les arêtes de  $G$ ). On se place près de la position d'équilibre et on prend comme coordonnée  $x_i$  l'éloignement du  $i$ -ème pendule par rapport à sa position d'équilibre.

L'énergie cinétique est alors :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 ,$$

alors que l'énergie potentielle due aux ressorts est

$$V = \frac{1}{2} c_{i,j} (x_i - x_j)^2 ,$$

où les  $c_{i,j}$  sont  $> 0$ . Si  $M$  est la matrice diagonale des  $m_i$  et  $C(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)$ , les équations des oscillations s'écrivent :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -C(x) .$$

Les oscillations quasi-périodiques du système de pendules sont donc superpositions d'oscillations périodiques de fréquences  $\omega_i$  telles que les  $\lambda_i = \omega_i^2$  soient les valeurs propres de la matrice  $A = M^{-1/2} C M^{-1/2}$  qui est un élément de  $O_G$ .

**3.2. Discrétisation d'un problème de Dirichlet par la méthode des éléments finis.** Pour ceci, voir [Cia78].

Considérons le problème de Dirichlet dans un domaine borné  $D$  à frontière lisse de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $T$  une triangulation de  $D$  par des triangles géodésiques,  $G$  le 1-squelette de  $T$ ,  $V_0$  l'ensemble des sommets de  $G$  qui sont sur le bord.

Soit  $F_T$  l'espace vectoriel des fonctions sur  $D$  qui sont continues et affines sur chaque triangle de  $T$ . Cet espace est isomorphe à  $\mathbb{R}^V$  car une telle fonction est donnée par sa valeur aux sommets de  $T$ . Considérons la forme quadratique  $q_T$  sur  $F_T$  définie par

$$q_T(\varphi) = \int_T \|d\varphi\|^2 ,$$

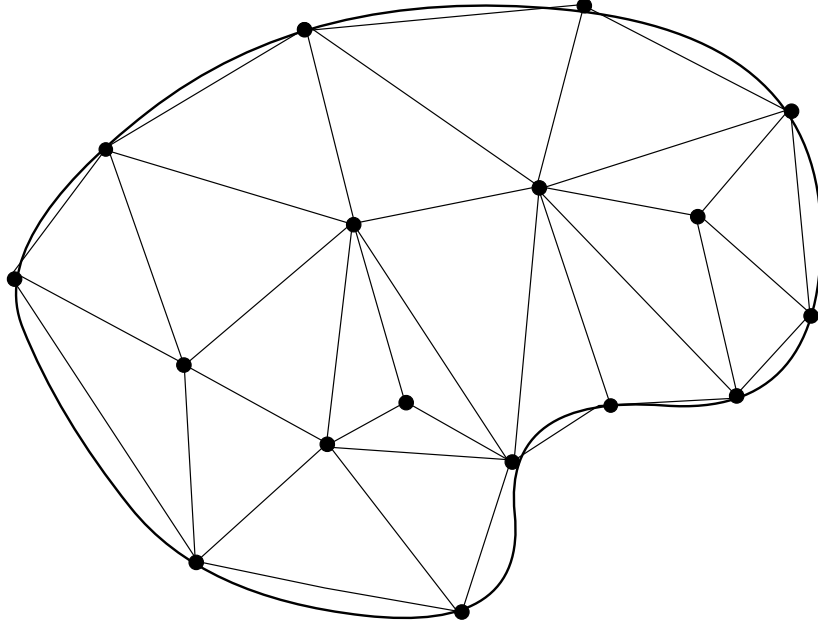


FIGURE 1. Éléments finis

appelée intégrale de Dirichlet. Alors, on a, si  $\varphi(i) = x_i$  :

$$q_T(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} c_{i,j} (x_i - x_j)^2 ,$$

avec  $c_{i,j} = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les deux angles opposés à l'arête  $(i, j)$  dans les deux triangles adjacents à  $\{i, j\}$ . La matrice de  $q_T$  est subordonnée à  $G$  si  $\alpha + \beta < \pi$  pour toute arête de la triangulation. En particulier, c'est le cas si  $T$  ne contient que des triangles à angles aigus.

Pour approximer la solution du problème de Dirichlet dans  $D$  avec donnée au bord  $f$ , on commence par discrétiser  $f$  en ne conservant que sa valeur sur les sommets de  $V_0$ , puis on minimise  $q_T(\varphi)$  avec  $\varphi = f$  sur  $V_0$ . On obtient ainsi  $\varphi$  qui est harmonique pour l'opérateur  $A$  associé à  $q$ .

**3.3. Effet tunnel semi-classique.** Voir [Col97a] pour plus de détails.

Soit  $H = -h^2 \Delta + V$  l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^2$ . On suppose  $V \geq 0$  et  $\liminf_{x \rightarrow \infty} V(x) = E_0 > 0$ . Supposons  $V^{-1}(0) = \{A_1, \dots, A_N\}$  (les  $A_i$  s'appellent les puits de potentiel) et  $V''(A_i) > 0$ . Supposons en outre que, près de  $A_i = (a_i, b_i)$ , on ait :

$$V(x, y) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + O(\|x - A_i\|^3) ,$$

près de  $A_i$ . Alors,  $H$  admet, pour  $h$  assez petit des valeurs propres  $0 < \lambda_1(h) < \lambda_2(h) \leq \dots \leq \lambda_N(h) < \lambda_{N+1}(h) \leq \dots < E_0$  et on veut évaluer le comportement asymptotique précis des  $\lambda_i(h)$  lorsque  $h$  tend vers 0. Soit  $F_N$  l'espace engendrés par les  $N$  premières fonctions propres.  $F_N$  admet une base orthonormée  $(\varphi_i)$  de fonctions localisées près de  $A_i$  :

$$\varphi_i(z) \sim \frac{1}{\pi h} e^{-\frac{\|z-A_i\|^2}{2h}} ,$$

et on peut exprimer la matrice de  $H$  dans cette base. Les coefficients non diagonaux  $h_{i,j}$  sont de la forme

$$h_{i,j} \sim a_{i,j} e^{-\frac{S_{i,j}}{h}}$$

où  $a_{i,j} < 0$  et  $S_{i,j}$  est la distance de  $A_i$  à  $A_j$  pour la métrique *d'Agmon*

$$d\sigma^2 = V(x, y)(dx^2 + dy^2) .$$

Cette métrique est une métrique riemannienne qui n'a de singularités qu'aux points  $A_i$ . Ses géodésiques sont donc lisses en dehors des  $A_i$ .

En particulier, si

$$S_0 = \inf_{i \neq j} S_{i,j} ,$$

seuls les  $(i, j)$  tels que  $S_{i,j} = S_0$  contribuent réellement à la partie non diagonale. Le *graphe d'Agmon*  $G$  est le graphe dont les sommets sont les  $A_i$  et les arêtes les couples  $(i, j)$  tels que  $S_{i,j} = S_0$ . Alors la matrice de  $H$  restreinte à  $F_N$  dans la base des  $(\varphi_i)$  est essentiellement subordonnée au graphe d'Agmon. On verra que le graphe d'Agmon est plongé dans  $\mathbb{R}^2$  en prenant pour arêtes  $(i, j)$  une géodésique minimisante de  $A_i$  à  $A_j$  (lemme 6.1).

### 3.4. Petites valeurs propres des surfaces de Riemann compactes à courbure constante $-1$ . Pour ceci, voir l'article [CC88].

On considère une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$  fixé muni de métriques à courbure  $-1$ .

Supposons que l'on fasse dégénérer la métrique de façon à ce que la longueur de certaines géodésiques fermées simples  $\gamma_i$  tende vers 0.

On associe à cette situation le graphe suivant : les sommets sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des  $\gamma_i$  et les arêtes sont en bijection avec les  $\gamma_i$  et joignent les 2 régions qui leur sont contiguës.

Les petites valeurs propres du laplacien sur la surface qui dégénère sont alors contrôlées avec une grande précision par les valeurs propres d'un laplacien sur le graphe précédent.

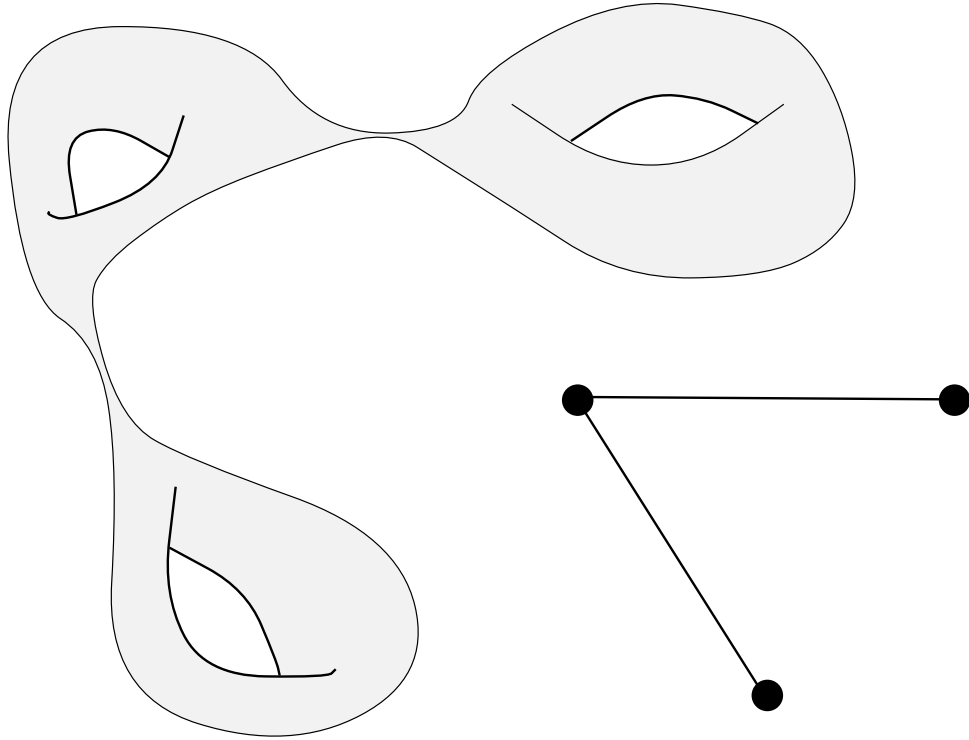
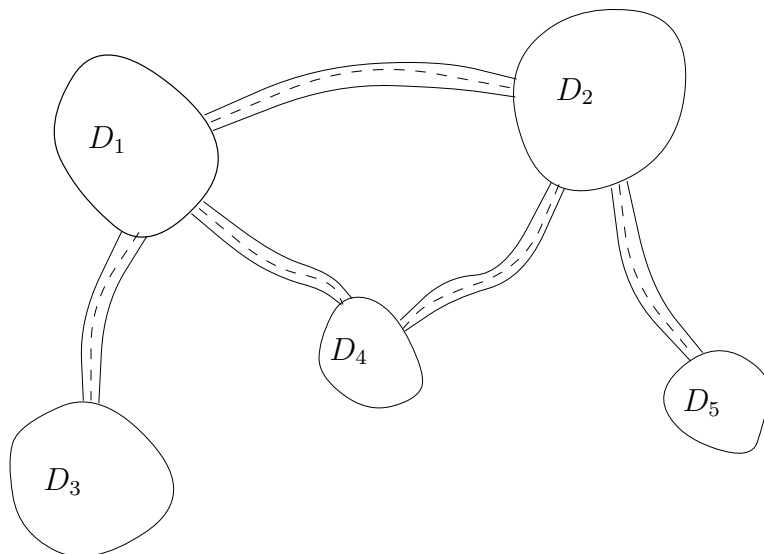


FIGURE 2. Surfaces de Riemann et graphe associé

**3.5. Limites singulières de domaines de  $\mathbb{R}^d$ .** Soit  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  des domaines compacts connexes à bords lisses, 2 à 2 disjoints de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $G = (V, E)$ ,  $V = \{1, \dots, n\}$  et, pour  $\{i, j\} \in E$ ,  $\gamma_{i,j}$  des courbes lisses de  $\mathbb{R}^d$  qui sont disjointes et joignent  $\partial D_i$  à  $\partial D_j$  qu'elles rencontrent transversalement.

Soit  $\Omega_\varepsilon$  la réunion des  $D_i$  et des tubes de rayon  $\varepsilon$  autour des  $\gamma_{i,j}$ . Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , le laplacien, avec conditions au bord de Neumann, de  $\Omega_\varepsilon$  a  $n$  valeurs propres qui tendent vers  $0^+$ . Leur comportement asymptotique est donné par le spectre d'un élément de  $O_G$  [Col87].

**3.6. Processus de Markov réversibles.** Voir par exemple [FY94], [Yca95], [Fel71], [Sal96]. Soit  $G = (V, E)$  un graphe dont l'ensemble des sommets  $V$  est l'ensemble des états d'un processus de Markov de taux de transition  $\lambda_{i,j} \geq 0$ . Les arêtes sont les couples  $\{i, j\}$  tels que

FIGURE 3. Domaines  $\Omega_\varepsilon$ 

$\lambda_{i,j} > 0$ . Soit  $\Lambda$  la matrice dont le terme général est

$$(2) \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} -\lambda_{i,j}, & \text{pour } \{i, j\} \in E \\ \sum_{k \sim i} \lambda_{i,k}, & \text{pour } i = j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose  $S_t = e^{-t\Lambda}$  et on considère le processus stochastique à valeurs dans  $V$  tel que  $P(X_t = j | X_0 = i) = (S_t)_{i,j}$ . La loi de  $X_t$  vérifie  $P_t = e^{t\Lambda} P_0$ .

Come le vecteur constant égal à 1 est dans le noyau de  $\Lambda$ , l'application  $S_t$  admet la valeur propre 0 (non dégénéré si  $G$  est connexe). Le processus admet une mesure de probabilité invariante  $\pi$  (qui est unique si  $G$  est connexe).

On dit qu'il est *réversible* si  $\forall \{i, j\} \in E$ ,  $\lambda_{i,j}\pi_i = \lambda_{j,i}\pi_j$ . Dans ce cas, la matrice  $\Lambda$  est symétrique sur  $l^2(\pi)$ . La matrice  $D^{\frac{1}{2}}\Lambda D^{-\frac{1}{2}}$ , avec  $D = \text{diag}(\pi_i)$ , est alors dans  $O_G$  et a même spectre que  $\Lambda$ . En particulier, le trou spectral de  $\Lambda$  contrôle la vitesse d'accès à l'équilibre.

Dans les applications  $\pi$  est donnée (mesure de Gibbs par exemple) et on cherche un processus dont l'état d'équilibre est  $\pi$ .

**3.7. Méthode de Hückel en chimie organique.** Voir [COM78], [CS93]. Hückel a introduit le spectre de la matrice d'adjacence de certains graphes pour l'étude de la stabilité du benzène et d'autres molécules aromatiques. On s'intéresse à une molécule formée de  $N$



atomes (par exemple de carbone) organisés suivant la combinatoire d'un graphe  $G$  à  $N$  sommets. Ces atomes partagent les électrons de la couche superficielle. En première approximation, on considère ces électrons comme indépendants.

Hückel assimile l'opérateur de Schrödinger pour un électron à  $NId - M_G$ , ce qui permet d'étudier le spectre de la molécule et sa stabilité.

Voir [CR87] pour l'exemple de la fameuse molécule  $C_{60}$  (le buckminsterfullerène dont la combinatoire des 60 atomes de carbone est celle du ballon de football),

#### 4. TROU SPECTRAL D'UN GRAPHE ET EXPANSION

Un graphe fini  $G$  sera dit un  $(k, c)$ -expandeur ( $k \geq 2$ ,  $c > 0$ ) si  $\forall A \subset V$  tel que  $|A| \leq |V|/2$ , on a

$$\forall i \in V, \text{ degré}(i) \leq k \text{ et } |\partial A| \geq c|A| ,$$

où  $\partial A$  est l'ensemble des sommets de  $G$  non dans  $A$ , mais joints par une arête à un sommet de  $A$ .

Dans les problèmes de réseau, il est intéressant d'avoir des valeurs de  $c$  assez grandes tout en bornant  $k$ . En effet sur un tel réseau l'information se propage vite (exercice : montrer que le diamètre d'un  $(k, c)$ -expandeur est majoré par

$$2\left(1 + \frac{\log(|V|/2)}{\log(1+c)}\right)$$

alors que le diamètre d'un graphe de degré  $\leq k$ ,  $k \geq 3$  est minoré par

$$\frac{(\log |V| - 1)/3}{\log(k-1)} .)$$

Il se trouve que la constante  $c$  peut être relié au *trou spectral* du laplacien ( $=\lambda_2 - \lambda_1$ ).

Donc obtenir une grande constante d'expansion  $c$  ou un grand trou spectral sont des problèmes voisins. Une construction possible de graphes expandeurs consiste à considérer des graphes de Cayley de groupes de type fini et d'en prendre des quotients finis. Les groupes qui ont la propriété (T) de Kazhdan conviennent.

D'autre part, si le graphe est homogène de degré  $q + 1$ , le trou spectral possède une limite naturelle infranchissable lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini : la limsup du trou spectral est alors  $\leq a_q = q + 1 - 2\sqrt{q}$ . Un graphe de Ramanujan est un graphe homogène de degré  $q + 1$  dont le trou spectral est  $\geq a_q$ . De tels graphes peuvent être obtenus par des constructions arithmétiques et le fait qu'ils ont le trou spectral voulu est alors une conséquence de conjectures de Ramanujan.

## 5. MULTIPLICITÉS DES VALEURS PROPRES ET PLONGEMENTS DE GRAPHES

Fixons un graphe fini  $G$ . On s'intéresse aux spectres possibles pour une matrice de  $O_G$ . La théorie des perturbations des valeurs propres multiples permet d'introduire une condition de transversalité naturelle dans ce problème ([NW29], [Arn72]). On relie le problème de construire un spectre prescrit au problème classique du plongement d'un graphe dans une surface.

En particulier, on construit des invariants à valeurs entières des graphes finis notés respectivement  $\mu_k^{\mathbb{R}}(G)$  et  $\mu_k^{\mathbb{C}}(G)$  qui ont la propriété d'être monotone pour la relation des mineurs.

Les  $\mu_k^{\mathbb{R}}$  qui utilisent  $O_G$  sont liés au genre de  $G$  et  $\mu_2^{\mathbb{R}}$  détecte la planarité.

Le cas de tous les opérateurs elliptiques autoadjoints (opérateur de Schrödinger avec champ magnétique) donne lieu aux invariants  $\mu_k^{\mathbb{C}}$  qui sont reliés à la largeur d'arbre du graphe  $G$ .

En fait, il est intéressant de considérer des limites singulières d'opérateurs de  $O_G$  : ces limites sont prises au sens de la  $\Gamma$ -convergence, i.e. de la convergence des *graphes* des opérateurs. Du point de vue géométrique ces limites sont reliées à différentes notions de *collapsing* des graphes : celles de *mineurs* et de *mineurs faibles*. Il existe de nombreux exemples naturels, par exemple la convergence des algorithmes de type recuit simulé [CPY97].

## 6. RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

Les techniques développées pour le spectre des opérateurs de  $O_G$  peuvent s'utiliser dans l'étude des réseaux électriques résistifs, analogue discret du problème de Dirichlet dans un domaine à bord.

Ici  $G = (V, V_0, E)$  est un graphe à bord, i.e.  $(V, E)$  est un graphe fini et  $V_0 \subset V$  est un ensemble de sommets marqués appelés *terminaux*. On notera aussi  $V_1 = V \setminus V_0$  les sommets intérieurs.

Si  $\rho = (\rho_{i,j}) \in ]0, +\infty[^E$  est la conductance du réseau. On définit la *réponse*  $L = L_{G,\rho}$  de la façon suivante : à un potentiel  $y \in \mathbb{R}^{V_0}$  prescrit aux terminaux, on associe les courants sortants par les terminaux. Notons  $J = L(y)$ .

Nous expliquerons la nature symétrique de la réponse lié à la réduction symplectique.

Dans le cas des graphes planaires, il y a un dictionnaire amusant [Ken95] entre les configurations d'équilibre et des pavages de la sphère privée de  $\#V_0$  points par des rectangles.

Les problèmes principaux sont la caractérisation des réponses possibles pour un graphe  $G$  donné et le problème inverse (analogue discret du problème de Caldéron) : que peut on dire de  $(G, \rho)$  si  $L$  est donnée ?

La solution complète de ces 2 problèmes est connue dans le cas d'un réseau circulaire planaire [Col194], [CGV96]. Les réponses possibles d'un tel réseau sont caractérisées par un ensemble d'inégalités portant sur  $L$ , découvertes par Curtis, Mooers et Morrow [CMM94]. De plus deux réseaux de ce type qui ont même réponse sont *combinatoirement* équivalents ; on peut passer de l'un à l'autre par les opérations élémentaires suivantes : série, parallèle, étoile-triangle et triangle-étoile.

## 7. AUTRES PROBLÈMES

D'autres problèmes intéressants n'ont pu être abordés dans le cadre du présent ouvrage :

–par exemple, le cas *aléatoire*. Quel est le spectre typique pour une matrice subordonnée à un réseau infini ? Ce problème est important pour la physique du solide. Voir à ce sujet [FS83], [AM94], [Pös90], [SW86].

–le cas non symétrique (processus de Markov non réversibles) [Sal96].



## CHAPITRE 2

### SPECTRES

#### 1. LAPLACIENS SUBORDONNÉS À UN GRAPHE

**1.1. Opérateurs de Schrödinger sur un graphe.**  $G = (V, E)$  est un graphe fini, non orienté, sans boucles, ni arêtes multiples. On considère l'espace de Hilbert  $\mathbb{R}^V$  muni de la structure hilbertienne canonique.

**DÉFINITION 2.1.** On désigne par  $O_G$  l'ensemble des opérateurs symétriques réels  $A$  sur  $\mathbb{R}^V$  de matrice  $A = (a_{i,j})$  tels que :

$$(3) \quad a_{i,j} \begin{cases} < 0, & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ = 0, & \text{si } \{i, j\} \notin E \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

$O_G$  est un cône de dimension  $\#V + \#E$ . On dit parfois aussi que  $A \in O_G$  est un opérateur de Schrödinger sur  $G$ .

De même, on définit  $L_G \subset O_G$  comme l'ensemble des  $A \in O_G$  tels que  $A\mathbf{1} = 0$  (où  $\mathbf{1}$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1). Un élément de  $L_G$  s'appelle un laplacien.

On définit de façon analogue  $M_G$  comme l'ensemble des endomorphismes hermitiens de  $\mathbb{C}^V$  tels que :

$$(4) \quad a_{i,j} \begin{cases} \neq 0, & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ = 0, & \text{si } \{i, j\} \notin E \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

Un opérateur de  $M_G$  sera appelé opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Ces opérateurs méritent tous le nom d'*opérateur différentiel sur  $G$*  car ils sont locaux, i.e.  $Ax(i)$  ne dépend que des  $x(j)$  pour  $j = i$  et  $\{i, j\} \in E$ . Ils sont *elliptiques* au sens que  $a_{i,j}$  est inversible pour  $\{i, j\} \in E$ .

**1.2. Formes quadratiques.** A toute matrice symétrique  $A \in O_G$  est associée une forme quadratique  $q_A(x) = \langle Ax|x \rangle$ , qu'on écrira aussi suivant l'usage de la mécanique quantique  $q_A(x) = \langle x|A|x \rangle$ .

La forme  $q_A$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$q_A(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i \in V} W_i x_i^2,$$

avec  $c_{i,j} = -a_{i,j} > 0$  et  $W_i = \sum_j a_{i,j}$ .

Si  $A$  est un laplacien, cette forme quadratique s'écrit de façon unique :

$$q_A(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2,$$

avec  $c_{i,j} = -a_{i,j} > 0$ .

Les laplaciens peuvent s'interpréter différemment comme suit : le choix d'une orientation des arêtes de  $G$  définit un opérateur  $d : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^E$  en posant  $df(\vec{i}\vec{j}) = f(i) - f(j)$ . La donnée de coefficients  $c_{i,j} > 0$  permet de munir  $\mathbb{R}^E$  d'une structure hilbertienne  $\sum c_{i,j} y_{i,j}^2$  en notant  $y = (y_{i,j})$  le vecteur générique de  $\mathbb{R}^E$ . Si  $\mathbb{R}^V$  est muni de la structure euclidienne canonique, le laplacien associé est donné par  $A = d^*d$ .

Si on avait muni  $\mathbb{R}^V$  d'une structure euclidienne  $\sum_{i \in V} v_i^2 x_i^2$ , l'opérateur  $d^*d$  serait dans  $O_G$  à condition de faire le changement de coordonnées  $y_i = v_i x_i$  sur  $\mathbb{R}^V$ . On trouve ainsi toute matrice de  $O_G$  dont 0 est la plus petite valeur propre.

**1.3. Spectres.** On s'intéresse maintenant au spectre d'un opérateur  $A \in O_G$  que l'on écrit sous la forme :  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\#V}$ , répétant chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité l'exige. On pourra choisir une b.o. de  $\mathbb{R}^V$  formée de vecteurs propres  $\varphi_1, \dots, \varphi_{\#V}$ . Il faut prendre garde que ce choix n'est pas canonique. Les objets canoniques sont les espaces propres eux-mêmes. On notera souvent  $E_i$  ou  $E_{\lambda_i}$  l'espace propre associé à la  $i$ -ème valeur propre.

On est principalement intéressé à  $\lambda_1$ , à  $\lambda_2 - \lambda_1$  qu'on appelle le *trou spectral*, ainsi qu'aux multiplicités des  $\lambda_i$ .

## 2. PRINCIPE DU MINIMAX

**2.1. Le cas de la dimension finie.** Soit  $S_V$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^V$ . Un résultat classique dit que les points critiques de la restriction de  $q_A(x) = \langle Ax|x \rangle$  à  $S_V$  sont les vecteurs propres de  $A$ . Les valeurs propres sont les multiplicateurs de Lagrange et aussi les valeurs critiques.

Le résultat suivant, appelé *principe du minimax*, permet une caractérisation variationnelle des valeurs propres :

THÉORÈME 2.1. Soit  $G_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^V$ . On a :

$$\lambda_k = \inf_{Z \in G_k} \left( \sup_{x \in Z \cap S_V} q_A(x) \right) .$$

En particulier

$$\lambda_1 = \inf_{x \in S_V} q_A(x) .$$

On peut formuler ces égalités en évitant l'utilisation de  $S_V$ . On introduit à la place *quotients de Rayleigh* définis par :

$$\rho_A(x) = \frac{q_A(x)}{\|x\|^2}, \text{ pour } x \neq 0,$$

qui sont des fonctions homogènes de degré 0 sur  $\mathbb{R}^V \setminus 0$ . Le principe du minimax prend alors la forme :

$$\lambda_k = \inf_{Z \in G_k} \left( \sup_{x \in Z \setminus 0} \rho_A(x) \right) .$$

*Preuve.* –

Si  $Z \in G_k$ , il existe dans  $Z$  un vecteur  $x$  orthogonal à  $\mathbb{R}\varphi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\varphi_{k-1}$  et de norme 1. Il est clair que pour ce vecteur, on a  $q_A(x) \geq \lambda_k$ .

L'égalité est clairement atteinte si on prend pour  $Z$  le sous-espace engendré par  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ .

□

Le principe du minimax possède une formulation duale : en notant  $G'_k$  la famille des sous-espaces de  $\mathbb{R}^V$  de codimension  $k$ , on a :

$$\lambda_k = \sup_{Z \in G'_{k-1}} \left( \inf_{x \in Z \cap S_V} q_A(x) \right) .$$

Quelques conséquences du principe du minimax :

1) *Principes de monotonie* :

1a) si  $q_A \leq q_B$  (au sens inégalité comme fonctions sur  $\mathbb{R}^V$ ), alors les valeurs propres satisfont les mêmes inégalités :

$$(q_A \leq q_B) \Rightarrow (\forall k, \lambda_k(A) \leq \lambda_k(B)) .$$

1b) Si  $F \subset \mathbb{R}^V$  est un sous-espace muni de la structure euclidienne induite, les valeurs propres de la restriction de  $q_A$  à  $F$  sont plus grandes que celles de  $q_A$ . C'est en particulier le cas pour le problème de Dirichlet associé à un sous-ensemble  $V_0 \subset V$  et qui consiste à restreindre  $q_A$  aux vecteurs dont les composantes sur  $V_0$  sont nulles.

2) *Module de continuité* : on en déduit aussi un module de continuité explicite pour les valeurs propres :

$$|\lambda_k(A + \delta A) - \lambda_k(A)| \leq \|\delta A\| ,$$

où  $\|\delta A\|$  est la norme d'opérateurs de  $\delta A$ .

3) *Concavité* : une autre conséquence plaisante est la concavité de l'application qui, à une matrice symétrique  $A$ , associe sa première valeur propre  $\lambda_1(A)$ . En effet, le minimax permet d'interpréter  $\lambda_1(A)$  comme le inf des formes linéaires  $A \rightarrow \langle Ax|x \rangle$  pour  $x \in S_V$ .

**2.2. Le cas de la dimension infinie.** Si  $\mathcal{H}$  est un Hilbert de dimension infinie,  $A$  un opérateur autoadjoint continu, on peut encore appliquer le minimax avec quelques précautions.

On définit le spectre de  $A$  comme l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $\lambda Id - A$  n'est pas inversible. On peut séparer le spectre en spectre discret et essentiel. Le spectre discret est l'ensemble des points isolés du spectre qui sont des valeurs propres de multiplicité finie. Le spectre essentiel est le complémentaire dans le spectre du spectre discret. Soit  $a$  la borne inférieure du spectre essentiel.

On a 2 possibilités :

ou bien il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres  $< a$ , soit

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N < a ,$$

ou bien il y en a une infinité qui s'accroissent en  $a$  :

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots < a .$$

Dans le deuxième cas le minimax s'applique sans problème, dans le premier, il donne les valeurs propres  $\lambda_k$  pour  $k \leq N$ , puis  $a$  si  $k > N$ .

### 3. THÉORÈME DE COURANT

Le théorème de Courant classique ([CH53]) pour les modes propres du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord dans un domaine borné  $D$  connexe de  $\mathbb{R}^n$  est le suivant : si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$  est le spectre du problème de Dirichlet dans  $D$ , si  $\varphi$  est une fonction propre non identiquement nulle de valeur propre  $\lambda_k$ , le nombre de composantes connexes de  $D \setminus \varphi^{-1}(0)$  est  $\leq k$ . Sa preuve nécessite de savoir que les zéros des fonctions propres ne sont pas trop *sauvages*, en particulier ils sont d'*ordre fini*.

Il faut être un peu soigneux pour généraliser ceci aux graphes.



### 3.1. Le théorème de Perron-Frobenius.

**THÉORÈME 2.2.** (*Perron-Frobenius*) *Si  $G$  est connexe et  $A \in O_G$ ,  $\lambda_1(A)$  est de multiplicité 1 et l'espace propre est engendré par une fonction strictement positive en tout sommet .*

*Preuve.*—

Notons  $E_1 = \ker(A - \lambda_1(A))$ . Soit  $\varphi \in E_1$  de norme 1. Alors  $q_A(|\varphi|) \leq q_A(\varphi)$  (car les  $a_{i,j}$ , pour  $i \neq j$ , sont  $\leq 0$ ), alors que la norme est conservée. On en déduit que  $\eta = |\varphi| \in E_1$ . Supposons que  $\eta$  s'annule en  $i \in V$  et qu'il existe  $j$  voisin de  $i$  avec  $\eta(j) > 0$ . Soit  $\eta_\varepsilon = \eta + \varepsilon\delta(i)$ . On a :

$$\|\eta_\varepsilon\| = 1 + O(\varepsilon^2) ,$$

alors que

$$q_A(\eta_\varepsilon) = q_A(\eta) - a\varepsilon + O(\varepsilon^2) ,$$

avec  $a > 0$ . On en déduit une contradiction par la caractérisation variationnelle du  $\lambda_1$ .

Maintenant, il n'est clairement pas possible qu'un sous-espace de dimension  $\geq 2$  de  $\mathbb{R}^V$  contienne uniquement des fonctions strictement  $> 0$  ou  $< 0$  ou identiquement nulles.

□

Il existe une formulation plus générale valable dans le cas non auto-adjoint, voir [Har91], [Sal96].

**THÉORÈME 2.3.** *Soit  $L$  une matrice réelle  $n \times n$  à coefficients tous  $> 0$ , alors :*

1) *il existe une valeur propre simple réelle  $> 0$   $\lambda_1$  telle que toutes les autres valeurs propres  $\lambda_i$  vérifient  $|\lambda_i| < \lambda_1$ .*

2) *L'espace propre associé à  $\lambda_1$  est engendré par un vecteur  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  à coordonnées toutes  $> 0$ .*

3) *En appliquant les résultats précédents à  ${}^tL$ , on voit que  $L$  admet un hyperplan invariant supplémentaire de l'espace engendré par  $x_1$  et d'équation  $\sum_i c_i x_i = 0$  où les  $c_i$  sont  $> 0$ .*

4) *On a :*

$$x_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L^p(x_0)}{\|L^p(x_0)\|}$$

*si  $x_0 \neq 0$  a toutes ses composantes  $\geq 0$ .*

On obtient le théorème 2.2 en posant  $L = (c - A)^k$  avec  $c, k$  assez grands.

*Preuve.*—

Ce théorème de base admet plusieurs preuves dont une utilisant la distance de Hilbert [Har93] dont voici l'idée.

Si  $C$  est un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$ , on définit une métrique finslérienne sur  $C$  dont les géodésiques sont les intersections avec  $C$  des droites de  $\mathbb{R}^n$ . Sur la droite affine  $D$  qui coupe  $\partial C$  en  $A$  et  $B$  d'abscisses  $a, b$  ( $a < b$ ), on a :

$$ds = \left( \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x} \right) |dx| .$$

Soit  $C$  le convexe des points de coordonnées toutes  $> 0$  de  $\sum x_i = 1$ . Alors, à  $L$ , est associée une transformation  $\Phi : C \rightarrow \bar{C}$  qui transforme le point  $x$  en l'intersection avec  $C$  de la droite engendrée par  $L(x)$ . On vérifie que  $\Phi(\bar{C})$  est un compact  $K \subset C$  et que  $\Phi : K \rightarrow K$  est contractante de rapport  $k < 1$  pour la distance de Hilbert. C'est le seul point délicat de la preuve.

On prend alors pour  $x_1$  l'unique point fixe de  $\Phi$ . Le reste de la preuve est assez simple.

□

**3.2. Théorèmes de Courant pour les graphes.** Soient  $A \in O_G$ ,  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} < \lambda_m = \dots = \lambda_M < \lambda_{M+1} \leq \dots$  le spectre de  $A$  et  $\varphi \in \ker(A - \lambda_m) \setminus 0$ . Soit  $G_{\pm}$  les deux sous-graphes de  $G$  dont les sommets sont  $V_{\pm} = \{i \in V \mid \pm \varphi(i) > 0\}$  et les arêtes celles de  $G$  joignant 2 sommets de  $V_{\pm}$ . Soient  $n_{\pm}$  le nombre de composantes connexes de  $G_{\pm}$ .

Plusieurs énoncés sont possibles, mais la généralisation naïve du cas continu ( $n_+ + n_- \leq m$ ) ne marche pas, comme le montre l'exemple du graphe formé d'une étoile à au moins 3 branches, avec le laplacien canonique : l'espace propre  $E_{\lambda_2}$  est alors formé des fonctions qui s'annulent au centre et dont la somme des valeurs aux sommets est 0. Un autre exemple est fourni par le laplacien canonique du graphe de Petersen.

L'énoncé suivant provient de [Hol97] pages 28-31.

**THÉORÈME 2.4.** *Sous les hypothèses précédentes  $n_+ + n_- \leq M$ .*

*Si  $\varphi \in \ker(A - \lambda_m)$  est de support minimal  $n_+ + n_- \leq m$ . Donc, si  $m = 2$ ,  $V_+$  et  $V_-$  sont connexes.*

On aura besoin du :

**LEMME 2.1.** *Soient  $G$ ,  $A \in O_G$  et  $\varphi$  comme plus haut, il existe un graphe  $G'$  obtenu en subdivisant en 2 certaines arêtes de  $G$ , une*

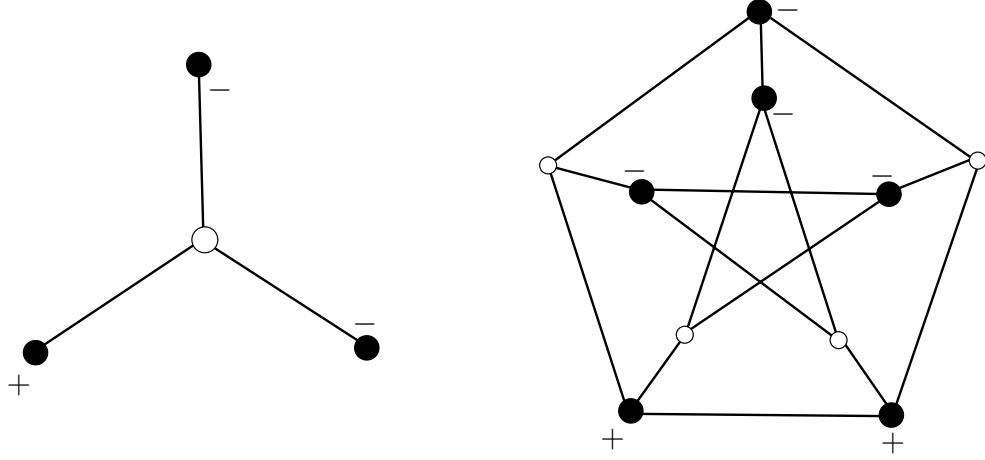


FIGURE 1. Domaine nodaux non connexes

matrice  $A' \in O_{G'}$  telle que le spectre  $\lambda'_i$  de  $A'$  vérifie

$$\cdots \leq \lambda'_{m-1} < 0 = \lambda'_m = \cdots = \lambda'_M < \lambda'_{M+1} \leq \cdots ,$$

et une fonction  $\varphi' \in \ker A' \setminus 0$  telle qu'il n'existe pas d'arête  $\{i, j\}$  de  $G'$  vérifiant  $\varphi'(i)\varphi'(j) < 0$  et que  $n_{\pm}(\varphi') = n_{\pm}(\varphi)$ .

*Preuve.* –

On raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $G$  où  $\varphi$  change de signe. En subdivisant l'arête  $\{1, 2\}$  telle que  $\varphi(1)\varphi(2) < 0$  comme suit, on diminue ce nombre d'une unité.

Soit  $q(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^V$  la forme quadratique associée à  $A$ ,  $c = -a_{1,2}$ ,  $\beta = -\frac{\varphi(2)}{\varphi(1)}$  et

$$q'(x, x_0) = q(x) + 2cx_1x_2 + (\sqrt{\beta c}x_1 - x_0)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{\beta}}x_2 - x_0\right)^2 - x_0^2 .$$

Alors  $q'$  est la forme quadratique associée à un opérateur  $A' \in O_{G'}$ .

$$q'(x, x_0 + \sqrt{\beta c}x_1 + \sqrt{\frac{c}{\beta}}x_2) = q(x) + x_0^2 ,$$

d'où la forme du spectre de  $A'$  par le théorème d'inertie de Sylvester. Puis  $A'(\varphi, 0) = 0$ , d'où l'on déduit les autres propriétés.

□

*Preuve.* –

(du théorème 2.4)

Il suffit de démontrer le théorème sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'arête  $\{i, j\}$  telle que  $\varphi(i)\varphi(j) < 0$ . Notons  $F_0 = \ker A$ . Posons  $t = n_+ + n_-$  et soient  $C_1, \dots, C_t$  les composantes connexes de  $G_+$  et  $G_-$ . Soient  $\psi_j$ ,  $1 \leq j \leq t$  définies par  $\psi_j = \varphi \chi_{C_j}$  et  $Z$  l'espace de dimension  $t$  engendré par les  $\psi_j$ . On vérifie que  $q_A(\psi) \leq 0$  pour  $\psi \in Z$ . On a donc  $\dim(Z \cap E_0) \geq \max(t - m + 1, 0)$  (cet espace  $Y$  contient l'orthogonal de  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \rangle$  dans  $Z$ ).

Si  $t > m$ ,  $\dim Y \geq 2$  et  $Y$  contient des fonctions  $\sum a_j \psi_j$  avec  $a_1 = 0$  et donc  $\varphi$  n'est pas de support minimal dans  $E_0$ .

Si  $t > M$ , on a une contradiction, car alors  $\dim Y \geq t - m + 1 > M - m + 1 = \dim E_0$ .

□

Lovász et Schrijver ont montré dans [LS96], par une technique voisine, un résultat lié au précédent :

**THÉORÈME 2.5.** *Soit  $\varphi \in \ker(A - \lambda_2) \setminus 0$ , supposons  $V_+$  non connexe, alors il n'y a pas d'arête joignant un sommet de  $V_+$  à un sommet de  $V_-$  et tout sommet voisin d'une composante connexe de  $\text{Supp}(\varphi) = \{i | \varphi(i) \neq 0\}$  est aussi voisin des autres composantes connexes.*

#### 4. GRAPHES DE CAYLEY

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $S$  une famille génératrice finie symétrique (i.e.  $g \in S$  si et seulement si  $g^{-1} \in S$ ), ne contenant pas l'élément neutre  $e$ . Tout élément de  $\Gamma$  est donc représenté par au moins un mot en  $S$ . On associe à  $(\Gamma, S)$  un graphe  $G = (V, E)$ , appelé graphe de Cayley de  $\Gamma$  par rapport au système de générateurs  $S$ . L'ensemble des sommets  $V$  s'identifie aux éléments de  $\Gamma$  et  $\{g_1, g_2\} \in E$  si et seulement si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . Ce graphe est connexe. La distance combinatoire de  $e$  à  $g$  dans ce graphe est le nombre minimal de lettres de  $S$  qu'il faut pour une écriture de  $g$ .

On peut évidemment étendre la définition à un espace  $X$  où  $\Gamma$  agit. Le graphe associé  $G = (V, E)$  a pour sommets les points de  $X$  et  $\{x, y\}$  est une arête si et seulement si il existe  $g \in S$  tel que  $gx = y$ .

Ce graphe est de degré constant égal au nombre d'éléments de  $S$ . L'opérateur  $M_G$  s'écrit alors :

$$L\varphi(g) = \sum_{\sigma \in S} \varphi(g\sigma).$$

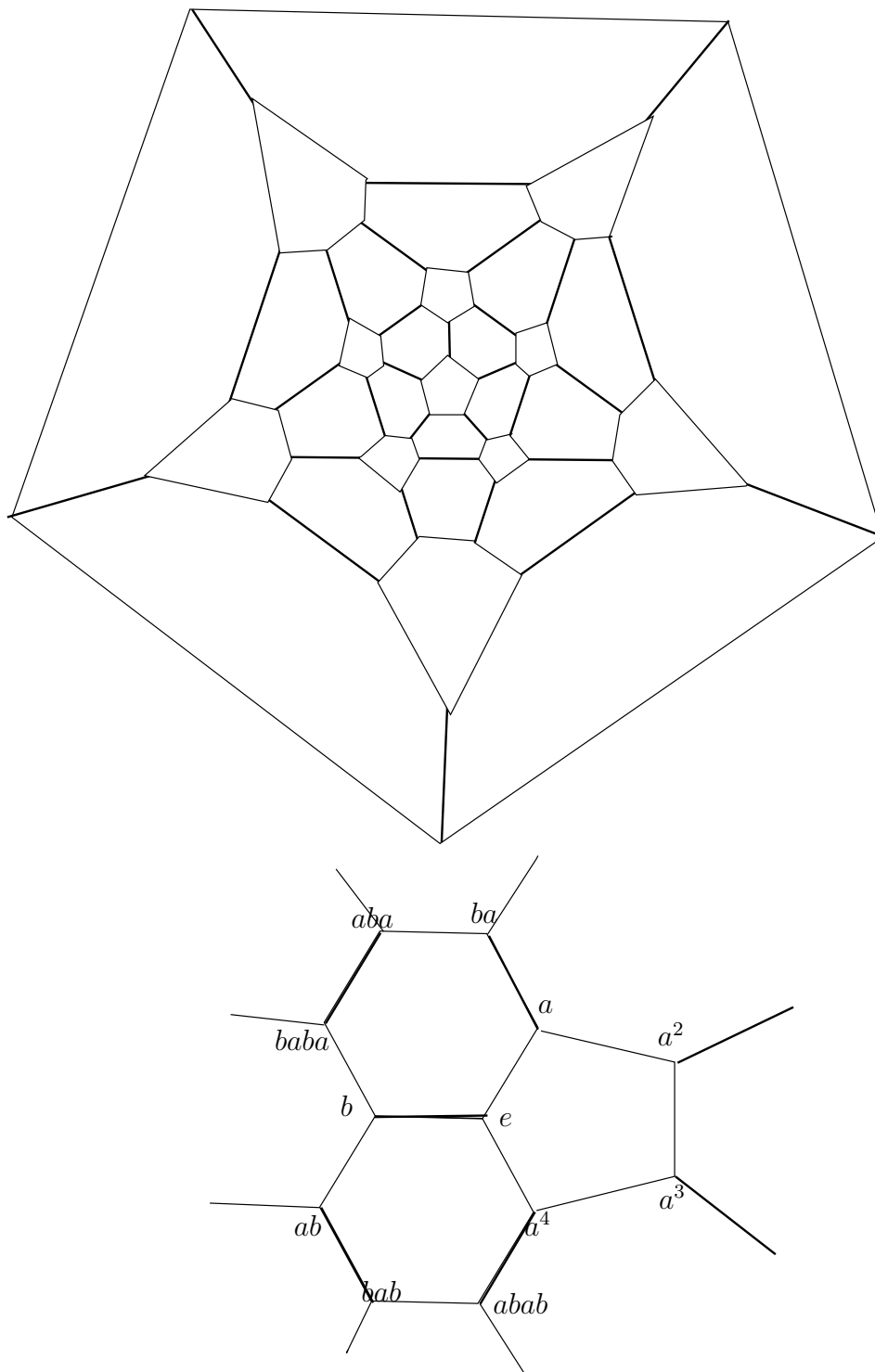


FIGURE 2. Le graphe de  $C_{60}$

Soit maintenant, pour  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma\varphi(g) = \varphi(\gamma^{-1}g)$ , on a évidemment :

$$\gamma(M_G(\varphi)) = M_G(\gamma\varphi) .$$

Donc  $M_G$  commute aux translations à gauche, qui sont des automorphismes de  $G$ .

Il ne commute aux translations à droite que si  $S$  est une réunion de classe de conjugaisons.

Ces remarques permettent de simplifier le calcul du spectre de  $M_G$  car il suffit de se restreindre aux représentations irréductibles. Dans le cas d'un système de générateurs invariant par conjugaison, on peut même se restreindre à une étude des caractères.

On peut voir un exemple de cette situation dans les molécules de carbone  $C_{60}$  appelées *buckminsterfullerène* [CS93] dont le graphe est un graphe de Cayley de  $A_5$  (permutations paires de 5 lettres) pour les 3 générateurs  $a$ ,  $a^{-1}$ ,  $b$  donnés par :

$$a = (23451), \quad b = (21435) .$$

Le groupe  $A_5$  est engendré par  $a$  et  $b$  et les relations :

$$a^5 = e, \quad b^2 = e, \quad (ab)^6 = e .$$

Les arêtes du graphe de Cayley sont de 2 types : celles qui correspondent à  $a$  et celles qui correspondent à  $b$ . Du point de vue chimique, elles correspondent à 2 types de liaisons entre les atomes de carbone du  $C_{60}$ .

## 5. CALCUL FONCTIONNEL ET MESURES SPECTRALES

Le cas des graphes infinis n'est pas strictement nécessaire dans la suite, mais permet une meilleure compréhension du sujet : par exemple, la notion de graphe de Ramanujan ne se comprend que par comparaison au spectre des arbres homogènes. Bien sûr, les notions de théorie spectrale utilisées sont alors moins rudimentaires...

Pour ce §, on peut consulter [RS75a].

**5.1. Spectres.** Ici  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur linéaire continu autoadjoint sur  $\mathcal{H}$ . Le spectre de  $A$ ,  $\sigma(A)$  est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $\lambda \text{Id} - A$  n'est pas inversible.  $\sigma(A)$  est un compact de  $\mathbb{R}$  et  $R(\lambda) = (\lambda \text{Id} - A)^{-1}$ , la résolvante, est holomorphe dans le complémentaire de  $\sigma(A)$ .

Il est important de remarquer que le spectre ne se compose pas seulement de valeurs propres, ie de  $\lambda$  tels que  $\lambda \text{Id} - A$  ne soit pas injectif.  $\lambda \text{Id} - A$  peut être injectif, et donc à image dense, sans être surjectif.

Par contre, s'il est bijectif, l'inverse est continu par le théorème du graphe fermé.

Dans tous les cas, on a :

**PROPOSITION 2.1.**  *$\lambda$  appartient au spectre  $\sigma(A)$  de  $A$  si et seulement si,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un  $\varepsilon$ -vecteur propre  $x$  non nul de  $A$ , ie tel que  $\|(\lambda Id - A)x\| \leq \varepsilon \|x\|$ .*

**EXEMPLE 5.1.** *si  $\mathcal{H} = L^2([0, 1], \mathbb{C})$  et si  $A$  est l'opérateur de multiplication par une fonction continue  $a$  à valeurs réelles,  $\sigma(A)$  est l'ensemble des valeurs prises par  $a$ , alors que  $\mu$  est valeur propre de  $A$  ssi  $a^{-1}(\mu)$  est de mesure  $> 0$ .*

*Exercice :* même chose, mais avec  $\mathcal{H} = L^2([0, 1], \mathbb{C}^N)$  et  $a(t)$  une fonction continue à valeurs dans les matrices hermitiennes  $N \times N$ . Si  $\lambda_1(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$  sont les valeurs propres de  $a(t)$ , montrer que le spectre est la réunion des intervalles  $I_i = \lambda_i([0, 1])$ .

## 5.2. Mesures spectrales.

**DÉFINITION 2.2.** *Une algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre munie d'une norme complète telle que*

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, \|xy\| \leq \|x\| \|y\| .$$

*Une  $C^*$ -algèbre est une algèbre de Banach, munie d'une involution  $A \rightarrow A^*$ , antilinéaire et telle que*

$$\forall A, B, (AB)^* = B^*A^*, \|A^*A\| = \|A\|^2 .$$

Les exemples les plus simples sont d'une part l'algèbre  $L(\mathcal{H})$  des opérateurs linéaires continus sur un Hilbert, muni de l'adjoint et de la norme d'opérateur ; d'autre part l'algèbre  $C(K, \mathbb{C})$  des fonctions continues sur un compact à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , munie de la norme  $L^\infty$  et de la conjugaison complexe. On peut évidemment combiner ces 2 exemples en prenant  $C(K, L(\mathcal{H}))$ .

**THÉORÈME 2.6. (Gelfand).** *L'application qui, à une fonction polynômiale  $P(z)$  sur  $\sigma(A)$ , associe  $P(A)$  se prolonge de façon unique en un homomorphisme continu injectif de la  $C^*$ -algèbre  $C(\sigma(A))$  des fonctions continues sur  $\sigma(A)$  dans  $L(\mathcal{H})$ .*

L'opérateur  $f(A)$  est donc défini sans ambiguïté pour  $f$  continue sur  $\sigma(A)$ , en fait on peut l'étendre au cas où  $f$  est borélienne bornée.

Lorsque  $f$  est holomorphe au voisinage de  $\sigma(A)$ ,  $f(A)$  est définie par

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda ,$$

où  $\gamma$  est un lacet convenable entourant  $\sigma(A)$ .

On définit maintenant les mesures spectrales  $\mu_{\varphi}$  où  $\varphi$  est un vecteur de norme 1 de  $\mathcal{H}$  ; ce sont les mesures de probabilités sur  $\sigma(A)$  définies par :  $\mu_{\varphi}(f) = \langle f(A)\varphi | \varphi \rangle$ . Le fait que ces mesures soient positives résulte facilement de l'écriture de  $f \geq 0$  comme un carré d'une fonction continue réelle  $g$ .

On a une expression de  $\mu_{\varphi}$  en termes de la résolvante :  $\mu_{\varphi}$  est la limite vague des mesures

$$\mu_{\varepsilon} = \frac{1}{2i\pi} \langle (R(\lambda - i\varepsilon) - R(\lambda + i\varepsilon))\varphi | \varphi \rangle d\lambda ,$$

lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. En particulier, si les fonctions  $R(\lambda)\varphi$  sont continues au voisinage d'un point  $\lambda_0$  de  $\mathbb{R}$  pour un ensemble dense de  $\varphi$ ,  $\lambda_0$  n'est pas dans  $\sigma(A)$ .

## 6. GRAPHERS INFINIS

Voir aussi [Ser97], [Col88a].

On supposera pour simplifier que  $G$  est dénombrable, de degré borné et que les coefficients  $a_{i,j}$  de  $A \in O_G$  sont uniformément bornés. Dans ce cas, l'opérateur  $A$  est borné sur  $l^2(V)$ .

On définit, pour chaque  $x \in V$ , la mesure spectrale  $\mu_x = \mu_{\varepsilon_x}$  où  $\varepsilon_x$  est la fonction caractéristique du sommet  $x$ . Il est intéressant de calculer  $\mu_x(t^k)$  : c'est l'élément diagonal  $(A^k)_{x,x}$  de  $A^k$  qui s'écrit :

$$\mu_x(t^k) = \sum a_{x,i_1} a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_{k-1},x}$$

où la somme porte sur les lacets d'origine  $x$  et de longueur  $k$ . La quantité  $\mu_x(t^k)$  ne dépend donc que des éléments de  $G$  situés à distance  $\leq k/2$  de  $x$ .

Cette mesure est importante pour comprendre les limites de graphes dont le nombre de sommets tend vers l'infini. Soit  $G_N$  une suite de graphes finis tels que  $G_N$  soit isomorphe à  $G$  jusqu'à une distance  $r_N \rightarrow \infty$  de  $x$  ( $(G_N, x)$  converge vers  $(G, x)$  au sens de la distance de Hausdorff pointée) et supposons que  $A_N \in O_{G_N}$  soit égale à  $A \in O_G$  dans la boule de rayon  $r_N$  de centre  $x$ . Alors les mesures spectrales  $\mu_{x,N}$  convergent vers  $\mu_x$  vaguement. En effet,  $\mu_{x,N}(t^k) = \mu_x(t^k)$  pour  $k$  fixé et  $N$  assez grand.

En particulier, si on suppose que le couple  $(G, A)$  admet un groupe d'automorphismes transitif sur  $V$  et que la condition précédente est



vraie pour tout  $x \in V(G_N)$ , on a :

$$\lim_N \frac{1}{\#V(G_N)} \sum_{\lambda_{i,N} \in \sigma(A_N)} \delta(\lambda_{i,N}) = \mu_x ,$$

i.e., pour toute fonction continue  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_N \frac{1}{\#V(G_N)} \sum_{\lambda_{i,N} \in \sigma(A_N)} f(\lambda_{i,N}) = \int f(t) d\mu_x(t) .$$

On peut également définir la *densité d'état* sous certaines conditions. On suppose par exemple qu'il existe un groupe  $\Gamma$  agissant sur  $(G, A)$  sans points fixes et de façon que le quotient  $G/\Gamma$  soit fini. On définit alors la densité d'état comme la mesure  $\mu = 1/\#(G/\Gamma) \sum_{x \in G/\Gamma} \mu_x$ . Cette mesure de probabilité  $> 0$  est bien définie et a pour support le spectre  $\sigma(A)$  est bien définie.

Soit alors  $(G_N, A_N)$  avec  $A_N \in O_{G_N}$  une suite de graphes finis ; soit  $v_N = \#V(G_N)$  et  $\mu_N = \frac{1}{v_N} \sum \delta(\lambda_{i,N})$ .

On a alors le :

**THÉORÈME 2.7.** *Pour tout  $k$  entier naturel, notons  $B_N^k$  l'ensemble des  $x \in V(G_N)$  tels que la boule de centre  $x$  et de rayon  $k$  de  $G_N$  soit isomorphe à une boule de rayon  $k$  de  $G$  et que les restrictions de  $A_N$  et de  $A$  à ces boules coïncident. Si, pour tout  $k$ ,  $\#B_N^k/\#V(G_N)$  tend vers 1 quand  $N$  tend vers l'infini, alors  $\mu_N$  tend vers la densité d'état  $\mu$  quand  $N$  tend vers l'infini.*

Ce théorème s'applique par exemple lorsque  $G = \mathbb{Z}^n$  et  $A$  est périodique par rapport à un sous-réseau  $\Gamma$  d'indice fini de  $\mathbb{Z}^n$ . On peut prendre pour  $G_N$  les cubes  $(-N, N)^n$  et pour  $A_N$  la restriction de  $A$  à ces cubes.

## 7. CAS D'UN ARBRE HOMOGÈNE DE DEGRÉ $q + 1$

### 7.1. Contrôle du spectre par des formes surharmoniques.

On peut contrôler le spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe infini de la façon suivante :

**THÉORÈME 2.8.** *Soit  $G$  un graphe (infini !) et supposons qu'on ait une fonction  $\lambda : \vec{E} \rightarrow ]0, \infty[$ , (où  $\vec{E} = \{(i, j)\}$  est l'ensemble des arêtes orientées) telle que  $\lambda(\alpha^{-1}) = 1/\lambda(\alpha)$  ( $\log \lambda$  est une 1-forme différentielle) et que  $\forall i \in V, \sum_{j \sim i} \lambda(j, i) \leq \nu$ . Alors le spectre de  $M_G$  vérifie  $-\nu \leq \sigma(M_G) \leq \nu$ .*

Ce théorème s'appelle le lemme de Gabber-Galil (voir [GG81]).

*Preuve.*—

Comme

$$(\sqrt{\lambda(i,j)}f(i) - \sqrt{\lambda(j,i)}f(j))^2 \geq 0 ,$$

il suffit de sommer les inégalités

$$2|f(i)f(j)| \leq \lambda(j,i)|f(i)|^2 + \lambda(i,j)|f(j)|^2$$

sur les arêtes pour obtenir :

$$| \langle M_G f | f \rangle | \leq \nu \|f\|^2 .$$

□

**EXEMPLE 7.1.** : supposons qu'on puisse orienter les arêtes de façon qu'en tout sommet il y ait au plus  $p$  arêtes incidentes et au moins  $q$  arêtes sortantes (avec  $p + q = k$ ), alors le spectre de la matrice d'incidence est contenu dans l'intervalle  $[-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]$ . Dans le cas des arbres homogènes cette estimation est optimale (orienter à partir d'une racine). On obtient ainsi que  $\sigma(M_q) \subset [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$ .

**EXEMPLE 7.2.** : on peut aussi appliquer le théorème 2.8 si on a une fonction  $f > 0$  sur  $V$  qui est  $\nu$ -surharmonique, ie telle que  $Mf \leq \nu f$  : on prend  $\lambda(j,i) = f(j)/f(i)$ .

Ce critère marche toujours, car si  $\nu > |\sigma(M_G)|$ , il existe une fonction  $\nu$ -surharmonique, par exemple la résolvante donné alors par la série de Neumann  $(Id - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k > 0$  et convergente :

$$f(i) = (\nu - M_G)_{i_0,i}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{-n-1} (M_G)_{i_0,i}^n .$$

**7.2. Spectre d'un arbre homogène.** Soit  $A_q$  l'arbre homogène de degré  $q + 1$ . On considère le spectre de la matrice d'adjacence  $M_q$  de  $A_q$  :

$$M_q \varphi(i) = \sum_{j \sim i} \varphi(j) ,$$

qui est relié de façon évidente à celui du laplacien canonique  $\Delta_q = (q + 1)\text{Id} - M_q$ .

**THÉORÈME 2.9.** *Le spectre de  $M_q$  est donné par :*

$$\sigma(A_q) = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}] .$$

*Preuve.*—

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda \notin \text{Spectre}(M_q)$ , alors on peut résoudre

$$(\lambda - M_q)\varphi = \delta(0) ,$$

où 0 est un sommet marqué de  $A_q$  et  $\varphi \in l^2$ . S'il y a une solution, il y en a une qui est de la forme  $\varphi(i) = F(|i|)$ ,

où  $|i| = d(0, i)$  et  $\sum_{t \in \mathbb{N}} F^2(t)q^t < \infty$ . Ecrivons que  $(\lambda - M_q)\varphi(|i|) = \delta_0$ . On obtient, en posant  $a_k = F(k)$  :

$$\lambda a_0 - (q+1)a_1 = 1 ,$$

et pour  $k \geq 0$  :

$$a_k - \lambda a_{k+1} + q a_{k+2} = 0 ,$$

et donc on obtient une suite récurrente linéaire dont l'équation caractéristique est

$$(\star) \quad qs^2 - \lambda s + 1 = 0 ,$$

qui admet comme solutions :

$$s_{\pm} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4q}}{2q} .$$

Soit  $I = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$ , alors si  $\lambda \in I$ , aucune solution n'est dans  $l^2$ . Donc  $I \subset \text{Spectre}(M_q)$ .

Au contraire, si  $\lambda \notin I$ , il y a une solution dans  $l^2$ , celle qui correspond à la solution la plus petite en module de l'équation caractéristique : plus précisément, si  $s_-$  est la solution de plus petit module ( $|s_-| < \frac{1}{\sqrt{q}}$ ) de  $(\star)$ ,

$$\varphi(i) = \frac{1}{\lambda - (q+1)s_-} s_-^{|i|} ,$$

est une solution  $l^2$  de  $(\lambda - M_q)\varphi = \delta(0)$ . De plus, on voit facilement que c'est l'unique solution.

Donc si on définit pour  $\varphi$  à support fini

$$R\varphi(i) = \frac{1}{\lambda - (q+1)s_-} \sum s_-^{d(i,j)} \varphi(j) ,$$

on a :

$$(\lambda - M_q)R\varphi = \varphi ,$$

et donc  $R$  est la résolvante pourvu qu'on réussisse à montrer l'estimation

$$\|R\varphi\| \leq C\|\varphi\| .$$

En fait, comme il est difficile de montrer directement une telle estimation, nous aurons recours à un argument indirect : le lemme de Gabber-Galil (théorème 2.8). Soit  $i_0$  un sommet de  $A_q$  et orientons les arêtes de façon  $(i, j)$  soit telle que  $i$  est entre  $i_0$  et  $j$  sur le chemin de longueur

minimale entre  $i_0$  et  $j$ . On pose  $\lambda(i, j) = q^{-1/2}$  qui satisfait les hypothèses du lemme de Gabber-galmil avec  $\nu = 2q^{1/2}$ .

□

**7.3. Densité d'état et graphes de Ramanujan.** On peut calculer la densité d'état de l'arbre homogène  $A_q$  :

$$de(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}(R_{\lambda-i0} - R_{\lambda+i0})(x, x)d\lambda$$

en posant  $\lambda = 2\sqrt{q} \cos \theta$ , il vient :

$$de = \frac{2q(q+1) \sin^2 \theta d\theta}{\pi((q+1)^2 - 4q^2 \cos^2 \theta)} .$$

Cette mesure de probabilité portée par  $I$ , le spectre, décrit la répartition asymptotique du spectre des graphes de degré  $q+1$  dont le rayon d'injectivité tend vers l'infini. Si  $G_N$  est une telle suite, on a :

$$\lim_N \frac{1}{\#V(G_N)} \sum \delta(\lambda_{i,N}) = de(\lambda) .$$

Evidemment, il peut y avoir des valeurs propres en dehors de  $I$ , il y a au moins la valeur propre  $q+1$  correspondant aux fonctions constantes. Le trou spectral optimal est donc  $q+1 - 2\sqrt{q}$  lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini.

**DÉFINITION 2.3.** *Un graphe homogène de degré  $q+1$  est dit de Ramanujan si le trou spectral de son laplacien canonique vaut au moins  $q+1 - 2\sqrt{q}$ .*

L'existence de graphes de Ramanujan avec un nombre de sommets arbitrairement grand n'est pas de tout évidente.

## 8. THÉORIE DE FLOQUET ET SPECTRES DE BANDES

Soit  $G$  un graphe muni d'une action sans points fixes de  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$  ayant un nombre fini  $N$  d'orbites et soit  $D \subset V$  un domaine fondamental ( $\#D = N$ ). Soit  $A \in O_G$  tel que  $A$  commute avec l'action de  $\mathbb{Z}^n$ .

La théorie de Floquet décrit alors de façon simple la structure du spectre de  $A$ .

Soit  $\Xi = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  le tore des caractères de  $\mathbb{Z}^n$ , ie des homomorphismes de  $\mathbb{Z}^n$  dans  $U(1)$  :  $\chi_\theta(k) = e^{2i\pi \langle k | \theta \rangle}$ . En physique du solide,  $\Xi$  s'appelle zone de Brillouin.

Pour chaque  $\chi \in \Xi$ , on considère l'espace vectoriel de dimension  $N$ ,  $L_\chi$  des  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  (non  $l^2$ , mais bornées) telles que

$$\forall x \in V, g \in \mathbb{Z}^n, \varphi(g.x) = \chi(g)\varphi(x) .$$

Comme  $A$  commute avec l'action de  $\mathbb{Z}^n$ , il opère (de façon *algébrique*) sur  $L_\chi$  ; il est de plus autoadjoint si on munit  $L_\chi$  du produit scalaire

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_{i \in G/\mathbb{Z}^n} \varphi(i) \bar{\psi}(i) ,$$

dont on vérifie facilement qu'il ne dépend pas du domaine fondamental. Les espaces vectoriels  $L_\chi$ , hermitiens de dimension  $N$ , forment un fibré vectoriel hermitien sur  $\Xi$ . On note  $F$  ce fibré.  $F$  est trivial, car il admet une base orthonormée formée des sections  $s_x$ ,  $x \in D$  de support dans l'orbite de  $x$  et qui valent 1 au point  $x \in D$  :

$$s_x(\chi)(gx) = \chi(g) .$$

**THÉORÈME 2.10.** *L'espace de Hilbert  $l^2(V)$  est canoniquement isomorphe à l'espace des sections  $L^2$  du fibré vectoriel hermitien  $F$  (fibré de Floquet). Par cet isomorphisme  $A$  se transforme en un opérateur purement tensoriel qui opère comme  $A_\chi$  sur chaque fibre.*

*Description de l'isomorphisme  $j : l^2(V) \rightarrow L^2(F)$ .*

On se ramène à la théorie des séries de Fourier.  $l^2(V) = \bigoplus_{x \in D} l^2(\mathbb{Z}^n x)$  et

$$L^2(\Xi, F) = \bigoplus L^2(\Xi, \mathbb{C} s_x) .$$

Si  $f \in l^2(V)$  est de support fini, on pose :

$$j(f)_\chi(x) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} f(gx) \bar{\chi}(g) .$$

Il est clair que  $j$  respecte la décomposition orthogonale précédente. De plus sur chaque morceau,  $j$  s'identifie aux séries de Fourier : en effet

$$j : (a_{gx_0}) \rightarrow \left( \sum a_{gx_0} \bar{\chi}(g) \right) s_{x_0} .$$

Il reste à vérifier que  $j$  entrelace  $A$  et l'opérateur de multiplication ponctuel par  $A_\chi$  : il suffit de le vérifier lorsque  $f = \varepsilon_{x_0}$ .

Soit  $\lambda_1(\chi) \leq \lambda_2(\chi) \leq \dots \leq \lambda_N(\chi)$  le spectre de l'action de  $A_\chi$  sur  $L_\chi$ . Chaque valeur propre dépend continument de  $\chi \in \Xi$  et on pose  $B_j = \lambda_j(\Xi)$ . Chaque  $B_j$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et le spectre de  $A$  est la réunion de ceux-ci.

De plus la *densité d'état*  $\sum_{x \in D} \mu_x$  est la somme des mesures  $\mu_i$  images par  $\lambda_i$  de la mesure de Lebesgue de masse 1 sur  $\Xi$ . Il suffit pour s'en convaincre de calculer le spectre du quotient  $G_q$  de  $G$  par

$(q\mathbb{Z})^n$  lorsque  $q \rightarrow \infty$ . Le spectre de  $A$  sur  $G_q$  se calcule alors de façon analogue, mais on doit faire intervenir seulement les caractères qui sont racine  $q$ -ème de 1. Le spectre est donc la réunion des spectres des  $A_\chi$  lorsque  $\chi$  est racine  $q$ -ème de 1.

Les mesures

$$\mu_q = \frac{1}{N \cdot q^n} \sum \delta(\lambda_j)$$

convergent donc vers la somme des images des mesures  $|d\theta|$  sur  $\Xi$  par les  $\chi \rightarrow \lambda_i(\chi)$ , à cause de l'équirépartition des racines de l'unité quand  $q$  tend vers l'infini.

## 9. LE CAS PÉRIODIQUE DE DIMENSION 1

On considère le cas où  $G = (\mathbb{Z}, E)$  avec  $E = \{\{i, j\} \mid |i - j| = 1\}$  et  $\Gamma = \mathbb{Z}$  agit par translation de multiples de  $N$ . Soit  $A \in O_G$ ,  $\Gamma$ -invariante.  $A$  est ce qu'on appelle une matrice de Jacobi périodique. On pose  $a_i = a_{i,i}$ ,  $b_i = a_{i,i+1} < 0$ , les suites  $a_i$  et  $b_i$  sont évidemment périodiques de période  $N$ .

Si  $Ay = \lambda y$  avec  $y = (y_i)$ , on a :

$$(a_i - \lambda)y_i + b_i y_{i+1} + b_{i-1} y_{i-1} = 0$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On considère l'application de Poincaré  $P_\lambda$  qui à  $(y_0, y_1)$  associe  $(y_N, y_{N+1})$  où  $(y_i)$  est une solution de  $Ay = \lambda y$ .

Pour 2 telles solutions, on introduit le wronskien :

$$W(y, z) = b_i(y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1})$$

dont un petit calcul montre l'indépendance de  $i$ . On en déduit que  $P_\lambda$  est de déterminant 1, i.e.  $P_\lambda \in SL_2(\mathbb{C})$ .

Donc si on veut trouver une solution  $y$  de  $Ay = \lambda y$  qui vérifie  $y_{j+N} = e^{2\pi i \theta} y_j$  il faut et il suffit que  $e^{2\pi i \theta}$  soit valeur propre de  $P_\lambda$ . Autrement dit si  $\Delta(\lambda) = \text{Tr}(P_\lambda)$  que  $|\Delta(\lambda)| \leq 2$ . Le spectre de  $A$  sur  $l^2(\mathbb{Z})$  est donc d'après l'analyse du §8 l'ensemble des  $\lambda$  tels que  $|\Delta(\lambda)| \leq 2$ . En fait  $\Delta(\lambda)$  est un polynôme de degré  $N$  en  $\lambda$ .

Les solutions de  $\Delta(\lambda) = 2$  (resp.  $-2$ ) sont les valeurs propres pour le problème périodique  $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  (resp. le problème antipériodique).

Si  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  sont les valeurs propres du problème périodique, et  $\mu_i$  celles du problème antipériodique, on a :

$$\lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \mu_3 \leq \mu_4 < \dots$$

En effet cette relation est satisfaite lorsque  $a_i = 0$ ,  $b_i = -1$  et il n'est pas possible qu'un  $\lambda_i$  soit égal à un  $\mu_j$  car alors  $\det(P_{\lambda_i})$  vaudrait

–1. On raisonne alors par connexité de  $O_G$  et continuité des  $\lambda_i, \mu_j$  comme fonctions de  $A$ . On a ainsi le graphe suivant pour  $\Delta(\lambda)$ .

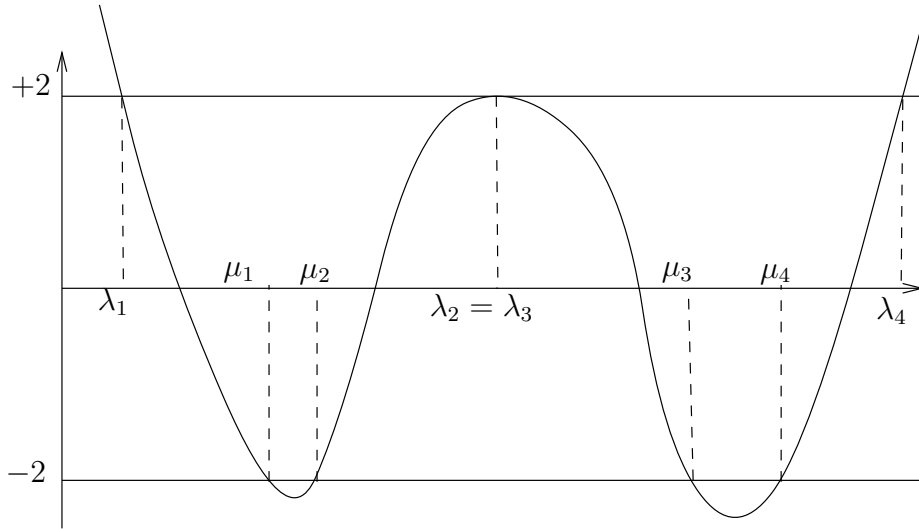


FIGURE 3.  $\Delta(\lambda)$

*Exercice* : relier  $\Delta(\lambda) - 2$  au polynôme caractéristique de  $A$  vu comme endomorphisme de  $l^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ .

Cela implique le :

**THÉORÈME 2.11.** *Si  $A \in O_{C_N}$  où  $C_N$  est le cycle à  $N$  sommets, on a les inégalités :*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots$$





## CHAPITRE 3

# LE TROU SPECTRAL DES GRAPHES ET LEURS PROPRIÉTÉS D'EXPANSION

Dans la suite  $G = (V, E)$  est un graphe fini ou non, dont le degré est uniformément majoré par une constante  $k$ . Le laplacien canonique  $\Delta_G$  est l'opérateur autoadjoint borné sur  $\mathcal{H} = l^2(V)$  associé à la forme quadratique

$$q(f) = \sum_{\{i,j\} \in E} (f(i) - f(j))^2 = \langle \Delta_G f | f \rangle ,$$

avec

$$\Delta_G(f)(i) = \sum_{j \sim i} (f(i) - f(j)) .$$

On définit aussi la matrice d'adjacence (modifiée)  $M'_G$  par la relation

$$M'_G = k\text{Id} - \Delta_G = \text{Diag}(k - d(i)) + M_G ,$$

où  $k$  est le sup des degrés des sommets.

Si  $G = (V, V_0, E)$  est à bord, le *laplacien canonique de Dirichlet* est l'opérateur autoadjoint sur  $l^2(V \setminus V_0)$  associé à la forme  $q(f)$  précédente.

Si  $G$  est fini et connexe, le spectre de  $\Delta_G$  est de la forme :

$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\#V} .$$

Le **trou spectral** ou **gap** de  $G$ , noté  $g(G)$  est alors défini par  $g(G) = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$ . Le but de ce chapitre est de donner des relations entre le trou spectral et des propriétés plus géométriques de  $G$  (diamètre, expansion, constante de Cheeger, etc...).

On s'intéressera aussi à la construction de familles infinies de graphes ayant de bonnes propriétés d'expansion. En particulier, on donnera une construction proche de celle de Gabber-Galil ([GG81]) et on montrera comment elle permet de retrouver la propriété (T) pour  $SL_3(\mathbb{Z})$ , grâce à l'inégalité de Kato pour les graphes.

### 1. CONSTANTES DE CHEEGER

Dans les années 70, J. Cheeger a introduit une constante isopérimétrique  $h(X, g)$  attachée à toute variété riemannienne compacte connexe  $(X, g)$  et qui est définie de la façon suivante : pour tout domaine régulier

$D \subset X$ , on pose  $h(D) = \text{vol}(\partial D)/\text{vol}(D)$ , où les volumes sont calculés à l'aide de la métrique riemannienne  $g$ . La constante de Cheeger  $h(X, g)$  est le inf des  $h(D)$ , où  $D$  parcourt les domaines de volume  $\leq \text{vol}(X)/2$ . Cheeger montre ensuite que la première valeur propre non nulle du laplacien est  $\geq h(X, g)^2/4$  (voir [BGM71] pour la définition et les propriétés de  $h(X, g)$ ).

On peut facilement adapter ces résultats aux graphes et les utiliser dans les 2 sens : soit lorsqu'on a des informations sur  $h$ , soit lorsqu'on en a sur le gap  $\lambda_2$ .

En fait, on va définir 2 constantes de Cheeger :  $h_0$  pour un graphe infini ou à bord ;  $h$  pour un graphe fini sans bord.

**DÉFINITION 3.1.** *Si  $G = (V, V_0, E)$  est un graphe à bord  $V_0$  (éventuellement infini), ce qui signifie que  $V_0$  est un sous-ensemble de  $V$ , on pose*

$$h_0(G) = \inf \frac{|\partial A|}{|A|} ,$$

où le inf porte sur les parties finies de  $V$  ne rencontrant pas  $V_0$  et  $\partial A$  est l'ensemble des arêtes issues de  $A$  et dont l'extrémité n'est pas dans  $A$ .

Si  $G = (V, E)$  est un graphe fini, on pose

$$h(G) = \inf \frac{|\partial A|}{|A|} ,$$

où cette fois, le inf porte sur les  $A \subset V$  tels que  $|A| \leq |V|/2$ .

Il n'est pas difficile de montrer, par exemple, que  $h_0(\mathbb{Z}^n) = 0$  ; en effet, pour un cube de côté  $N$ , le nombre de sommets intérieurs est de l'ordre de  $N^n$ , alors que le nombre d'arêtes issues du cube est seulement de l'ordre de  $N^{n-1}$  qui est négligeable devant  $N^n$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Pour un arbre homogène  $T_q$  de degré  $q + 1$ , on a  $h_0(T_q) = q - 1$ . En effet, il suffit évidemment de considérer les parties connexes  $A$  de  $V$  : ce sont des arbres et on a alors :  $(q + 1)|A| = |\partial A| + 2I$  où  $I$  est le nombre d'arêtes intérieures de  $A$ . De plus, on a évidemment (caractéristique d'Euler) :

$$|A| - I = 1 ,$$

d'où l'on conclut que :

$$(q - 1)|A| = |\partial A| - 2 ,$$

et le calcul de  $h_0$  s'en suit.

Le même argument montre que :

PROPOSITION 3.1. *Si  $T$  est un arbre dont les degrés des sommets sont tous minorés par  $q + 1$ , alors*

$$h_0(T) \geq q - 1 .$$

Benjamini et Schramm [BS97] ont montré que tout graphe infini  $G$  tel que  $h_0(G) > 0$  contient un arbre  $T$  tel que  $h_0(T) > 0$ .

En fait,  $h_0$  mesure les propriétés d'expansion de  $G$ . Donnons la :

DÉFINITION 3.2. *Si  $A$  est un sous-ensemble d'un espace métrique  $(X, d)$ , on définit les boules  $B(A, r) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq r\}$ . L'ensemble  $V$  des sommets d'un graphe sera muni de la distance à valeurs entières donnée par :*

$$d(i, j) = \inf\{n \mid \exists i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j \text{ tels que } \forall l, \{i_l, i_{l+1}\} \in E\} .$$

si  $A$  ne rencontre pas le bord de  $G$ , le volume de  $B(A, 1)$  vérifie :

$$|B(A, 1)| \geq \left(1 + \frac{h_0}{k}\right)|A| ,$$

où  $k$  est la borne supérieure du degré de  $G$ . Si  $h_0 > 0$ , les boules  $B(A, N)$  ont un volume à croissance exponentielle tant qu'elles ne rencontrent pas le bord de  $G$ .

Dans le cas fini, l'estimation précédente est valable avec  $h$  au lieu de  $h_0$  tant que la volume n'atteint pas la moitié du volume de  $V$ . On en déduit facilement l'estimation suivante sur le diamètre  $D$  de  $G$  :

$$D(G) \leq \frac{2 \log(n/2)}{\log(1 + (h/k))} + 1 ,$$

où  $n$  est le nombre de sommets de  $G$ .

En particulier, si on a une famille infinie de graphes finis  $G_n$  de degrés bornés, de nombre de sommets  $n$ , et tels que  $h(G_n)$  ne tend pas vers 0, leur diamètre croît comme  $O(\log n)$ . Il n'est pas simple de construire de telles familles, mais elles présentent un grand intérêt dans la théorie des réseaux de communication et des algorithmes.

## 2. $\lambda_1$ , TROU SPECTRAL ET INÉGALITÉS DE CHEEGER

Soit  $\Delta_G$  le laplacien canonique de  $G$ .

On peut estimer les valeurs propres de  $\Delta_G$  à l'aide des constantes de Cheeger : la remarque de base est que le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique d'un ensemble de sommets  $A$  est exactement  $|\partial A|/|A|$ .

On a les inégalités suivantes :

THÉORÈME 3.1. 1) Soit  $G = (V, V_0, E)$  un graphe (pas nécessairement fini) de bord  $V_0$  tels que les sommets sont tous de degré  $\leq k$ . Soit  $\lambda_1$  la plus petite valeur propre de  $\Delta_G$  avec conditions de Dirichlet au bord, on a :

$$\frac{h_0^2(G)}{2k} \leq \lambda_1 \leq h_0(G) .$$

2) Si  $G = (V, E)$  est un graphe fini, on a  $\lambda_1 = 0$  et

$$\frac{h^2(G)}{2k} \leq g(G) = \lambda_2 - \lambda_1 \leq 2h(G) .$$

*Preuve.* –

1) Pour majorer  $\lambda_1$ , on calcule le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique de  $A$ , il vaut  $|\partial A|/|A|$ . On en déduit, pour tout  $A$  ne rencontrant pas  $V_0$  :

$$\lambda_1 \leq |\partial A|/|A| .$$

Pour minorer  $\lambda_1$ , on prend  $f$  à support fini disjoint de  $V_0$ . On évalue alors

$$S = \sum_{\{i,j\} \in E} |f^2(i) - f^2(j)| .$$

Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$S \leq \sqrt{2k} \|df\| \|f\| ,$$

avec  $\|df\|^2 = \sum_{\{i,j\} \in E} (f(i) - f(j))^2$ . Pour minorer  $S$ , on considère les valeurs  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_r$  prises par  $f^2$  et les ensembles  $A_l = \{i \in V | f^2(i) \geq a_l\}$ . On a

$$S = \sum f^2(i) - f^2(j) ,$$

où la somme porte sur les arêtes  $(i, j)$  orientées de façon que  $f^2(i) - f^2(j) \geq 0$ . On peut réécrire cette somme sous la forme d'une somme  $S = \sum (a_l - a_{l-1})$ , où le nombre de répétitions de  $a_l - a_{l-1}$  est égal au nombre d'arêtes  $(i, j)$  telles que  $f^2(i) \geq a_l$  et  $f^2(j) \leq a_{l-1}$ , donc  $(i, j) \in \partial A_l$ . Utilisant la définition de  $h_0(G)$ , il vient :

$$S \geq h_0 \sum_{l=1}^r (a_l - a_{l-1}) |A_l| ,$$

qui est égal à  $h_0 \sum_k f^2(i)$ .

D'où l'on tire

$$\|df\|^2 \geq \frac{h_0^2}{2k} \|f\|^2$$

et la minoration de  $\lambda_1$ .

2) Pour la majoration de  $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$ , on fabrique une fonction d'intégrale nulle de la façon suivante : si  $V = A \cup B$  est une partition de  $V$  avec  $|A| = a \leq |B| = b$ , on prend  $f = b$  sur  $A$  et  $-a$  sur  $B$ . On a le quotient de Rayleigh :

$$\frac{\langle \Delta f | f \rangle}{\|f\|^2} = \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \frac{(a+b)^2 |\partial A|}{(a+b)ab} ,$$

d'où l'on déduit le résultat.

Pour la minoration, si  $f$  est une fonction propre pour  $\lambda_2$ , et  $A = \{i \in V | f(i) > 0\}$ , on peut supposer  $|A| \leq \frac{|V|}{2}$ . Soit alors  $f_1$  égale à  $f$  sur  $A$  et à 0 sur le complémentaire de  $A$ . D'après ce qui précède,

$$\frac{\|df_1\|^2}{\|f_1\|^2} \geq \frac{h^2}{2k} .$$

Maintenant, on a aussi :

$$\begin{aligned} \sum_E (f_1(i) - f_1(j))^2 &= \sum_{i \in A} f_1(i) \sum_{j \sim i} (f_1(i) - f_1(j)) \leq \\ &= \sum_{i \in A} f(i) \Delta f(i) = \lambda_2 \sum_{i \in A} f(i)^2 . \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

### 3. CHEEGER POUR LES PROCESSUS DE MARKOV

On peut étendre sans difficultés les inégalités de Cheeger au cas des processus de Markov réversibles.

Soit donc le processus de Markov de générateur  $\Lambda$  tel que :

$$\Lambda f(i) = \sum_{j \sim i} c_{i,j} (f(i) - f(j))$$

supposé réversible par rapport à la mesure  $\pi = \sum_{i \in V} \pi_j \delta(i)$ . Considérons la forme quadratique associée sur  $l^2(\pi) = \mathbb{R}^V$  définie par :

$$q(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} (\pi_i c_{i,j}) (x_i - x_j)^2 .$$

On définit alors la constante de Cheeger

$$h_{\pi, \Lambda}$$

comme le inf des quotients de Rayleigh

$$\Phi(A) = \frac{q(\chi_A)}{\pi(A)}$$

des fonctions caractéristiques  $\chi_A$  de domaines  $A \subset V$  tels que  $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$  et le nombre  $k(\Lambda) = \sup_i (\sum_{j \sim i} c_{i,j})$ .

Remarquons que le quotient de Rayleigh précédent a une interprétation probabiliste en termes du processus  $X_t$  de générateur  $\Lambda$  :

$$\Phi(A) = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(X_{t+\delta t} \notin A \mid X_t \in A)}{\delta t} .$$

On a alors :

**THÉORÈME 3.2.** *Si le spectre de  $\Lambda$  est  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots$ , on a :*

$$\frac{h_{\pi,\Lambda}^2}{2k(\Lambda)} \leq \lambda_2 \leq 2h_{\pi,\Lambda} .$$

En particulier dans le cas des chaines ( $\sum_{j \sim i} c_{i,j} = 1$ ), on a  $k(\Lambda) = 1$ .

La preuve est la même que plus haut. Il y a aussi un énoncé dans le cas à bord.

#### 4. EXPANSEURS ET GRAPHES DE RAMANUJAN

**DÉFINITION 3.3.** *Un graphe  $G$  sera appelé  $(n, k, \mu)$ -expandeur si  $|V(G)| = n$ ,  $\text{degré}(G) \leq k$  (dans la pratique  $k$  est le sup des degrés des sommets) et les valeurs propres de  $M'_G$  sont contenues dans l'intervalle  $[-\mu, \mu]$  sauf celles qui valent  $k$  ou  $-k$  (ce dernier cas ne se produit que pour les graphes bipartites). Leur gap est  $\geq k - \mu$ .*

*Remarque :* si le degré n'est pas constant et que l'on définit la matrice d'adjacence comme  $kId - \Delta_G$ , où  $k$  est le plus grand degré, cela revient à penser que l'on ajoute  $l$ -boucles aux sommets de degré  $k - l$ .

On veut construire des familles infinies ( $n \rightarrow \infty$ ) de graphes  $G_n$  qui soient des  $(n, k, \mu)$ -expandeurs où  $k$  est fixé et  $\mu$  aussi petit que possible et indépendant de  $n$ . On peut alors minorer uniformément  $h(G_n)$  et majorer le diamètre par  $c \log n$ .

*Remarque :* F. Chung [**Chu89**] a donné une estimation du diamètre pour un  $(n, k, \mu)$  expandeur :

**THÉORÈME 3.3.** *Si  $G$  est un  $(n, k, \mu)$  expandeur et que  $G$  n'est pas bipartite, le diamètre  $D(G)$  vérifie*

$$D(G) \leq \frac{\log(n-1)}{\log(k/\mu)} + 1 .$$

Cette estimation ne donne rien pour les graphes bipartites. On a alors :

THÉOREME 3.4. *Pour un graphe bipartite*

$$D(G) \leq \frac{\log(n/2 - 1)}{\log k/\tilde{\mu}} + 2 .$$

*Preuve.* –

Si  $M_G$  est la matrice d'adjacence de  $G$ , alors les coefficients  $M_G^m$  sont tous  $> 0$  si et seulement si  $m \geq D(G)$ . Soit  $\lambda_1 = k > \mu \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq -\mu$  les valeurs propres de  $M_G$  et  $u_i$  une base orthonormée de fonctions propres associées avec  $u_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On peut alors calculer les coefficients matriciels  $M_G^m(r, s)$  à l'aide de la décomposition propre de  $M_G$  :

$$M_G^m(r, s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m u_i(r) u_i(s) ,$$

et donc :

$$M_G^m(r, s) \geq \frac{k^m}{n} - \mu^m \sum_{i>1} |u_i(r)| |u_i(s)| .$$

On utilise Cauchy-Schwarz,  $\sum_{i=1}^n |u_i(r)|^2 = 1$  et  $u_1(i) = 1/\sqrt{n}$ , ce qui donne :

$$M_G^m(r, s) \geq \frac{k^m}{n} - \mu^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) ,$$

d'où le résultat. □

Il y a un seuil asymptotique infranchissable par les  $(n, k, \mu)$ -expandeur, c'est  $\mu_k = 2\sqrt{k-1}$ . Un  $(n, k, \mu_k)$ -expandeur est un graphe de Ramanujan au sens de la définition 2.3. On a en effet la :

PROPOSITION 3.2. *Si  $G_n$  est une suite de  $(n, k, \mu(G_n))$ -expandeurs, alors*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n) \geq 2\sqrt{k-1} (= \mu_k) .$$

*Preuve.* –

Soit  $\nu$  une mesure de probabilité à support compact sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $r(\nu) = \sup\{|t| \mid t \in \text{support}(\nu)\}$ . Si  $m_l(\nu) = \int t^l d\nu(t)$ , on a

$$r(\nu) = \limsup m_l(\nu)^{1/l} ,$$

ainsi qu'il résulte du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent

$$\sum m_l(\nu)\lambda^{-l} = \int \frac{d\nu(t)}{1-t/\lambda}.$$

Soit  $dP_k$  la mesure spectrale (voir aussi [Col88a] pour cette notion) de l'arbre homogène  $T_k$  de degré  $k$ , caractérisée par la relation :

$$\int f(t)dP_k = f(M_{T_k})(x, x),$$

où  $f(M_{T_k})(x, y)$  est la matrice de l'opérateur  $f(M_{T_k})$ . On a  $r(dP_k) = 2\sqrt{k-1}$ , car le spectre de la matrice d'adjacence  $M_{T_k}$  de  $T_k$  est l'intervalle  $[-2\sqrt{k-1}, 2\sqrt{k-1}]$ .

Soit maintenant  $dQ_n = \frac{1}{n} \sum_j \delta(\lambda_{j,n})$ , où  $\lambda_{j,n}$  sont les valeurs propres de  $M_{G_n}$ . On a

$$m_l(dQ_n) \geq m_l(dP_k),$$

car le membre de gauche compte le nombre moyen de lacets de longueur  $l$  dans  $G_n$  alors que celui de droite compte le nombre de lacets de longueur  $l$  basé en un point de l'arbre homogène de degré  $k$ . Donc, si  $dQ_\infty$  est une limite vague des  $dQ_n$  :  $m_l(dQ_\infty) \geq m_l(dP_k)$ , ce qui implique que  $r(dQ_\infty) \geq r(dP_k)$  et donc la proposition. □

Margulis [Mar73] a trouvé dans les années 1973 une construction générale de familles infinies de  $(n, k, c)$ -expandeurs avec  $c > 0$  indépendant de  $n$  en utilisant des arguments de théorie des groupes assez délicats, basés sur la propriété (T) de Kazhdan. Malheureusement  $c$  n'est pas explicite.

Gabber et Galil [GG81] ont trouvé en 1980 des exemples plus explicites.

Enfin des exemples beaucoup plus sophistiqués qui sont des graphes de Ramanujan ont été trouvés par Lubotsky-Phillips-Sarnak [LPS88]. Pour tout ceci voir le survol [Val97].

## 5. LES GRAPHES DE GABBER-GALIL

Commençons par préciser la notion de graphe de Cayley :  $X$  est un ensemble muni d'une action d'un groupe  $\Gamma$  de type fini engendré par une partie (finie)  $S$  symétrique. On définit alors le graphe de Cayley ou plutôt sa matrice d'adjacence  $M'_{X,S}$  qui opère sur  $l^2(X)$  :  $M'_{X,S}f(z) = \sum_{g \in S} f(g.z)$ . On désignera par  $G_{X,S}$  le graphe dont l'ensemble des



sommets est  $X$  et la matrice d'adjacence  $M'_{X,S}$  : c'est le graphe de Cayley, il peut avoir des boucles et des arêtes multiples. La *valence*  $k$  est dans ce cas, *par convention*, le nombre d'éléments de  $S$ . On remarque aussi que le fait que  $S$  soit symétrique implique que  $M'_{X,S}$  est un opérateur symétrique.

Décrivons une variante de l'exemple de [GG81] ; les exemples dont nous allons parler sont en fait des graphes de Cayley au sens précédent.

$G_n = G_{X_n, S_8}$  est le graphe de Cayley de degré 8, à  $n = m^2$  sommets, que l'on peut décrire ainsi :  $X_n = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ , le groupe  $\Gamma = SA_2(\mathbb{Z})$  est le groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}^2$  à coefficients entiers de déterminant 1 qui opère de façon naturelle sur  $X_n$  ;  $S$  est l'ensemble symétrique des 8 générateurs de  $\Gamma$  décrit ainsi : si  $z = (x, y)$  et

$$\sigma_1(z) = (x, x + y), \sigma_2(z) = (x, x + y + 1),$$

$$\sigma_3(z) = (x + y, y), \sigma_4(z) = (x + y + 1, y),$$

on définit  $S_8$  comme l'ensemble des 8 transformations affines  $\sigma_i^{\pm 1}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $S_4$  comme l'ensemble des 4 transformations linéaires  $\sigma_i^{\pm 1}$ , avec  $i = 1, 3$ .

**THÉORÈME 3.5.** [GG81] *Soit  $\nu = 1 + 2\sqrt{2}$ . Les  $G_n$  sont des  $(n = m^2, 8, 2\nu)$ -expanseurs et  $\lim_n \mu(G_n) = 2\nu$  et donc aussi*

$$g(G_n) \geq 8 - 2\nu \sim 0.3431 .$$

*Remarque :* on a  $2\nu \sim 7.6569 > 2\sqrt{7} \sim 5.2915$  ; donc les  $G_n$  sont loin d'être des graphes de Ramanujan, mais ils sont infiniment moins chers !!

La preuve est élémentaire. Elle repose sur 3 lemmes :

**LEMME 3.1.** *Soit  $G_\infty$  le graphe de Cayley  $G_{\mathbb{Z}^2 \setminus 0, S_4}$  de degré 4 dont les sommets sont  $\mathbb{Z}^2 \setminus 0$  et 2 sommets  $z, z'$  sont reliés par une arête si et seulement s'il existe  $\tau \in S_4$  tel que  $z = \tau(z')$ . Alors le spectre de la matrice d'adjacence  $M'_\infty$  de  $G_\infty$  vérifie*

$$\sigma(M'_\infty) \subset [-\nu, \nu] ,$$

et  $\nu$  est le plus petit réel  $> 0$  pour lequel une telle inclusion est vraie.

**LEMME 3.2.** *Soit  $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ , alors l'opérateur  $T_\infty$  défini sur  $L^2(X)$  par*

$$T_\infty f(z) = 2 \sum_{\tau \in S_4} f(\tau z)$$

*vérifie :*

$$\sigma(T_\infty) \subset [-2\nu, 2\nu] \cup \{8\} .$$

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui de [LPS88] (voir aussi [Col94] et [Lub94]) pour le cas de  $S^2$ .

LEMME 3.3. *Si  $H_n$  est le sous-espace de dimension  $n = m^2$  de  $L^2(X)$  engendré par les fonctions caractéristiques des carrés*

$$C_a = a + [0, 1/m]^2 ,$$

où  $a$  parcourt la grille des  $(i/m, j/m)$ , alors si on identifie  $l^2(X_n)$  à  $H_n$  (comme espaces hilbertiens) de la façon évidente, la restriction de la forme quadratique  $q_\infty(f) = \langle T_\infty f | f \rangle$  à  $H_n$  est la forme quadratique  $q_n$  associée à la matrice d'adjacence de  $M'_{X_n, S_8}$ .

*Preuve.* –

(3.1)

Le graphe  $G_\infty$  se décompose en réunion de  $(0, 0)$  et des graphes isomorphes  $T_p = \{(m, n) | \text{pgcd}(m, n) = p\}$  pour  $p \in \mathbb{N} \setminus 0$ . Il suffit donc de contrôler le spectre de la matrice d'adjacence  $M'_1$  de  $T_1$ .

Posons  $\|(x, y)\| = \sup(|x|, |y|)$  et  $\sigma(z) = \{\tau(z) | \tau \in S_4\}$  l'ensemble des voisins de  $z$ . Si  $\|z\| > 1$ , il y a dans  $\sigma(z)$  2 points de norme  $> \|z\|$ , un de norme  $< \|z\|$  et un de norme  $\|z\|$ . Il est alors facile de dessiner le graphe  $T_1$  qui est réunion de 8 arbres binaires avec racines avec des arêtes supplémentaires joignant des points à même distance combinatoire des racines attachés aux 4 coins d'un carré (2 par coins) et de 4 autres sommets situés au milieu des arêtes de ce carré et ayant chacun 2 boucles attachées.

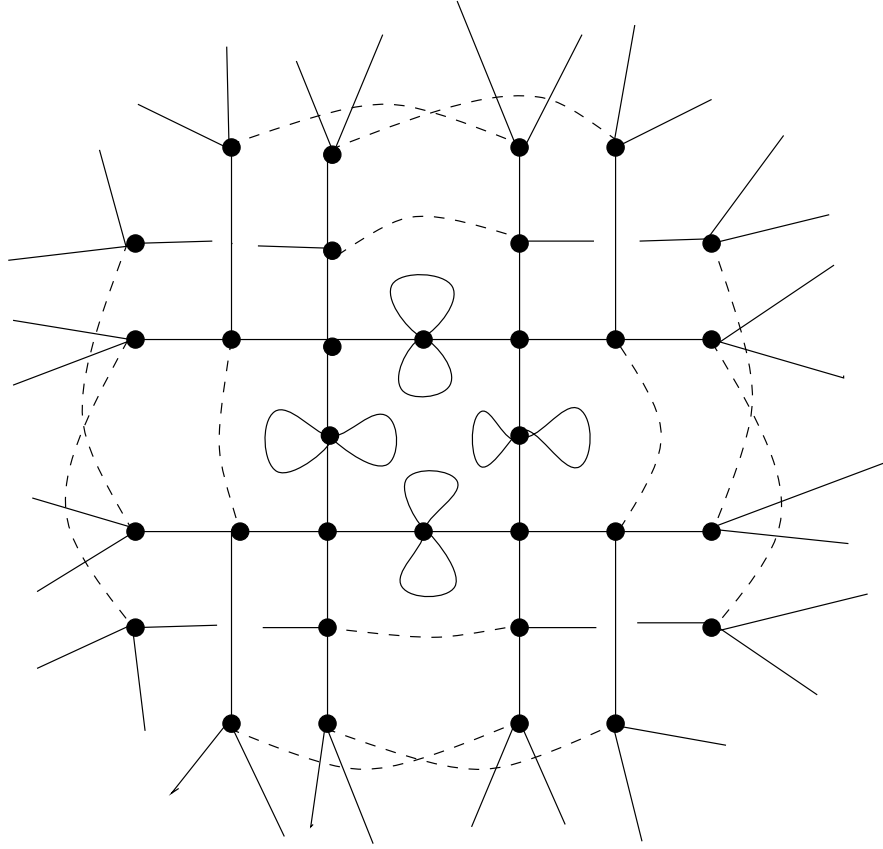
Pour calculer le spectre de  $T_1$ , on applique le théorème 2.8.

Nous allons appliquer ce critère à  $T_1$ .

On considère la fonction  $f$  sur les sommets de  $T_1$  qui vaut 1 au coin du carré,  $(1/\sqrt{2})^k$  aux points des arbres à distance  $k$  du coin (la racine) et  $a = (1 + \sqrt{2})/2$  au centre des arêtes du carré : on vérifie sans difficultés que

$$M'_{T_1} f(z) \leq (1 + 2\sqrt{2})f(z) .$$

Il n'est pas difficile de voir que le spectre de  $T_1$  contient l'intervalle  $[-2\sqrt{2} + 1, \nu]$  en utilisant le fait que le spectre (essentiel) de la matrice d'adjacence d'un arbre régulier de degré 3 est l'intervalle  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ . En effet, on peut considérer le spectre de la matrice d'adjacence de  $T_1$  restreint aux fonctions radiales ; le spectre essentiel

FIGURE 1. le graphe  $T_1$ 

est alors celui de l'arbre homogène de degré 3 translaté de 1 (il ne dépend que de ce qui se passe à l'infini).

Le graphe  $G_\infty$  se décompose en réunion des graphes isomorphes

$$T_p = \{(m, n) | \text{pgcd}(m, n) = p\}$$

pour  $p \in \mathbb{N} \setminus 0$ . Il suffit donc de contrôler le spectre de la matrice d'adjacence  $M'_1$  de  $T_1$ .

□

*Preuve.*—

(3.2)

Par transformée de Fourier,  $L^2(X)$  s'identifie à  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  et l'orthogonal des fonctions constantes à  $l^2(\mathbb{Z}^2 \setminus 0)$ . Un petit calcul montre que l'opérateur  $T_\infty$  s'identifie au double de la matrice d'adjacence du graphe  $G$ .

□

*Preuve.*–

(3.3)

Soit, pour  $a \in X_n$ ,  $\varphi_a = \sqrt{n}\chi_{C_a}$ . Alors  $j : l^2(X_n) \rightarrow L^2(X)$  définie par  $j(x) = \sum x_a \varphi_a$  est une isométrie de  $l^2(X_n)$  sur  $H_n$ . Il suffit donc de calculer :

$$c_{a,b} = 2 \sum_{\tau \in S_4} \int_X \tau^*(\varphi_a) \varphi_b = 2n \sum_{\tau \in S_4} L(C_b \cap \tau(C_a)) ,$$

où  $L$  est la mesure de Lebesgue. Cette mesure vaut  $1/2n$  ou 0 suivant qu'il existe ou non  $\sigma \in S_8$  tel que  $a = \sigma(b)$ .

□

*Preuve.*–

(3.5)

On applique le minimax qui montre que  $\mu_1(G_n) \geq -2\nu$  et  $\mu_{n-1}(G_n) \leq 2\nu$ . La limite s'obtient par densité des  $H_n$ ,  $n \rightarrow \infty$  dans  $L^2(X)$ .

□

## 6. LA PROPRIÉTÉ (T) DE KAZHDAN

Soit  $G$  un groupe localement compact (par exemple un groupe de Lie ou un groupe discret), on pose la

**DÉFINITION 3.4.**  $G$  a la propriété (T) ( $G$  est alors dit de Kazhdan) s'il existe un voisinage compact  $K$  de  $Id$  dans  $G$ , engendrant  $G$ , et une constante  $c > 0$  tels que, pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sans vecteurs invariants, on ait :

$$\forall g \in K, \forall x \in \mathcal{H}, \|\pi(g)x - x\| \geq c\|x\| .$$

En fait, bien sûr, si la propriété est vraie avec un choix de  $K$ , elle est vraie avec tout autre choix  $K'$  (il existe  $N$  tel que  $K \subset K'^N$ ), mais la constante  $c$  dépend de  $K$ .

Lorsque  $G$  est discret et  $S$  un système de générateurs fini symétrique de  $G$ , on définit la constante de Kazhdan  $\tilde{c}(G, S)$  par :

$$\tilde{c}(G, S) = \inf_{\pi \in \hat{G} \setminus \rho_o} \inf_{\|x\|=1} \sum_{G \in S} \|\pi(G)x - x\|^2 ,$$

où  $\rho_o$  est la représentation triviale et  $\hat{G}$  l'ensemble des (classes de) représentation unitaires irréductibles de  $G$ . La propriété (T) équivaut alors à

$$\tilde{c}(G, S) > 0 ,$$

car on voit facilement que :

$$c \geq \frac{\tilde{c}(g, S)}{|S|}.$$

Lorsque  $G$  est un groupe de Lie connexe, on associe à une base  $B = (Y_i)$  de l'algèbre de Lie un opérateur différentiel  $\Delta_{\pi, B}$  sur l'espace  $\mathcal{H}$  de la représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  par la forme quadratique  $Q(z) = \sum_i \|\pi(Y_i)z\|^2$  et la constante de Kazhdan est  $c(G, B)$  est alors le *inf* de ces spectres pour les représentations sans vecteurs  $G$ -invariants.

**EXEMPLE 6.1.** *Tout groupe compact est de Kazhdan ; en effet, il suffit de prendre  $K = G$  et de remarquer que si un vecteur unitaire  $x$  vérifie*

$$\|\pi(g)x - x\| \leq \sqrt{2} - \varepsilon, \varepsilon > 0,$$

la moyenne sur  $G$  des  $\pi(g)x$  est invariante par  $\pi$  et non nulle. Il est intéressant de calculer explicitement les constantes de Kazhdan des groupes finis (voir à ce sujet [BdH94]).

Pour un groupe fini, on sait que la représentation régulière contient toutes les représentations irréductibles. Soit donc  $(G, S)$  un groupe fini engendré par  $S$ , supposé symétrique. Alors

$\tilde{c}(G, S)$  est égale à la deuxième valeur propre du laplacien (ie le gap) du graphe de Cayley associé à  $S$ .

**EXEMPLE 6.2.** *Le groupe additif  $\mathbb{Z}$  n'a pas la propriété (T). En effet le groupe des caractères est le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et le caractère trivial n'est pas isolé.*

**EXEMPLE 6.3.** *Plus généralement, un groupe commutatif n'a la propriété (T) que s'il est compact et donc, s'il existe un homomorphisme surjectif de  $G$  sur un groupe commutatif non compact,  $G$  n'a pas la propriété (T) ; par exemple les groupes libres n'ont pas la propriété (T). Pour  $SL_2(\mathbb{Z})$ , la situation est plus subtile, son groupe des commutateurs est d'indice fini et donc il n'y a pas d'homomorphismes non triviaux de  $SL_2(\mathbb{Z})$  dans  $\mathbb{Z}$ . Il faut utiliser le fait que  $SL_2(\mathbb{Z})$  a un sous-groupe d'indice fini qui est un groupe libre à 2 générateurs (le groupe de congruence  $G(2)$ ) et que si  $G$  a la propriété (T), ses sous-groupes d'indice fini aussi.*

Il n'est donc pas évident du tout qu'il y a des groupes infinis ayant la propriété (T). En fait Kazhdan a montré que si  $K$  est un corps commutatif localement compact non discret,  $SL_n(K)$  a la propriété (T) pour  $n \geq 3$ . Pour la preuve de ce fait, on pourra consulter [HV89] ou [Lub94]. Au § 7, on donnera une preuve de la propriété  $(T_f)$  pour

$SL_3(\mathbb{Z})$ , où  $(T_f)$  signifie qu'on se restreint aux représentations de dimension finie dans la définition.

Il est également utile d'introduire une propriété (T) (et aussi  $(T_f)$ ) relative, si  $H \subset G$  est un sous-groupe de  $G$ , on dira que  $(G, H)$  a la propriété (T) relative si, sous les mêmes hypothèses que dans la première définition, on peut conclure que  $\pi$  a un vecteur  $H$ -invariant non trivial. par exemple, si  $G = SA_2(\mathbb{R})$  est le groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}^2$  de déterminant 1 et  $H = \mathbb{R}^2$  le sous-groupe des translations, la paire  $(G, H)$  a la propriété (T). C'est un ingrédient essentiel de la preuve du théorème de Kazhdan.

De plus, on a la propriété suivante, si  $G$  est un réseau de  $G$  (ie un sous-groupe discret de covolume fini), alors  $G$  a la propriété (T) si et seulement si  $G$  l'a : en particulier  $SL_n(\mathbb{Z})$  a la propriété (T) pour  $n \geq 3$  et  $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$  a la propriété (T) relative.

Examinons maintenant la relation avec le spectre. Soit  $(G, S)$  un groupe discret tel que  $c(G, S) > 0$ . Soit  $X$  un ensemble fini sur lequel  $G$  opère transitivement, et soit  $X_S$  le graphe de Cayley associé. Alors le gap  $g(X_S)$  est  $\geq c(G, S)$ . Ainsi à partir d'un groupe discret ayant la propriété  $(T_f)$ , on peut parfois construire des familles d'expansions de constante uniforme.

Citons aussi le :

**THÉORÈME 3.6.** [Zuk96] *Soit  $X$  un complexe simplicial fini de dimension 2, tel que chaque sommet et chaque arête soient contenus dans un triangle au moins, et tel que chaque link  $L_i$  soit connexe. Supposons que, pour chaque arête  $\{i, j\}$  de  $X$ , on ait*

$$\lambda_2(\Delta'_i) + \lambda_2(\Delta'_j) > 1 ,$$

où  $\Delta'_i$  est le laplacien harmonique de  $L_i$ . Alors le groupe de Poincaré  $\pi_1(X)$  a la propriété (T) de Kazhdan.

### 7. LA PROPRIÉTÉ $(T_f)$ POUR $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$

On commence par montrer  $(T_f)$ -relative pour la paire  $(\Gamma, H) = (SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$  en prouvant que l'exemple de Gabber-Galil est *universel*. En fait, on peut évaluer la constante  $c_f(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$  relativement à un système de générateurs.

Plus précisément, on a :

**THÉORÈME 3.7.** *Soit  $S$  un système symétrique de générateurs de  $SA_2(\mathbb{Z})$  formé de générateurs  $S_o$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  ( $S_o = \{t, t^{-1}, u, u^{-1}\}$  où  $t(x, y) = (x + y, y)$ ,  $u(x, y) = (x, y + x)$ ) et des translations unité  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ . Soit  $c(S) > 0$  la borne inférieure du gap pour les matrices d'adjacence des graphes de Gabber-Galil associées à  $S$ , alors*

$c(S)$  est la constante de Kazhdan pour la propriété  $(T_f)$ -relative associée à  $S$ .

On aura besoin de l'inégalité de Kato discrète :

THÉORÈME 3.8. (inégalité de Kato discrète) Soient  $G = (V, E)$  un graphe fini,

$$q_o(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i \in V} W_i x_i^2 ,$$

avec  $c_{i,j} > 0$ , et  $\lambda_1(q_o)$  la première valeur propre de l'opérateur associé à  $q_o$  sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^V$ .

Soient, pour chaque  $i \in V$ ,  $L_i$  un espace vectoriel hermitien de dimension  $N$  et pour chaque couple  $(i, j) \in \vec{E}$ ,  $\omega_{i,j}$  une isométrie  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $L_i$  sur  $L_j$ . On suppose que l'on a :  $\omega_{j,i} = \omega_{i,j}^{-1}$ . Soit  $Q_\omega$  la forme quadratique sur  $\oplus_i L_i$  définie par :

$$Q_\omega(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} \|\omega_{i,j} x_i - x_j\|^2 + \sum_{i \in V} W_i \|x_i\|^2 .$$

Soit  $\lambda_1(Q_\omega)$  la première valeur propre de l'opérateur associé à  $Q_\omega$ .

Alors  $\lambda_1(q_o) \leq \lambda_1(Q_\omega)$  et on a égalité si et seulement si le produit des  $\omega_{i,j}$  sur chaque cycle de  $G$ , appelé l'holonomie, est l'identité.

Preuve. –

Soit  $M_\omega$  l'opérateur autoadjoint associé à  $-Q_\omega$  :

$$M_\omega f(i) = \sum_{j \sim i} c_{i,j} \omega_{i,j} f(j) + \tilde{W}_i f(i) ,$$

avec  $\tilde{W}_i = -W_i - \sum_{j \sim i} c_{i,j}$ .

Si  $\varphi > 0$  est un vecteur de Perron-Frobenius pour l'opérateur associé à  $q_o$ , on a l'inégalité :

$$2\operatorname{Re} \langle \omega_{i,j} z_i | z_j \rangle \leq \frac{\varphi(j)}{\varphi(i)} \|z_i\|^2 + \frac{\varphi(i)}{\varphi(j)} \|z_j\|^2 ,$$

d'où l'on déduit, par sommation sur les arêtes orientées et en utilisant le fait que  $\varphi$  est un vecteur propre de  $q_o$  :

$$\langle M_\omega f | f \rangle \leq -\lambda_1(q_o) \|f\|^2 ,$$

ce qui prouve le résultat. □

Soient  $\pi_m$  les représentations naturelles de  $\Gamma = SA_2(\mathbb{Z})$  sur

$$l_o^2((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2)$$

introduites plus haut ( $l_o^2$  désigne les fonctions de somme nulle sur les sommets). Soit  $Z_m$  le tore discret (privé de l'origine) des caractères de l'action de  $\mathbb{Z}^2$  qui apparaissent. La matrice  $\Delta_m$  du graphe de Gabber-Galil (associé à ces générateurs) se transforme par Fourier en une matrice  $\hat{\Delta}_m$ . Soit  $G_m$  le graphe de Cayley de l'action de  $(SL_2(\mathbb{Z}), S_o)$  sur  $Z_m$ , privé de l'origine sur laquelle  $SL_2(\mathbb{Z})$  agit trivialement. Alors  $\hat{\Delta}_m$  est dans  $O_{G_m}$  et son  $\lambda_1$  est minoré par une constante  $c > 0$  indépendante de  $m$  (cf § 6) : la propriété (T) est indépendante du système de générateurs). La forme quadratique associée est :

$$q_m(x) = \sum_i \left( \sum_{\sigma \in S_o} |x_i - x_{\sigma(i)}|^2 + V_i x_i^2 \right),$$

où  $V_i = 2(|1 - \chi_i(1, 0)|^2 + |1 - \chi_i(0, 1)|^2)$  ( $\chi_i$  est le caractère correspondant au sommet  $i$ ).

Soit maintenant  $\pi : \Gamma \rightarrow U(\mathcal{H})$  une représentation unitaire irréductible de dimension finie de  $\Gamma$ , n'ayant pas de vecteurs  $H$ -invariants. Soit  $Z$  l'ensemble (fini) des caractères de  $H$  qui apparaissent.  $SL_2(\mathbb{Z})$  agit par permutation de  $Z$ . On en déduit que  $Z \subset Z_m$  pour un certain  $m$  (un caractère irrationnel a une orbite infinie sous  $SL_2(\mathbb{Z})$ ).

Soit, pour chaque  $\chi \in Z$ ,  $H_\chi$  le sous-espace de  $\mathcal{H}$  correspondant à ce caractère.

Alors la forme quadratique  $q_\pi(z) = \sum_{g \in S} \|\pi(g)z - z\|^2$  s'écrit en décomposant  $z = \sum_\chi z_\chi$  :

$$q_\pi(z) = \sum_\chi \left( \sum_{g \in S_o} \|\pi(g)z_\chi - z_\chi\|^2 + V_\chi \|z_\chi\|^2 \right).$$

On conclut par application de l'inégalité de Kato et en remarquant que  $Z$  est une composante connexe de  $Z_m$ .

### 8. LA PROPRIÉTÉ ( $T_f$ ) POUR $SL_3(\mathbb{Z})$

Soit  $(\Gamma_i, H_i)$  les 3 images des plongements évidents de  $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$  dans  $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$  qui fixent une des 3 coordonnées et  $S_i$  les sous-ensembles de  $\Gamma$  correspondants (copies de  $S_o$ ).  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  est une partie génératrice symétrique de  $\Gamma$ . Alors, on a :

**THÉORÈME 3.9.** *Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $\Gamma$  et  $x$  un vecteur unitaire tel que*

$$\forall i = 1, 2, 3, \sum_{g \in S_i} \|\pi(g)x - x\|^2 < \varepsilon = \frac{c}{2N^2},$$

*où  $c$  est la constante de Kazhdan pour la paire  $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$  associée à  $S$  et  $N$  un entier (indépendant de  $\pi$  et de  $x$ ) défini dans le lemme 1 qui*



suit, alors  $\pi$  admet un vecteur invariant non trivial. Donc  $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$  a la propriété  $(T_f)$  avec une estimation explicite de la constante.

On a besoin des :

LEMME 3.4. *Les sous-groupes  $H_i$  engendrent  $SL_3(\mathbb{Z})$  uniformément : il existe un  $N$  tel que tout élément de  $SL_3(\mathbb{Z})$  est un mot de longueur  $\leq N$  en des éléments des  $H_i$ .*

*Preuve.* –

Ce lemme est prouvé par des arguments d'arithmétique élémentaire dans [CK84] : on montre dans cet article que tout  $T \in SL_3(\mathbb{Z})$  est produit d'au plus 48 matrices élémentaires (ie matrice ayant les coefficients diagonaux égaux à 1 et un seul coefficient non diagonal non nul). Attention : aucune estimation sur la taille des entiers qui apparaissent n'est possible par cette méthode qui utilise le théorème de Dirichlet sur l'existence de nombres premiers dans toute progression arithmétique  $an + b, n \in \mathbb{N}$  si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

□

LEMME 3.5. *Soit  $\pi$  une représentation unitaire d'un groupe  $\Gamma$  et  $x$  un vecteur de norme 1 tel qu'il existe  $\varepsilon > 0$  vérifiant :*

$$\forall g \in \Gamma, \operatorname{Re} \langle \pi(g)x | x \rangle \geq \varepsilon ,$$

*alors  $\pi$  a un vecteur invariant non trivial.*

*Preuve.* –

Soit  $C$  l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de  $x$  sous  $\pi(\Gamma)$ . L'hypothèse implique que  $0 \notin C$ . Soit  $z$  la projection orthogonale de 0 sur  $C$  (le point qui réalise le minimum de la distance). Alors, il est clair que  $z$  est  $\Gamma$  invariant :  $C$  est  $\Gamma$  invariant et la projection est unique.

□

LEMME 3.6. *Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $SL_3(\mathbb{Z})$ ,  $x$  un vecteur unitaire vérifiant  $\sum_{g \in S_i} \|\pi(g)x - x\|^2 \leq \varepsilon$ , alors, si  $E_i$  est le sous-espace de  $\mathcal{H}_\pi$  des vecteurs invariants par  $\pi(H_i)$ , on a :*

$$d(x, E_i) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{c}} .$$

*Preuve.* –

On décompose  $\mathcal{H} = E_i \oplus F_i$  orthogonalement. Chacun des 2 espaces est invariant par  $\pi(H_i)$ . On applique la propriété  $T_f$  relative à l'action de  $\Gamma_i$  sur  $F_i$ .

□

Nous pouvons maintenant montrer que  $SL_3(\mathbb{Z})$  a la propriété  $(T_f)$ . Soit  $x$  comme dans le théorème. Alors

$$d(x, E_i) < \frac{1}{N\sqrt{2}}$$

d'après le lemme 3. Puis

$$\forall g \in \Gamma, \|\pi(g)x - x\| \leq \sum_{\alpha=1}^N \|\pi(g_\alpha)x - x\| ,$$

où les  $g_\alpha$  sont dans  $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ , d'après le lemme 1. Donc, comme  $\|\pi(g_\alpha)x - x\| \leq 2d(x, E_{i(\alpha)})$ , on a  $\|\pi(g)x - x\| \leq \sqrt{2} - \varepsilon'$  ( $\varepsilon' > 0$ ) et on conclut avec le lemme 2.

Il serait intéressant de gagner sur  $N$  qui détériore beaucoup la constante du théorème, par exemple en utilisant simultanément tous les plongements de  $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$  dans  $\Gamma$ .

## CHAPITRE 4

# LIMITES SINGULIÈRES ET $\Gamma$ -CONVERGENCE

Dans ce chapitre,  $X$  est un espace vectoriel réel de dimension finie ; on note  $X^*$  son dual qu'on identifie parfois à  $X$  au moyen d'une structure euclidienne.

A tout opérateur symétrique défini sur un sous-espace  $Y \subset X$ , on peut associer son graphe qui est un sous-espace lagrangien de  $X \oplus X^*$ . La correspondance ainsi définie est une bijection entre les opérateurs auto-adjoints avec domaine et les sous-espaces lagrangiens de  $X \oplus X^*$ .

On définit ainsi une topologie naturelle sur les opérateurs à domaine appelée topologie de la  $\Gamma$ -convergence (convergence des graphes).

On a ainsi un moyen de compactifier les ensembles d'opérateurs symétriques, en particulier ceux associés à un graphe  $G$  ( $L_G, O_G, M_G$ ).

Les limites singulières ainsi définies sont des opérateurs associés à des graphes appelés suivant les cas *mineurs* ou *mineurs faibles* de  $G$ . La structure différentiable de la grassmannienne lagrangienne nous permettra au chapitre suivant d'utiliser les outils de la transversalité.

Certaines compactifications utilisées en géométrie relèvent de variantes de la méthode que nous allons décrire : par exemple la compactification de l'espace de Teichmüller d'une surface au moyen des (classes d'isotopie de) feuilletages mesurés. Dans ce cas, l'espace  $X$  est l'espace des 1-formes différentielles sur la surface et il est facile d'associer à une métrique riemannienne aussi bien qu'à un feuilletage mesuré une forme quadratique positive sur  $X$ . La difficulté est de faire le quotient par les difféomorphismes isotopes à l'identité.

Il est intéressant de remarquer qu'en dimension infinie la théorie de Von Neumann [RS75a] des extensions auto-adjointes des opérateurs symétriques peut être reformulée entièrement en termes de géométrie symplectique en considérant uniquement les graphes des opérateurs, grâce au dictionnaire *symétrique*  $\leftrightarrow$  *isotrope*, *auto-adjoint*  $\leftrightarrow$  *lagrangien*. La seule différence est qu'on ne considère habituellement que des opérateurs à domaine dense dont les graphes ont une projection injective sur  $X$ .

## 1. ESPACES LAGRANGIENS ET OPÉRATEURS AUTO-ADJOINTS AVEC DOMAINES

Il s'agit ici d'adapter aux opérateurs en dimension finie la théorie dite de la  $\Gamma$ -convergence en calcul des variations [Dal93]. Le but de cette section est de mettre en place un cadre général pour les problèmes de limites singulières en théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et pour les problèmes de type Dirichlet. Comme applications simples, on décrira dans le §3 les dégénérescences de graphes connues sous le nom de mineurs et on obtiendra ainsi dans le chapitre 5 des démonstrations simples de la propriété de monotonie pour la relation de mineurs des invariants  $\mu_k^K(G)$  introduit dans [Col90] (voir aussi [Col93]).

**1.1. Espaces lagrangiens.** Dans la suite  $X$  est un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ . En fait tout s'étend au cas complexe et une partie à la dimension infinie. Dans les applications aux graphes,  $X$  sera  $\mathbb{R}^V$ .

On note  $Z = T^*(X) = X \oplus X^*$  le cotangent de  $X$ , muni de la structure symplectique canonique

$$\omega((x, \xi), (x', \xi')) = \xi(x') - \xi'(x) .$$

On désigne par  $\mathcal{L}_X$  (ou  $\mathcal{L}$  si aucune ambiguïté sur  $X$  n'existe) la grassmannienne des *sous-espaces lagrangiens* de  $Z$ . Rappelons qu'un sous-espace lagrangien de  $Z$  est un sous-espace maximal sur lequel  $\omega$  s'annule. Un tel espace est de dimension  $n$ .  $\mathcal{L}_X$  est une variété analytique réelle compacte de dimension  $n(n+1)/2$ , cf [Dui96].

Dans la suite, on identifie systématiquement, les formes quadratiques sur  $X$  et les applications linéaires symétriques de  $X$  dans son dual  $X^*$  ; on note cet espace  $\mathcal{Q}(X)$ . Si, à une application linéaire symétrique  $A$  de  $X$  dans  $X^*$ , on associe son graphe, on obtient une application injective  $j : \mathcal{Q}(X) \rightarrow \mathcal{L}_X$ . dont l'image dans  $\mathcal{L}_X$  est dense. On peut identifier l'espace tangent de  $\mathcal{L}$  en  $L_0$  à l'espace  $\mathcal{Q}(L_0)$  de la façon suivante :  $L_0$  admet un supplémentaire lagrangien  $L_1$  qui s'identifie par  $\omega$  au dual de  $L_0$ . Les lagrangiens proches de  $L_0$  sont donc des graphes d'applications linéaires symétriques de  $L_0$  dans  $L_1 = L_0^*$ . On obtient ainsi des cartes,  $\phi_i(L) = q_i \in \mathcal{Q}(L_0)$ , au voisinage de  $L_0$  associées aux choix de  $L_1$ .

**PROPOSITION 4.1.** (voir [Dui96]) *Les changements de cartes ont une différentielle égale à l'identité en 0. L'identification à  $\mathcal{Q}(L_0)$  de l'espace tangent à  $\mathcal{L}$  en  $L_0$  est donc canonique.*

*Preuve.*—

Soient  $Z = L_0 \oplus L_i$ ,  $i = 1, 2$  deux décompositions lagrangiennes de l'espace symplectique  $(Z, \omega)$ . Soit  $L$  un lagrangien proche de  $L_0$  qui est donc le graphe d'applications linéaires  $A_i : L_0 \rightarrow L_i$ . Soit  $T_i$  les triangles de sommets  $(0, x, x + A_i x)$ , on a :

$$\int_{T_i} \omega = \frac{1}{2} q_i(x) = \frac{1}{2} \langle A_i x | x \rangle .$$

Si  $x$  reste borné, on voit que la différence de ces intégrales est  $O(\|A_i\|^2)$  : par Stokes, c'est l'intégrale sur le triangle de sommets  $(x, x + A_1 x, x + A_2 x)$  de  $\omega$ .

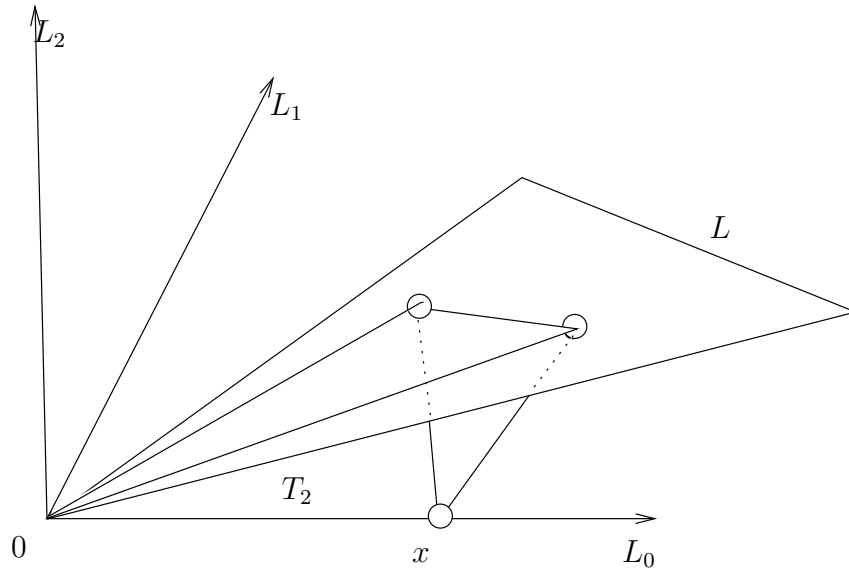


FIGURE 1. Espace tangent à la grassmannienne lagrangienne

□

### 1.2. Opérateurs non partout définis et espaces lagrangiens.

**DÉFINITION 4.1.** *Un opérateur auto-adjoint non borné sur  $X$  est la donnée d'un couple  $A = (Y, B)$  où  $Y \subset X$  et  $B : Y \rightarrow Y^*$  est un opérateur symétrique.*

A tout opérateur non borné  $A = (Y, B)$ , on associe le sous-espace lagrangien  $L_A$  de  $X \oplus X^*$ , appelé le graphe de  $A$ , défini par :

$$L_A = \{(y, \xi) | y \in Y \text{ et } \forall z \in Y, \langle \xi | z \rangle = \langle B y | z \rangle .$$

Réciproquement, si  $L$  est un sous-espace lagrangien de  $X \oplus X^*$ , on lui associe un unique opérateur non borné  $A = (Y, B)$  tel que  $L_A = L$ . Le domaine  $Y$  est la projection de  $L$  sur  $X$  et  $\forall y, z \in Y$ ,  $\langle By|z \rangle = \langle \xi|z \rangle$  où  $(y, \xi) \in L$ . Le fait que  $\langle \xi|z \rangle$  ne dépende pas du choix de  $(y, \xi) \in L$  provient du fait que  $L$  est lagrangienne : si  $(y, \xi)$  et  $(y, \xi')$  sont dans  $L$ ,

$$0 = \omega((y, \xi), (y, \xi')) = \xi(y) - \xi'(y) .$$

On obtient ainsi une bijection de  $\mathcal{L}_X$  avec l'ensemble des opérateurs non bornés sur  $X$  et par suite une compactification de  $Q(X)$  puisque  $\mathcal{L}$  est compacte. La topologie ainsi définie sur les formes quadratiques sera nommée topologie de la  $\Gamma$ -convergence. Si une famille d'opérateurs symétriques  $A_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge vers  $(Y, B)$ , on notera :

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) .$$

## 2. EXEMPLES DE $\Gamma$ -CONVERGENCE

L'existence de  $\Gamma$ -limites n'est pas exceptionnelle.

**PROPOSITION 4.2.** *Soient  $A_i : X \rightarrow X^*$  des applications linéaires symétriques. Soient  $\alpha_1 < \dots < \alpha_N$ , posons pour  $\varepsilon > 0$  :*

$$A_\varepsilon = \sum_{i=1}^N A_i \varepsilon^{\alpha_i} .$$

*Soit  $\mathcal{L}$  la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de dimension  $n$  de  $X \oplus X^*$  et  $C_\varepsilon \in \mathcal{L}$  le graphe de  $A_\varepsilon$ .*

*Alors l'application  $\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^+ \setminus 0$  dans  $\mathcal{L}$  se prolonge par continuité en  $\varepsilon = 0$ .*

*De plus, si les  $\alpha_i$  sont entiers, le prolongement est analytique réel.*

*Preuve.* –

Soit  $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$ , alors la résolvante

$$R_\varepsilon = (\lambda_0 I - A_\varepsilon)^{-1}$$

est majorée en norme par  $1/|\operatorname{Im} \lambda_0|$  et est une série asymptotique de la forme

$$R_\varepsilon = \sum B_j \varepsilon^{\rho_j} ,$$

avec les  $B_j$  non nuls (cela résulte de l'existence de formules explicites à base de déterminants pour l'inverse d'une matrice). Cela impose que les  $\rho_j$  sont  $\geq 0$ .

□

La  $\Gamma$ -convergence étant assurée dans de nombreux cas d'intérêt pratique, on cherchera à caractériser une  $\Gamma$ -limite  $(Y, B)$  en décrivant le domaine  $Y$  et les coefficients de la matrice  $B$ .

**Dans toute la suite, les opérateurs symétriques sont toujours supposés positifs.**

DÉFINITION 4.2. On note  $x_\varepsilon \xrightarrow{s} x_0$  si  $x_\varepsilon$  converge vers  $x_0$  avec  $\langle A_\varepsilon x_\varepsilon | x_\varepsilon \rangle = O(1)$ .

LEMME 4.1. Soit  $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$ ,  $x_0 \in Y$ . Un point  $x_0 \in X$  appartient à  $Y$  si et seulement s'il existe  $x_\varepsilon$  tel que  $x_\varepsilon \xrightarrow{s} x_0$ .

*Preuve.* –

Munissons  $X$  d'une structure euclidienne qui identifie  $X$  à  $X^*$ . Soit  $X = Y_\varepsilon \oplus \mathcal{L}_\varepsilon$  la décomposition de  $X$  en somme d'espaces propres correspondants aux valeurs propres d'ordre  $O(1)$  et l'orthogonal. On a :  $x_\varepsilon = y_\varepsilon + z_\varepsilon$ . On voit que  $z_\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\|A_\varepsilon y_\varepsilon\| = O(\langle A_\varepsilon x_\varepsilon | x_\varepsilon \rangle) = O(1)$ . Un argument de suite extraite finit la preuve.

□

LEMME 4.2. Soit  $Y_\varepsilon$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $X$  tel que  $Y_\varepsilon$  tend vers  $Y$  et que, pour  $\varepsilon \neq 0$ , la norme de la restriction de  $A_\varepsilon$  à  $Y_\varepsilon$  est bornée.

Soit  $\phi_\varepsilon$  un isomorphisme de  $Y$  dans  $Y_\varepsilon$  tel que pour tout  $y \in Y$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\phi_\varepsilon(y)$  tend vers  $y$  et

$$Q_\varepsilon(y) = \langle A_\varepsilon \phi_\varepsilon(y) | \phi_\varepsilon(y) \rangle .$$

Alors  $Q_\varepsilon$  admet une limite  $Q_0$  comme forme quadratique sur  $Y$  et si  $B$  est l'opérateur associé, on a :

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) .$$

*Preuve.* –

*1er cas :*

on suppose que  $Y_\varepsilon$  est indépendant de  $\varepsilon$  et donc égal à  $Y$ . On décompose  $X$  en  $X = Y \oplus Z$  (somme orthogonale) et on écrit alors  $A_\varepsilon$  matriciellement relativement à la décomposition précédente :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} K_\varepsilon & C_\varepsilon \\ C_\varepsilon^t & D_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Il résulte des hypothèses et du minimax que  $D^{-1} = o(1)$  et que  $K_\varepsilon$  et  $C_\varepsilon$  sont uniformément bornés.

On peut écrire le graphe de  $A_\varepsilon$  sous la forme :

$$\begin{aligned} z &= D_\varepsilon^{-1}(z' - C_\varepsilon^t y) \\ x' &= K_\varepsilon y + C_\varepsilon z . \end{aligned}$$

L'existence de la limite au sens de la  $\Gamma$ -convergence montre que  $K_\varepsilon$  a une limite  $K_0$  et que la limite des graphes est  $z = 0$ ,  $y' = K_0 y$  qui est bien la conclusion du théorème dans ce cas.

*2ème cas :*

soit  $U_\varepsilon$  une famille continue d'isométries de  $X$  telle que  $U_0 = Id$  et  $U_\varepsilon(Y) = Y_\varepsilon$ . On pose  $\tilde{A}_\varepsilon = U_\varepsilon^t A_\varepsilon U_\varepsilon$ , ce qui nous ramène au 1er cas. Alors la limite au sens des graphes de  $\tilde{A}_\varepsilon$  est la même que celle de  $A_\varepsilon$ . On obtient comme forme quadratique limite la limite sur  $Y$  de

$$q_\varepsilon(y) = \langle A_\varepsilon U_\varepsilon y | U_\varepsilon y \rangle$$

qui est la même qu'en remplaçant dans la formule précédente  $U_\varepsilon y$  par des  $y_\varepsilon$  qui vérifient  $\|U_\varepsilon y - y_\varepsilon\| = o(1)$  alors que  $A_\varepsilon$  est uniformément borné.

□

Remarquons que l'hypothèse que la norme de la restriction de  $A_\varepsilon$  est bornée entraîne que  $\phi_\varepsilon(y) \xrightarrow{s} y$ . Une version pratique de ce lemme est la suivante : soit  $(y_i)$  une base de  $Y$  et  $y_{i,\varepsilon}$  convergents vers  $y_i$  avec  $A_\varepsilon y_{i,\varepsilon} = O(1)$ , alors la matrice de  $b_{i,j} = \langle B y_i | y_j \rangle$  de  $B$  est donnée par :

$$b_{i,j} = \lim \langle A_\varepsilon y_{i,\varepsilon} | y_{j,\varepsilon} \rangle .$$

*Attention :* il ne faut pas prendre pour définition de  $q_\varepsilon$

$$q_\varepsilon(y) = \langle A_\varepsilon y | y \rangle ,$$

qui pourrait ne pas avoir de limite ou une limite incorrecte !

**EXEMPLE 2.1. : contraction d'une arête.** Soit  $\langle A_\varepsilon x | x \rangle = Q(x) + \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x_2)^2$ . Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$  où  $Y = \{x_1 = x_2\}$  et  $q_B$  est la restriction de  $Q$  à  $Y$ .

Cet exemple permet de traiter la contraction d'une arête comme le cas où l'on ôte une arête.

**EXEMPLE 2.2. : transformations étoile-triangle.**

Voir [BC95] pour ce qui suit.



Plaçons-nous sur  $H = \mathbb{R}^4$ , avec la forme quadratique

$$Q_\varepsilon(x) = \langle A_\varepsilon x | x \rangle = \sum_{i=1}^3 \left(x_i - \frac{x_0}{\varepsilon}\right)^2.$$

Prenons  $p = 3$  et  $Y_\varepsilon = \{y_0 = (\varepsilon/3)(y_1 + y_2 + y_3)\}$ . Alors  $Q_0(y) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (y_i - y_{i+1})^2$  et non  $\sum_{i=1}^3 y_i^2$ .

On dit que  $G'$  s'obtient de  $G$  par une transformation *étoile-triangle* si on remplace un sommet 0 de degré 3 de  $G$  et les arêtes  $\{0, i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , qui s'y accrochent par le triangle  $(1, 2, 3)$ .

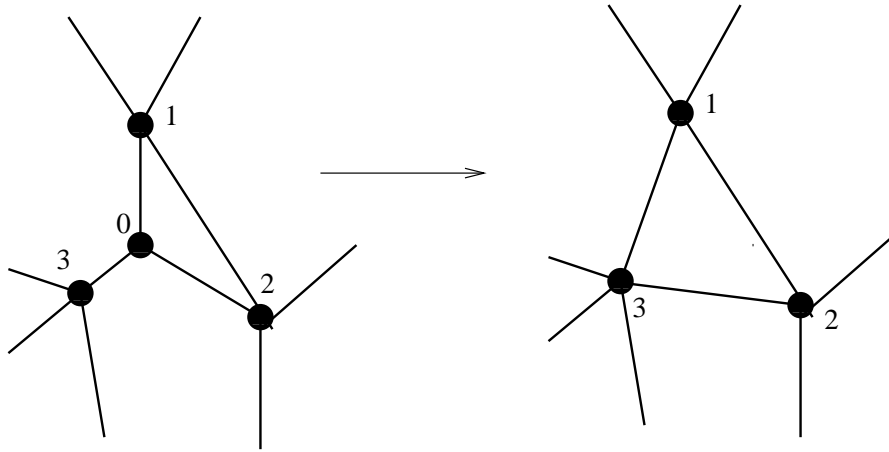


FIGURE 2. Transformation étoile-triangle

$O_{G'}$  est alors une strate de l'adhérence de  $O_G$  dans  $\Lambda_{H_G}$ .

**EXEMPLE 2.3. : recuit simulé.**

*Une présentation détaillée de cet exemple est donnée dans [CPY97].*

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe fini et  $H : V \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction (énergie). On suppose  $V_0 \neq \emptyset$ . On suppose aussi que, si  $\{i, j\} \in E$ ,  $|H(i) - H(j)| \leq 1$ .

Soit  $T > 0$  et  $\varepsilon = e^{-\frac{1}{2T}}$ . On considère la mesure de probabilité de Gibbs  $\pi_T$  sur  $V$ , à température  $T$  donnée par  $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H(i)}{T}}$ . Lorsque  $T \rightarrow 0^+$  cette mesure de probabilité converge vers la probabilité uniforme sur l'ensemble  $V_0$  des minimas absolus de  $H$ .

On peut donc espérer trouver ces minimas en simulant un processus de Markov ayant  $\pi_T$  comme mesure d'équilibre et en faisant tendre  $T$  vers 0 à une vitesse judicieusement choisie : c'est le principe de base de l'algorithme dit de *recuit simulé*.

On définit le processus de Markov par un opérateur  $\Lambda_T$  défini par

$$(\Lambda_T x)_i = \sum_{j \sim i} \lambda_{i,j} (x_i - x_j) ,$$

avec  $\lambda_{i,j} = 0$  si  $\{i, j\} \notin E$  et :

$$(5) \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } H(j) \geq H(i) ; \\ e^{-\frac{H(j)-H(i)}{T}}, & \text{si } H(j) > H(i) . \end{cases}$$

L'opérateur  $\Lambda_T$  est symétrique sur  $l^2(V, \pi_T)$ . Posant  $y_i = \sqrt{p_i} x_i$ , on obtient un opérateur de  $O_G$  noté  $A_\varepsilon$ , unitairement équivalent à  $\Lambda_T$ , associé à la forme quadratique

$$Q_\varepsilon(x) = \sum_{\{i,j\} \in E, H(i) < H(j)} (\varepsilon^{H(j)-H(i)} x_i - x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in E, H(i) = H(j)} (x_i - x_j)^2 .$$

On note

$$\lambda_1(\varepsilon) = 0 < \lambda_2(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_n(\varepsilon) ,$$

les valeurs propres de  $\Lambda_\varepsilon$  (et donc de  $A_\varepsilon$ ).

On souhaite donner une description précise du comportement asymptotique des  $\lambda_i(\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, et en particulier du gap  $g(\varepsilon) = \lambda_2(\varepsilon)$ .

On a une filtration

$$\dots \subset \mathcal{H}_l \subset \dots \subset \mathcal{H}_0 = \mathbb{R}^V$$

où  $\mathcal{H}_l$  est l'espace engendré par les fonctions propres de valeurs propres  $O(\varepsilon^{2l})$ .

Le but est de décrire cette filtration et l'asymptotique des valeurs propres associées. L'existence de la filtration résulte de Kato et du fait que  $Q_\varepsilon \geq 0$  est isospectral à  $Q_{-\varepsilon}$ : en effet si  $U : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$  est l'opérateur unitaire qui consiste à changer  $x_i$  en  $-x_i$  lorsque  $H(i)$  est impair, on a:  $Q_\varepsilon(Ux) = Q_{-\varepsilon}(x)$ .

$\varepsilon^{-2l} Q_\varepsilon$  admet une  $\Gamma$ -limite  $R_l = (\mathcal{H}_l, S_l)$  qui s'identifie à un élément de  $O_{G_l}$  que l'on va décrire.

Décrivons maintenant les graphes  $G_l$  et les espaces  $\mathcal{H}_l$  (les domaines) par récurrence sur  $l$  :

(i)  $G_1 = (V_1, E_1)$  est ainsi défini:  $i \in V$  sera dit minimum local de  $H$  s'il existe  $A \subset V$  connexe,  $i \in A$  tel que  $H$  est constante sur  $A$  et vaut  $H(i) + 1$  sur les voisins d'un sommet de  $A$  qui ne sont pas dans  $A$ . L'ensemble des ces parties connexes  $A$  est l'ensemble  $V_1$ . Si  $\alpha \in V_1$ , on note  $A_\alpha \subset V$  la composante connexe du minimum local correspondante: les  $A$  s'appelle puits d'ordre 1.

$\mathcal{H}_1$  est l'espace des fonctions constantes sur les  $A \in V_1$  et nulles ailleurs. Sa dimension est bien sûr  $\#V_1$ .

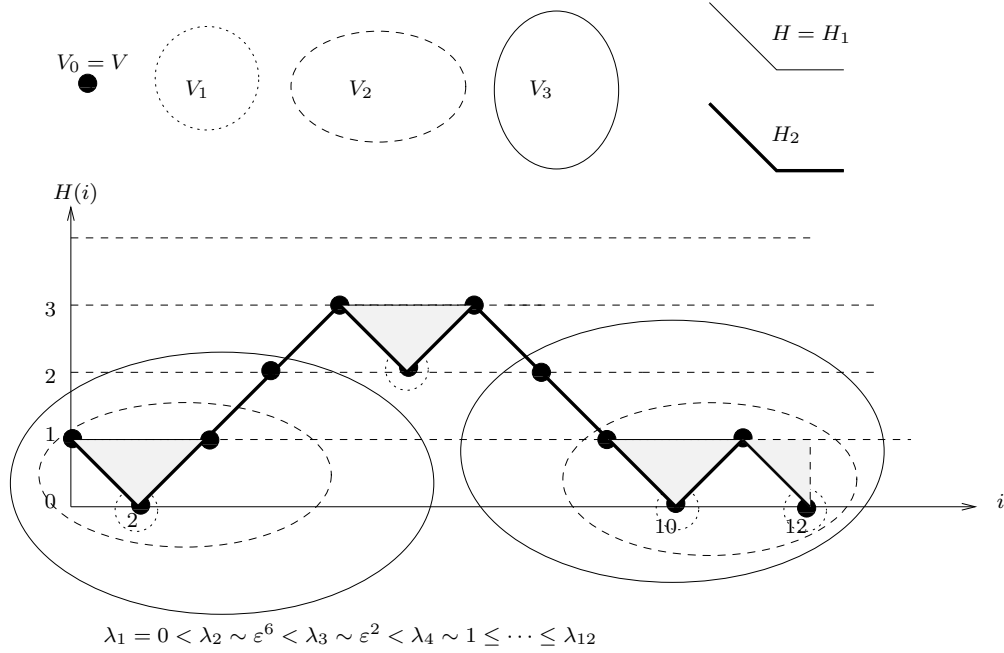


FIGURE 3. les graphes  $G_l$

(ii) On remplace alors  $H = H_1$  par  $H + 1$  sur chacune de ces parties de  $V_1$ , on obtient une énergie  $H_2$  et on construit ainsi un ensemble de parties  $V_2$  en considérant de même les minima locaux de  $H_2$ ; les sommets d'une composante d'un minima de  $H_2$  s'appellent puits d'ordre 2; 2 éléments  $A, B$  de  $V_1$  (éventuellement confondues) sont connectés par une arête de  $G_1$  s'ils sont contenus dans un même puits  $C$  de  $V_2$ : le graphe  $G_l$  est donc un graphe avec des boucles.

Et on itère la construction :

(ii) on remplace  $H_2$  par  $H_2 + 1$  sur les ensembles de  $V_2$ , etc...

Soit  $Q_l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2l} Q_\varepsilon$ , alors  $Q_l$  s'identifie naturellement à un opérateur de type Schrödinger sur  $G_l$  avec un potentiel  $\geq 0$  nul seulement aux sommets qui ont des boucles.

De ceci, on peut calculer le nombre de valeurs propres qui sont  $O(\varepsilon^{2l})$  qui est donné par le nombre de sommets de  $G_l$ , ie le nombre de puits d'ordre  $l$ .

En fait les formes  $Q_l$  sont déterminées entièrement en restreignant  $Q_\varepsilon$  à un sous-graphe de  $G$ : celui formé des sommets des  $A \in V_l$  et des sommets inondés si on augmente  $H_l$  de  $\eta$ ,  $\eta > 0$  petit sur les  $A \in V_l$ .

Tout ceci détermine l'ordre de grandeur du gap :

$$g(\epsilon) = C\epsilon^{2k}(1 + O(\epsilon^2)) ,$$

où  $k$  est la *hauteur du col le plus haut* ; un col est un chemin  $\gamma$  entre 2 minimas locaux  $a$  et  $b$  dont l'altitude maximale  $h = \sup_{x \in \gamma} H(x)$  est minimale parmi tous les chemins qui joignent ces 2 minimas. La hauteur de ce col est

$$H(a, b) = \inf(h - H(a), h - H(b)) .$$

$k$  est aussi le sup des  $l$  tels qu'il existe au moins 2 puits d'ordre  $l$  ( $= 0$  s'il n'existe qu'un minimum local).

*Cette description n'est pas nouvelle. On la déduit classiquement de la théorie de Freidlin et Wentzell ([FW84]).*

**EXEMPLE 2.4. : limites croissantes.**

Dans le cas particulier d'une suite croissante de formes quadratiques positives, la notion de  $\Gamma$ -limite se ramène à celle de limite simple.

**PROPOSITION 4.3.** *Soit  $A_n$  une suite croissante de formes quadratiques positives définies sur  $X$  et  $q_n(x) = \langle A_n x | x \rangle$  la suite croissante des formes quadratiques associées. Soit*

$$q_\infty : X \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$$

la limite simple des  $q_n$ , et

$$Y = \{x \in X \mid q_\infty(x) < \infty\} .$$

Soit  $(Y, B)$  la forme quadratique avec domaine associée (si  $y \in Y$ ,  $q_\infty(y) = \langle y | B | y \rangle$ ). Alors

$$A_n \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) .$$

La démonstration de la proposition 4.3 passe par les deux lemmes suivants.

**LEMME 4.3.** *Soit  $(Y, B)$  une forme quadratique avec domaine, alors  $(x_0, z_0) \in \Gamma(Y, B)$  si et seulement si  $x_0$  est un point critique de l'application  $F_{z_0}$  définie sur  $Y$  par*

$$F_{z_0}(y) = \langle B y | y \rangle - 2 \langle z_0 | y \rangle .$$

Ce lemme est évident ; en particulier, si  $K$  est un compact de  $X$  et  $B$  est positive, un point  $x_0$  de l'intérieur de  $K$  est un point de minimum de  $F_{z_0}$  si et seulement si  $(x_0, z_0) \in \Gamma(Y, B)$ .

LEMME 4.4. Soit  $K$  un compact et  $f_n$  une suite de fonctions semi-continues inférieurement (sci) définies sur  $K$  et à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , telles que  $f_n$  converge simplement vers une fonction  $f_\infty$  et qu'il existe des fonctions sci sur  $K$ ,  $g_n \leq f_n$  telles que la suite  $g_n$  soit croissante et ait même limite simple que la suite  $f_n$ . Alors si  $m_n$  (resp.  $m_\infty$ ) =  $\inf_{x \in K} f_n(x)$  (resp.  $\inf_{x \in K} f_\infty(x)$ ),  $m_\infty = \lim m_n$  et, si  $f_n(x_n) = m_n$  et  $x_n$  tend vers  $a$ , alors  $f_\infty(a) = m_\infty$ .

*Preuve.* –

(du lemme 4.4)

1)  $f_\infty$  est sci comme limite croissante de fonctions sci et donc il existe  $x_\infty \in K$  tel que  $f_\infty(x_\infty) = m_\infty$ . On a évidemment  $\limsup m_n \leq m_\infty$ . Supposons donc que  $\liminf m_n = m_\infty - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ; Soit

$$K_n = \left\{ x \in K \mid g_n(x) \leq m_\infty - \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Il est clair que la suite des compacts  $K_n$  est décroissante et d'intersection vide. Donc, il existe  $K_{n_0} = \emptyset$  et donc  $g_n(x) > m_\infty - \frac{\alpha}{2}$  pour  $n \geq n_0$  et  $x \in K$ . On a ainsi une contradiction car  $f_n \geq g_n$ .

2.a) Si  $f_n(x_n) = m_n$  et  $x_n \rightarrow a$ , alors  $m_n = f_n(x_n) \leq f_n(a)$  et en prenant les limites des 2 membres :

$$m_\infty \leq f_\infty(a).$$

2.b) Supposons donc  $f_\infty(a) = m_\infty + \beta$  avec  $\beta > 0$ . Soit  $U$  un voisinage compact de  $a$  où  $f_\infty \geq m_\infty + \frac{\beta}{2}$ . On applique le 1) aux restrictions à  $U$ . On a donc, pour  $n$  assez grand,  $\inf_U f_n = m_n$  et  $\inf_U f_\infty \geq m_\infty + \frac{\beta}{2}$ . D'où contradiction.

□

*Preuve.* –

(du théorème 4.3).

On suppose donc que  $q_\infty$  associée à  $(B, Y)$  est la limite simple des  $q_n$ . Soit  $(x_n, z_n) \in \Gamma(A_n)$  et supposons que  $(x_n, z_n)$  tend vers  $(a, b)$ . Il suffit de montrer que  $(a, b) \in \Gamma(Y, B)$ . Pour cela, on applique le lemme 4.4 à la suite  $q_n - 2 < z_n < q_n + 2$ , restreinte à un compact  $K$  de  $X$  contenant  $a$  comme point intérieur. On conclut alors par le lemme 4.3.

□

Une reformulation de ce qui précède en termes de cône simpliciaux est la suivante : si  $Q(X)^+$  est le cône de  $Q(X)$  formé des formes quadratiques  $\geq 0$  sur  $X$ , on introduit la :

**DÉFINITION 4.3.** *Un cône  $C$  de  $Q(X)^+$  sera dit simplicial s'il existe des formes quadratiques  $q_1, \dots, q_m$  de  $Q(X)^+$  linéairement indépendantes et telles que  $C$  soit l'ensemble des  $\sum_i t_i q_i$  où les  $t_i$  sont  $\geq 0$ .*

On a le

**THÉORÈME 4.1.** *Si  $C$  est un cône simplicial de  $Q(X)^+$ , sur l'adhérence  $\bar{C}$  de  $C$  dans  $\mathcal{L}_X$ , la topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie lagrangienne. De plus, l'application  $\psi : [0, +\infty[^m \rightarrow \mathcal{L}_X$  qui à  $t = (t_i)$  associe la forme  $\sum_i t_i q_i$  se prolonge naturellement et continûment en une application  $\Psi : [0, +\infty]^m \rightarrow \mathcal{L}_X$ ;  $\Psi$  n'est pas injective en général.*

*Preuve.* –

(du théorème 4.1)

1) Construction de  $\Psi$  :

soit  $t_i \in J$ , il est facile de définir la forme quadratique avec domaine  $\sum t_i q_i$  en prenant comme domaine les points de  $X$  où cette somme est finie. Cela définit l'application  $\Psi$ .

2) Continuité de  $\Psi$  pour les 2 topologies :

il est évident que  $\Psi$  est continue si on munit  $\mathcal{L}_+$  de la topologie de la convergence simple.

Pour la topologie lagrangienne, cela résulte des 2 lemmes. En effet, si  $t_n$  tend vers  $t_0$  dans  $J^m$  muni de la topologie produit et  $\rho_n = \Psi(t_n)$ , soit  $(x_n, \xi_n) \in \Lambda_n (= \Lambda_{\rho_n})$  convergent vers  $(x_0, \xi_0)$ . Alors, on peut appliquer le lemme 2 avec  $K$  un voisinage compact de  $x_0$ ,  $f_n = \rho_n - 2\xi_n$  et  $g_n = \Psi(\inf_{k \geq n} t_k) - 2\xi_0 - \varepsilon_n$ , où  $\varepsilon_n$  tend vers 0 en décroissant et  $\|\xi_n - \xi_0\|_{L^\infty(K)} \leq \varepsilon_n$ . On déduit alors du lemme 1 que  $(x_0, \xi_0) \in \Lambda_{\Psi(t_0)}$ .

3) Conclusion :

il est facile de conclure de ce qui précède que les 2 topologies sur  $\bar{C}$  coïncident.

□

### 3. $\Gamma$ -CONVERGENCE ET MINEURS

#### 3.1. Mineurs.

DÉFINITION 4.4. On dira que  $G'$  est un mineur de  $G$  (et on note  $G' < G$ ) si on peut passer de  $G$  à  $G'$  en effectuant les opérations élémentaires suivantes :

(R) qui consiste à ôter une arête.

(C) qui consiste à contracter une arête et identifier ses 2 extrémités à un seul sommet.

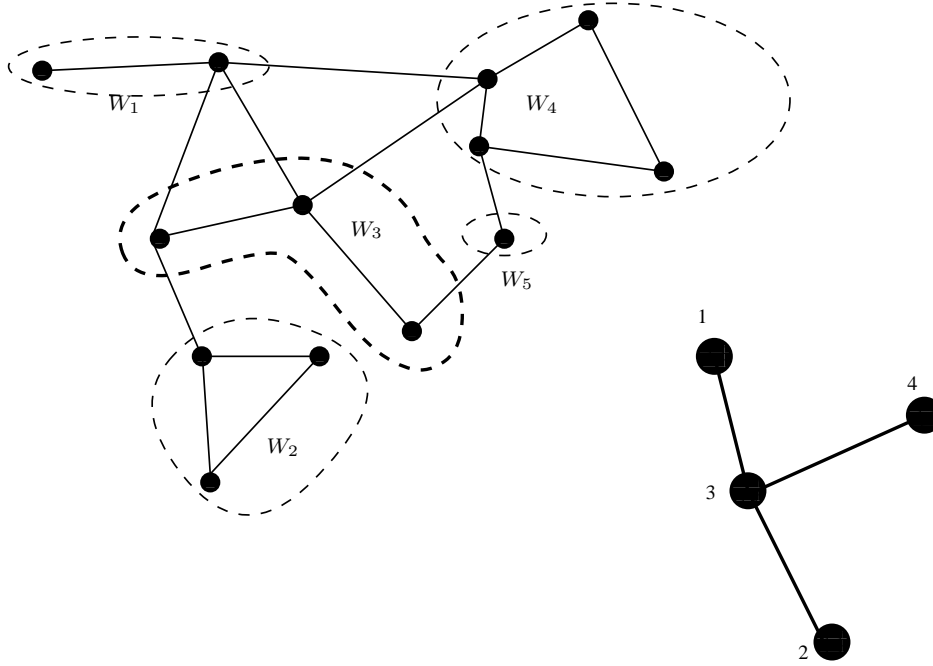


FIGURE 4. Mineurs

On peut le voir de façon plus globale :

Soient  $(V_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$  des sous-ensembles  $G$ -connexes disjoints de  $V$ .  $V' = A$  est l'ensemble des sommets de  $G'$ , alors que  $E'$  doit satisfaire :

$$(\{\alpha, \beta\} \in E') \Rightarrow (\exists i \in V_\alpha, j \in V_\beta, \{i, j\} \in E) .$$

Si on étudie une propriété (P) des graphes qui est stable par mineur (par exemple le plongement dans une surface), c'est un théorème difficile de théorie des graphes, prouvé par Robertson-Seymour dans une longue série de papiers [RS84] que la propriété admet une caractérisation par *mineurs exclus* : il existe une liste *finie* de graphes telle que la propriété (P) soit équivalente à n'avoir aucun de ces graphes comme mineur.

L'exemple le plus simple est la caractérisation des arbres par exclusion du cycle à 3 sommets. Un autre exemple classique plus difficile est

le théorème de Kuratowski qui caractérise la planarité par l'exclusion de  $K_5$  et de  $K_{3,3}$ .

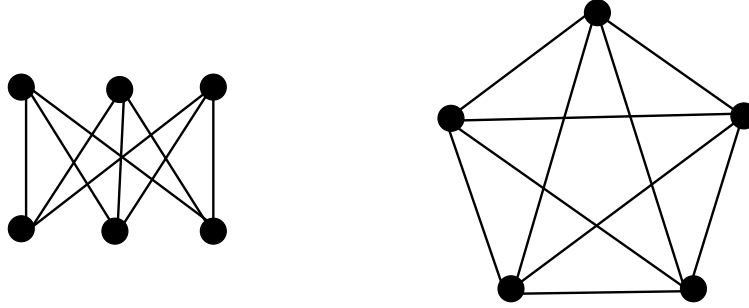


FIGURE 5.  $K_5$  et  $K_{3,3}$

Une autre notion sera utile, celle de *mineur faible* :

DÉFINITION 4.5. On dira que  $G'' = (V'' = \{1, \dots, p\}, E'')$  est un mineur faible de  $G = (V, E)$  (et on note  $G'' \ll G$ ) s'il existe une partition  $V = W \cup V_1 \cup \dots \cup V_p$  telle que les  $V_i$  soient connexes et que,  $\forall \{i, j\} \in E''$ , il existe un chemin  $\gamma_{i,j}$  dans  $G$  de  $V_i$  à  $V_j$  qui ne rencontre aucun  $V_k$  avec  $k \neq i, j$ .

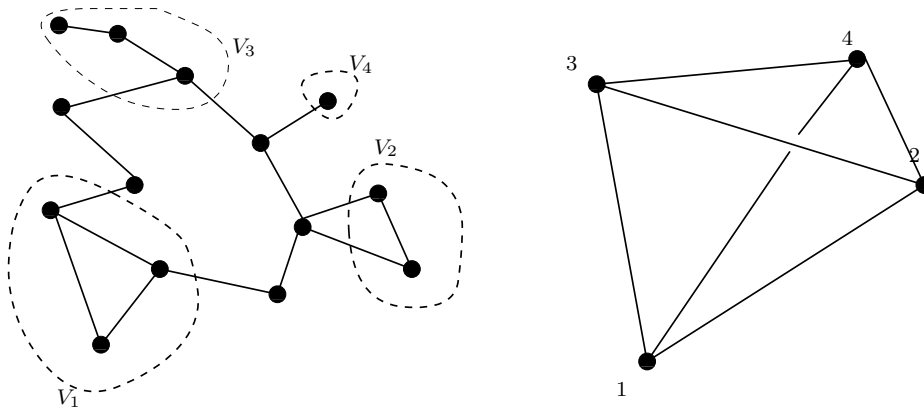


FIGURE 6. Mineurs faibles

**3.2. Compactification de  $L_G$ .** Nous allons montrer que, si la compactification de  $L_G$  se décrit complètement en termes de mineurs, il n'en est pas de même de celle de  $O_G$  qui fait intervenir d'autres opérations de dégénérescences de graphes, en particulier les transformations *étoile-clique*, et la notion de mineur faible.



Rappelons qu'on désigne par  $L_G$  l'ensemble des *Laplaciens* sur  $G$  c'est à dire des  $A \in O_G$  tels que  $A(1) = 0$ . La forme quadratique associée à un tel  $A$  peut s'écrire :

$$q_A(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 ,$$

où les  $c_{i,j}$  sont  $> 0$ .

Soit  $G$  un graphe fini dont  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. On peut penser  $G$  comme un réseau électrique.

L'ensemble des conductances est  $I^E$  et on associe à un élément  $\rho = (c_{i,j})$  de  $I^E$  une forme quadratique  $q_c = \psi_G(c)$  sur  $X = \mathbb{R}^V$  par la formule :

$$q_c(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 .$$

Comme plus haut, on identifie l'ensemble des  $q_c$  à  $L_G$ . On désigne par  $S_G$  l'adhérence dans  $\mathcal{L}_X$  de l'ensemble  $L_G$ .

Alors on va montrer qu'on peut identifier cette compactification de  $L_G$  à la réunion des  $L_{G'}$  où  $G'$  parcourt l'ensemble des mineurs de  $G$ . De plus ceci définit une bonne stratification de  $S_G$ .

Soit maintenant  $A \in L_{G'}$  où  $G'$  est un mineur de  $G$ , on lui associe un opérateur à domaine  $j(A) = (Y_{G'}, B)$  et donc une variété lagrangienne :

Soit  $(V_\alpha)_{\alpha \in V'}$  les sous-ensembles connexes de  $V$  qui s'identifient aux sommets de  $G'$ .  $Y_{G'}$  est l'espace des  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tels que  $\forall \alpha \in V', \forall j, k \in V_\alpha, x_j = x_k$ . Soit  $e_\alpha$  la base orthonormée de  $Y_{G'}$  formée de fonctions  $e_\alpha = c_\alpha \chi_{V_\alpha}$  avec  $c_\alpha > 0$ . Soit  $J : \mathbb{R}^{V'} \rightarrow Y_{G'}$  donnée par  $J((x_\alpha)) = \sum x_\alpha e_\alpha$ .  $B$  est alors donné par :

$$B = J \circ A \circ J^{-1} .$$

Il est clair que l'application  $j : L_{G'} \rightarrow \mathcal{L}_V$  ainsi définie est un plongement dont l'image est une sous-variété  $Z_{G'}$  de  $\mathcal{L}$ . Ces variétés sont 2 à 2 disjointes : en effet le domaine de la forme quadratique définit  $G'$ .

On identifiera donc  $L_{G'}$  et  $Z_{G'}$ .

Nous allons prouver que les  $Z_{G'}$  forment une stratification de  $S_G$ .

**THÉORÈME 4.2.**  *$S_G$  est la réunion disjointe des  $L_{G'}$  où  $G'$  décrit les mineurs de  $G$ .  $L_{G''}$  est contenu dans l'adhérence de  $L_{G'}$  si et seulement si  $G''$  est un mineur de  $G'$ . Cette stratification satisfait la condition (a) de Whitney : si  $\Lambda_n \in L_{G'}$  converge vers  $\Lambda_0 \in L_{G''}$  et  $V \in T_{\Lambda_0}(L_{G''})$ , il existe  $V_n \in T_{\Lambda_n}(L_{G'})$  tels que  $V_n$  tend vers  $V$ . De plus, sur  $S_G$ , la topologie de la convergence simple et la topologie lagrangienne coïncident .*

*Preuve.* –

Soit  $J = [0, +\infty]$ . Le cône  $L_G$  est simplicial. Soit  $(c_{i,j}) \in J^E$ , on lui associe le mineur  $G'$  de  $G$  obtenu en contractant les arêtes  $\{i, j\}$  où  $c_{i,j} = \infty$  et en effaçant celles où  $c_{i,j} = 0$ . L'application  $\Psi$  du théorème 4.1 peut ainsi se lire comme un passage d'une définition des mineurs par contractions et éliminations d'arêtes à la définition globale qu'on vient de donner. On en déduit facilement la première partie du théorème.

Il reste à prouver la condition (a) de Whitney.

Elle résulte de la construction suivante. : si  $G'$  est un mineur de  $G$ , on va exhiber des sous-variété  $Z_\varepsilon$  de  $L_G$  qui convergent, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  au sens  $C^\infty$  vers  $L_{G'}$ .

Faisons-le dans le cas de la contraction de l'arête  $\{1, 2\}$ .

Notons 0 le sommet obtenu par contraction de l'arête  $\{1, 2\}$ ,  $B$  les sommets de  $G$  liés à 1 et pas à 2,  $C$  les sommets liés à 2 et pas à 1 et  $D$  les sommets voisins de 1 et de 2.

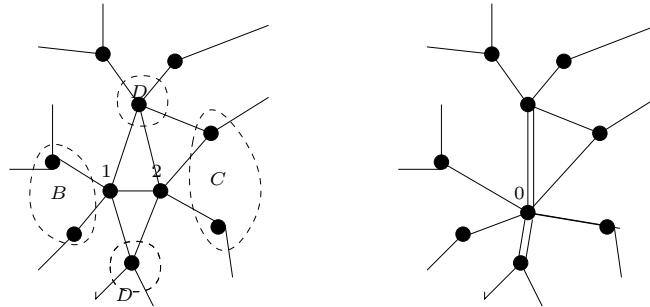


FIGURE 7. Contraction de l'arête  $\{1, 2\}$

Soit  $q(x_0, x_3, \dots, x_N)$  une forme quadratique de  $L_{G'}$ , nous allons lui associer une famille  $q_\varepsilon$ , ( $\varepsilon > 0$ ) de formes quadratiques de  $L_G$ .

Ecrivons

$$q(x_0, x_3, \dots, x_N) = \sum_{j \sim 0} c_{0,j} (x_j - x_0)^2 + r(x_3, \dots, x_N) .$$

On pose:

$$q_\varepsilon(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\varepsilon} (x_1 - x_2)^2 + \sum_{j \in B} c_{0,j} (x_1 - x_j)^2 + \sum_{j \in C} c_{0,j} (x_2 - x_j)^2$$

$$+ \sum_{j \in D} \frac{c_{0,j}}{2} ((x_1 - x_j)^2 + (x_2 - x_j)^2) + r(x_3, \dots, x_N),$$

de façon que  $q_\varepsilon$  soit égale à  $q(x_1, x_3, \dots, x_N)$  en restriction à  $x_1 = x_2$  et que  $q_\varepsilon \in L_G$ .

Identifions maintenant  $L_{G'}$  à une sous-variété  $j(L_{G'})$  de  $\mathcal{L}_V$  (comme plus haut) en considérant les éléments de  $L_{G'}$  comme des formes quadratiques définies sur le sous-espace  $x_1 = x_2 (= x_0)$  de  $\mathbb{R}^V$ .

□

#### 4. COMPACTIFICATION DE $O_G$

**THÉORÈME 4.3.** *Soit  $A_\varepsilon \in O_G$ . Supposons que  $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$  avec  $p = \dim Y$ .*

*Alors il existe un mineur faible  $G' = (V', E')$  de  $G$  et une isométrie  $J : \mathbb{R}^{V'} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^V$  tels que  $JB J^{-1}$  soit dans  $O_{G'}$ .*

*Plus précisément,  $J$  est ainsi construite :  
il existe une partition (définie par  $A_\varepsilon$ )*

$$V = W_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_p,$$

*où les  $V_i$ ,  $i \geq 1$  sont connexes, telle que si  $F_i = \{\varphi \in Y \text{ t.q. } \text{Supp}(\varphi) \subset V_i\}$ , les  $F_i$ ,  $i \geq 1$  sont de dimension 1 et  $Y = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .*

*Chaque  $F_i$  est engendré par une unique fonction  $\varphi_i \geq 0$  de norme*

*1. Ces  $\varphi_i$  forment donc une base orthonormée de  $Y$ .*

*Si  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^{V'}$ ,  $J(x) = \sum_1^p x_i \varphi_i$ .*

*Preuve.-*

*L'espace  $Y$*

*Le lemme 4.1 implique que, si  $\varphi \in Y$ , alors  $|\varphi| \in Y$  ;  
en effet*

$$Q_\varepsilon(|\varphi|) \leq Q_\varepsilon(\varphi).$$

*Soit  $Z \subset V$  l'ensemble des sommets  $i$  tels qu'il existe  $\varphi \in Y$  avec  $\varphi(i) \neq 0$ . Pour  $i \in Z$ , soit  $\epsilon_i \in Y' \setminus 0$  définie par  $\epsilon_i(\varphi) = \varphi(i)$ . Introduisons la relation d'équivalence dans  $Z$  donnée par la*

*Alors l'application*

$$Y \rightarrow \mathbb{R}^q$$

*qui à  $\varphi$  associe  $(\varphi(a_i))$  est un isomorphisme. En effet, elle est visiblement injective. Pour la surjectivité on peut utiliser le lemme 12-1 p. 141 de [Cho69].*

L'argument précédent montre aussi que les  $\varphi_i$  peuvent être choisies strictement positives sur  $W_i$ .

Les  $V_i$

Les  $W_i$  sont disjoints, mais pas toujours connexes. On va définir  $V_i$  tels que  $W_i \subset V_i$ . On définit en fait les  $V_i$  comme l'ensemble des sommets  $a \in V$  tels qu'il n'existe pas  $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i$  avec  $\varphi_\varepsilon(a) = 0$ .

Il existe ainsi  $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i$ , avec  $\forall a \notin V_i, \varphi_\varepsilon(a) = 0$ , et  $V_i$  est minimal pour cette propriété. En effet, il suffit de prendre, pour chaque  $a \notin V_i, \varphi_{a,\varepsilon} \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi$  avec  $\varphi_{a,\varepsilon}(a) = 0$  et  $\varphi_{a,\varepsilon} \geq 0$ , puis  $\varphi_\varepsilon = \inf \varphi_{a,\varepsilon}$ .

Il est clair que les  $V_i$  sont connexes (si  $V_i = V_i' \cup V_i''$  non connectés et  $W_i \cap V_i' \neq \emptyset$ , on peut remplacer  $\varphi_\varepsilon$  par sa restriction à  $V_i'$  et contredire la minimalité).

Soit  $a \in V_i \cap V_j$  et supposons qu'on puisse trouver  $0 \leq \varphi_{i,\varepsilon} \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i, 0 \leq \varphi_{j,\varepsilon} \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_j$  et que  $\frac{\varphi_{i,\varepsilon}(a)}{\varphi_{j,\varepsilon}(a)} \rightarrow l, 0 \leq l < \infty$ .

On peut alors trouver  $l_\varepsilon$  tel que  $\Phi_\varepsilon(a) = \varphi_{i,\varepsilon}(a) - l_\varepsilon \varphi_{j,\varepsilon}(a) = 0$  et  $\Phi_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i - l_\varepsilon \varphi_j$ . On prend alors  $(\Phi_\varepsilon)_+ \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i$  et nulle en  $a$ .

Si  $l$  n'existe pas, il suffit de permuter les rôles de  $i$  et  $j$ .

*Le graphe  $G'$*

On choisit  $a_i \in W_i$ , on pose  $m_i = \varphi_i(a_i) > 0$  et  $\Phi_{i,\varepsilon}$  telle que  $\Phi_{i,\varepsilon}(a_j) = \delta_{i,j} m_i$  et  $A_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon}(x) = 0, \forall x \neq a_1, \dots, a_p$ . Cela revient à minimiser  $Q_\varepsilon(\Phi)$  avec les valeurs aux  $a_j$  imposées. Il est clair que les  $\Phi_{i,\varepsilon}$  sont  $\geq 0$  partout (les remplacer par leurs valeurs absolues garde les conditions limites et diminue la forme quadratique).

Alors les  $\Phi_{i,\varepsilon}$  satisfont les hypothèses du lemme 4.2. En effet, si  $\psi_{i,\varepsilon} \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i$  sont telles que  $\psi_{i,\varepsilon}(a_j) = \delta_{i,j} m_i$ , on a :

$$Q_\varepsilon(\Phi_{i,\varepsilon}) \leq Q_\varepsilon(\psi_{i,\varepsilon}) = O(1) .$$

Donc  $\Phi_{i,\varepsilon} \xrightarrow{\mathbf{s}} \varphi_i$ , car les  $\varphi_{i,\varepsilon}$  ont même valeur aux  $a_j$  que  $\psi_{i,\varepsilon}$ . Puis  $A_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon}(x) = 0$  si  $x \neq a_1, \dots, a_p$ , et

$$A_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon}(a_j) = \frac{1}{m_j} \langle A_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon} | \Phi_{j,\varepsilon} \rangle = O(1) ,$$

par Cauchy-Schwarz. Donc les éléments de matrice  $b_{i,j}$  de la limite  $B$  sont donnés par

$$b_{i,j} = \lim \langle A_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon} | \Phi_{j,\varepsilon} \rangle .$$

Montrons que, si  $i \neq j$ ,  $b_{i,j} \leq 0$  : la positivité de  $\Phi_{i,\varepsilon}$  au voisinage de  $a_j$  le donne immédiatement.

Montrons que, s'il n'existe pas de chemin  $\gamma$  de  $V_i$  à  $V_j$  sans rencontrer les autres  $V_l$ , alors  $b_{i,j} = 0$ .

On montre d'abord que, pour  $a \in V_k$ ,  $\Phi_{i,\varepsilon}(a) = o(\Phi_{k,\varepsilon}(a))$ .

Sinon quitte à extraire des sous-suites, on aurait  $\Phi_{k,\varepsilon}(a) - c_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon}(a) = 0$  avec  $c_\varepsilon$  borné. Donc

$$|\Phi_{k,\varepsilon} - c_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon}| \xrightarrow{s} \varphi_k + |c| \varphi_i .$$

Puis, en prenant le inf avec  $|c_\varepsilon| \Phi_{i,\varepsilon}$ , on obtient que  $a \notin V_k$ .

On a donc

$$\Phi_{i,\varepsilon}(a) = o\left(\sum_{k \neq i} \Phi_{k,\varepsilon}(a)\right)$$

pour tout  $a \in \cup_{k \neq i} V_k$ . On en déduit la même estimation sur l'ensemble des  $a$  qui ne sont pas joints à  $V_i$  sans rencontrer un des  $V_k$  (positivité des solutions du problème de Dirichlet avec données au bord positives). En particulier, c'est vrai des voisins de  $a_j$ . On en déduit

$$\langle A_\varepsilon \Phi_{i,\varepsilon} | \Phi_{j,\varepsilon} \rangle = o\left(\sum_{k \neq i} \langle \Phi_{k,\varepsilon} | A_\varepsilon | \Phi_{j,\varepsilon} \rangle\right) ,$$

et donc  $b_{i,j} = 0$ .

□

En général le graphe  $G'$  n'est pas un mineur de  $G$ , comme nous l'avons constaté dans le cas de l'exemple 2.2 qui correspond à une transformation étoile-triangle (voir aussi [BC95]). Il est intéressant de rechercher des conditions suffisantes sur la famille  $A_\varepsilon$  pour que  $G'$  soit un mineur de  $G$ . Une telle condition est  $A_\varepsilon(\chi_V) = 0$ , car alors  $W_0 = \emptyset$ . Une autre condition suffisante est conséquence de la proposition 4.3.

**PROPOSITION 4.4.** *Soit  $A_n$  une suite croissante d'opérateurs de  $O_G$  et  $A_\infty \in O_{G_0}$  sa  $\Gamma$ -limite, alors  $G_0$  est un mineur de  $G$ .*

*Preuve.*—

Dans ce cas, d'après la proposition 4.3, il suffit de regarder la convergence simple sur  $Y$ : on en déduit que les  $W_i$  sont déjà connexes et qu'il ne peut y avoir d'arête de  $G_0$  que si il y a des sommets  $a_i \in W_i$  et  $a_j \in W_j$  tels que  $\{a_i, a_j\} \in E(G)$ .

□

De ce qui précède, on déduit le :

**THÉORÈME 4.4.** *Si  $G$  est un graphe fini, on a, avec les identifications vues plus haut :*

$$\cup_{G' < G} O_{G'} \subset \bar{O}_G \subset \cup_{G'' < G} O_{G''} .$$

*Preuve.*—

La deuxième inclusion résulte du théorème 4.3. La première des mêmes techniques que celles de la section 3.2.

□

## CHAPITRE 5

# MULTIPLICITÉS DES VALEURS PROPRES ET INVARIANTS ASSOCIÉS

### 1. INTRODUCTION

On s'intéresse, par exemple, au problème de savoir quels spectres sont réalisables comme spectre d'une matrice de  $O_G$  (resp.  $M_G$ ) lorsque  $G$  est donné. Tel quel ce problème est trop difficile : nous lui préférons une version *stable* utilisant des notions de *transversalité*. Une autre stabilisation possible est envisageable (voir 7.6).

Comme préliminaire, nous commençons par prouver le :

THÉORÈME 5.1. *Si  $G$  est un graphe à  $n$  sommets et*

$$\sigma_0 = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n\}$$

*est donné, il existe  $A \in O_G$  tel que  $\sigma(A) = \sigma_0$ .*

*Preuve.*—

Soit  $\Omega$  un voisinage de  $\sigma_0$  relativement compact dans  $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ . Soit

$$\Phi_\varepsilon(x) = \sigma(\text{diag}(x_i) - \varepsilon M_G) .$$

$\Phi_\varepsilon$  est continue et donc le spectre reste simple pour  $\varepsilon$  petit (minimax) ; donc  $\Phi_\varepsilon$  est  $C^1$  pour  $\varepsilon$  petit. On voit que  $\Phi_0 = Id$  et donc, par application du théorème des fonctions implicites,  $\Phi_\varepsilon$  est pour  $\varepsilon > 0$  petit un difféomorphisme de  $\Omega$  sur un voisinage de  $\sigma_0$ . Cela finit la preuve, si l'on observe que  $\text{diag}(x_i) - \varepsilon M_G$  est dans  $O_G$  pour  $\varepsilon > 0$ .

□

Ce théorème montre que le problème principal est celui des valeurs propres multiples !!

Nous commençons par décrire en détail la théorie des perturbations des valeurs propres multiples dans la section 2.

Nous appliquons alors ce qui précède au spectre des graphes (section 3). En particulier, on définit des invariants numériques  $\mu_k^{\mathbb{R}}(G)$  et  $\mu_k^{\mathbb{C}}(G)$

d'un graphe fini qui ont la propriété essentielle d'être des fonctions croissantes pour la relation de mineur (section 4).

On étudie ensuite (section 5) le cas réel et on montre que  $\mu_2^{\mathbb{R}}(G)$  permet de lire la planarité de  $G$  et plus généralement les  $\mu_2^{\mathbb{R}}(G)$  sont liés au genre de  $G$ .

Le cas complexe est examiné ensuite (section 6). Les  $\mu_k^{\mathbb{C}}(G)$  sont reliés à la largeur d'arbre de  $G$ .

La section 7 est consacrée à différents problèmes et commentaires.

On s'est largement inspiré des publications [Col93] et [Col94].

## 2. PERTURBATIONS DES VALEURS PROPRES MULTIPLES ET TRANSVERSALITÉ

**2.1. Perturbations des valeurs propres multiples.** *Références pour cette section* : [Arn72], [Kat76], [RS75a].

Plaçons-nous dans un espace de Hilbert *réel*  $X$  qu'on va supposer de dimension finie pour alléger l'écriture (en dimension infinie, il faudrait considérer des opérateurs auto-adjoints tous de même domaine) dont on notera  $(\cdot|\cdot)$  le produit scalaire. On notera  $\text{Sym}(X)$  l'espace des opérateurs symétriques sur  $X$  qu'on pourra identifier à l'espace des formes quadratiques  $\mathcal{Q}(X)$  au moyen de la bijection

$$A \rightarrow q_A ,$$

qui associe à  $A$  la forme quadratique  $q_A(x) = (x|A|x)$ .

Soit  $A_0 \in \text{Sym}(X)$ ,  $\lambda_0$  une valeur propre de  $A_0$ ,  $E_0$  l'espace propre associé et  $l$  la dimension de  $E_0$  (en dimension infinie, on supposerait que  $\lambda_0$  est un point isolé du spectre et que l'espace propre associé est de dimension finie) .

Soit  $D$  un disque fermé de centre  $\lambda_0$  du plan complexe ne contenant pas d'autre valeur propre de  $A_0$  que  $\lambda_0$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert connexe de  $A_0$  tel que les opérateurs  $A \in V$  n'ont pas de valeur propre sur  $\gamma = \partial D$ .

Alors  $P_A = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$  est le projecteur orthogonal (cela se vérifie immédiatement par diagonalisation de  $A$ ) sur le sous-espace de  $X$  engendré par les vecteurs propres de  $A$  dont la valeur propre est dans  $D$ . Il est clair que  $P_A$  dépend analytiquement de  $A$  dans  $V$ . Quitte à restreindre  $V$ , on peut supposer que l'image  $E$  du projecteur  $P_A$  est transverse à l'orthogonal  $F_0$  de  $E_0$ . On définit alors une *isométrie*  $U_{E_0,E}$  de  $E_0$  sur  $E$  par la formule :

$$U_{E_0,E} = (\text{Id}_{E_0} + B) \circ C ,$$



où  $B : E_0 \rightarrow F_0$  est l'application linéaire dont le graphe est  $E$  et

$$C = [({}^t(\text{Id}_{E_0} + B))(\text{Id}_{E_0} + B)]^{-\frac{1}{2}},$$

où la puissance  $-\frac{1}{2}$  est prise au sens du calcul fonctionnel des opérateurs symétriques dans  $E_0$ .

On considère alors, toujours pour  $A \in V$ , l'opérateur  $\Phi(A) = (U_{E_0, E})^{-1} \circ A|_E \circ U_{E_0, E}$  qui est symétrique sur  $E_0$  et admet pour spectre celui de  $A|_E$  c'est-à-dire les valeurs propres de  $A$  situées dans  $D$ .

L'application  $\Phi$  est analytique dans  $V$  et on peut calculer la différentielle  $L$  de  $\Psi : V \rightarrow \mathcal{Q}(E_0)$  définie par  $\Psi(A) = q_{\Phi(A)}$  en  $A_0$ .

On trouve, par un calcul sans malices :

$$L(\delta A) = (\delta A \cdot | \cdot)_{|E_0} :$$

en effet  $\Psi(A)(x, y) = (AUx|Uy)$ , d'où en dérivant :

$$\delta\Psi(x, y) = (\delta Ax|y) + (A\delta Ux|y) + (Ax|\delta Uy)$$

et l'on utilise alors la symétrie de  $A$  et le fait que  $x, y \in E_0$  pour finir le calcul grâce à l'antisymétrie de  $\delta U$ .

On en déduit que  $\Psi$  est une submersion de  $V$  sur  $\mathcal{Q}(E_0)$ . En particulier, on a les résultats suivants :

**THÉORÈME 5.2.** *Les valeurs propres  $\lambda_1(\epsilon) \leq \dots \leq \lambda_l(\epsilon)$  situées dans  $D$  de  $A_0 + \epsilon\delta A$  vérifient :*

$$\lambda_i(\epsilon) = \lambda_0 + \epsilon\mu_i + O(\epsilon^2),$$

où  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_l$  sont les valeurs propres de  $L(\delta A) = (\delta A \cdot | \cdot)_{|E_0}$ .

En effet, ces valeurs propres sont celles de  $\Phi(A) = A_0 + \epsilon L(\delta A) + O(\epsilon^2)$  et l'on applique le minimax.

**THÉORÈME 5.3.**  *$W_l^{\lambda_0}$ , l'ensemble des matrices de  $\text{Sym}(X)$  ayant  $\lambda_0$  comme valeur propre de multiplicité  $l$ , est une sous-variété (non fermée) de codimension  $\frac{l(l+1)}{2}$  de  $\text{Sym}(X)$  et  $W_l^\bullet = \cup_{\lambda \in \mathbf{R}} W_l^\lambda$  en est une sous-variété de codimension  $\frac{l(l+1)}{2} - 1$ .*

En effet,  $W_l^{\lambda_0}$  est l'image inverse de  $\lambda_0 Id$  par  $\Psi$  et donc son espace tangent en  $A_0$  est le noyau de  $L$ .

En particulier  $W_2^\bullet$  est de codimension 2,  $W_3^\bullet$  de codimension 5, etc...

Une famille à un paramètre réel générique de matrices symétriques n'a donc pas de valeurs propres dégénérées, une famille à 2 paramètres peut en avoir en des points isolés, etc... Cette observation remonte à Von Neumann et Wigner [NW29], et a été amplifiée par Arnold [Arn72].

Il faut remarquer la formule très simple donnant la variation première des valeurs propres. Cette formule est un cas particulier de la théorie des perturbations des variétés critiques non-dégénérées au sens de Bott [Bol79].

Si  $F_\epsilon : Z \rightarrow \mathbf{R}$ , où  $Z$  est une variété  $C^\infty$ , admet pour  $\epsilon = 0$  une variété critique non-dégénérée  $C$ , on obtient une formule pour les valeurs critiques de  $F_\epsilon$  au premier ordre en considérant les valeurs critiques de la restriction à  $C$  de  $\frac{dF_\epsilon}{d\epsilon}$  en  $\epsilon = 0$ . Ici il faudrait considérer les valeurs propres de  $A$  comme les valeurs critiques de  $q_A$  restreinte à la sphère unité de  $X$ .

Ce phénomène est aussi à la base de la possibilité d'évaluer l'effet tunnel en régime semi-classique même en l'absence d'analyticité du potentiel [Col97a], voir le chapitre 6.

**2.2. L'hypothèse de transversalité.** Il faut remarquer que la transversalité ne se voit pas au niveau des valeurs propres, mais au niveau des matrices : si  $A(t) = \text{diag}(t, -t) \in \text{Sym}(\mathbf{R}^2)$ . Les valeurs propres  $\lambda_1(t) = -|t|$  et  $\lambda_2(t) = |t|$  semblent se croiser transversalement. Mais il n'en est rien : si on considère  $A_\epsilon(t)$  obtenu en ajoutant  $\epsilon$  hors de la diagonale à  $A(t)$ , les valeurs propres de  $A_\epsilon(t)$ , pour  $\epsilon \neq 0$  ne sont dégénérées pour aucune valeur de  $t$ .

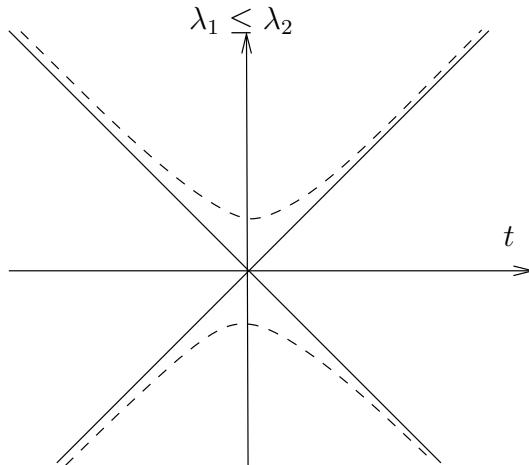


FIGURE 1. Les valeurs propres de  $A(t)$  et  $A_\epsilon(t)$

**DÉFINITION 5.1.** Si  $Z$  et  $W$  sont 2 sous-variétés de  $M$  se coupant en  $x_0$ , on dit qu'elles se coupent transversalement en  $x_0$  si on a :

$$T_{x_0}Z + T_{x_0}W = T_{x_0}M .$$

Ce n'est possible que si  $e = \dim W + \dim Z - \dim M \geq 0$ . Dans ce cas l'intersection de  $Z$  et  $W$  est une sous-variété de dimension  $e$  au voisinage de  $x_0$ .

La transversalité permet une reformulation géométrique des théorèmes de type fonctions implicites. En particulier si  $W$  et  $Z$  se coupent transversalement en  $x_0$ , et  $W_\varepsilon$  une perturbation  $C^1$  de  $W$ , il existe, pour  $\varepsilon$  petit, un point  $x_\varepsilon$  convergent vers  $x_0$  tel que  $W_\varepsilon$  et  $Z$  se coupent transversalement en  $x_\varepsilon$ . Pour une perturbation  $C^0$ , on a existence de  $x_\varepsilon$  mais on peut seulement garantir que les variétés se coupent en  $x_\varepsilon$ , la transversalité peut disparaître.

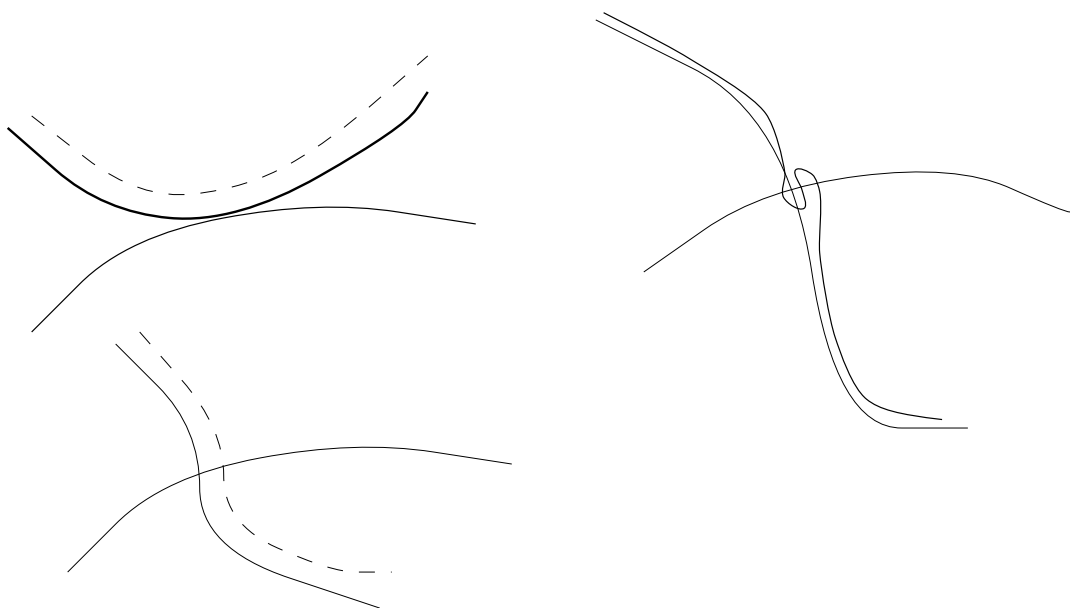


FIGURE 2. Perturbations de l'intersection de 2 courbes planes

Soit maintenant

$$Z \subset \text{Sym}(X)$$

une sous-variété et  $A_0 \in Z$ . On dira que la suite de valeurs propres

$$\sigma = ((\lambda_1, l_1), (\lambda_2, l_2), \dots, (\lambda_k, l_k))$$

de  $A_0$  de multiplicités  $l_i = \dim E_i$  est *transversale pour*  $Z$  en  $A_0$  ou *stable* si  $Z$  est transversale en  $A_0$  à la sous-variété  $W_\sigma$  de  $\text{Sym}(\mathcal{H})$  formée des matrices ayant  $\sigma$  comme partie de leur spectre avec les multiplicités  $m(\lambda_i) = l_i$ . On construit alors une application  $\Phi : U \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=k} \mathcal{Q}(E_i)$

comme au 2.1. où  $U$  est un voisinage de  $A_0$  dans  $Z$ . On a alors transversalité si et seulement si la différentielle

$$L : T_{A_0}Z \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=k} Q(E_i) ,$$

de  $\Phi$ , définie par  $L(\delta A) = \bigoplus((\delta A) \cdot | \cdot)_{|E_i}$  est surjective.

Il est clair que si c'est le cas et si  $Z_\varepsilon$  converge au sens  $C^0$  vers  $Z$ , alors il existe  $A_\varepsilon$  convergeant vers  $A_0$  tel que le spectre de  $A_\varepsilon$  admette les valeurs propres  $\lambda_i$  avec la multiplicité  $l_i$ .

**2.3. La topologie.** Il est intéressant de pouvoir détecter la présence de valeurs propres multiples dans une famille d'opérateurs de façon purement topologique. Bornons-nous au cas de la dimension 2.

Soit  $Z$  de dimension 2 coupant  $W_2$  en  $A_0$  transversalement avec  $\lambda_k(A_0) = \lambda_{k+1}(A_0)$ .

Soit maintenant  $\gamma$  un petit cycle de  $Z$  entourant  $A_0$ , soit  $E_k$  (resp.  $E_{k+1}$ ) les fibrés vectoriels réels de dimension 1 définis dans un voisinage de  $A_0$  dans  $Z$  privé de  $A_0$  par  $E_j(A) = Ker(A - \lambda_j(A))$  avec  $j = k$  ou  $k + 1$ .

Alors ces fibrés ont une holonomie non triviale sur  $\gamma$  : si on suit par continuité une fonction propre normalisée de  $E_k$ , lorsqu'on parcourt  $\gamma$  une fois, elle change de signe. Cela se prouve en faisant une homotopie de façon à rendre  $\gamma$  très petit et en linéarisant : on se ramène au cas de  $\mathbb{R}^2$  et de la courbe fermée de matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos t & \varepsilon \sin t \\ \varepsilon \sin t & -\varepsilon \cos t \end{pmatrix}$$

pour laquelle les vecteurs propres font un angle  $\frac{t}{2}$  et  $t + \frac{\pi}{2}$  avec le premier axe de coordonnées. Un tel point  $A_0$  de  $Z$  est appelé point *diabolo*, en effet le dessin dans  $Z \times \mathbb{R}$  formé des graphes des valeurs propres  $\lambda_k$  et  $\lambda_{k+1}$  est un cône dont le sommet correspond au point  $A_0$ .

Cette propriété permet de détecter numériquement les valeurs propres dégénérées dans les familles à 2 paramètres. Si  $\gamma$  est le bord d'un domaine  $D$  et que le fibré  $E_k$  est non trivial sur  $\gamma$ ,  $D$  contient des points où la  $k$ -ème valeur propre est dégénérée. Cette propriété est utilisée dans [BW84].

On peut généraliser au cas *hermitien complexe*. Dans ce cas  $W_2$  est de codimension réelle 3 et on doit regarder l'entrelacement avec une surface compacte. La classe de Chern du fibré analogue à  $E_k$  permet de calculer le nombre d'entrelacement qui est ici un entier. On peut le calculer par intégrale de la courbure d'une connection naturelle, c'est l'interprétation géométrique que B. Simon a donné de la phase de Berry [Ber84],[Ber88].

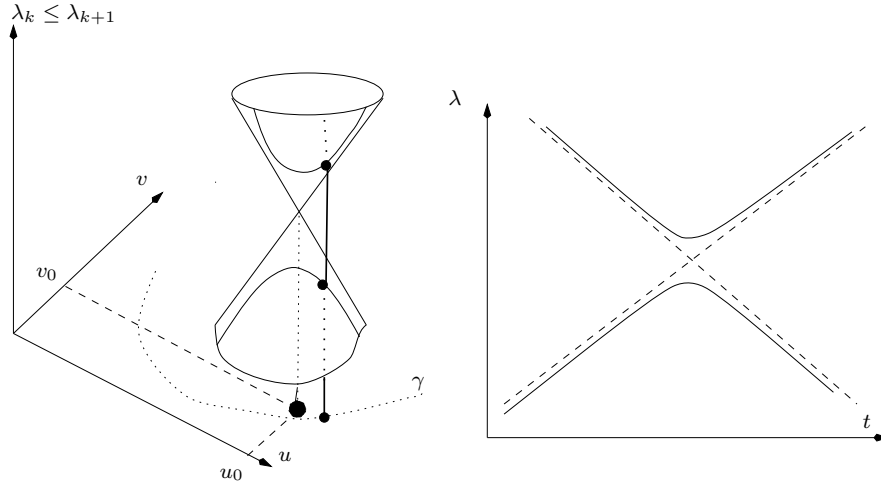


FIGURE 3. Un point diabolo

**2.4. Le cas singulier.** Ce qui précède s'étend au cas singulier, que ce soit la théorie des perturbations des valeurs propres multiples ou les notions de transversalité.

Soit  $A = (Y, B)$  un opérateur auto-adjoint non borné sur  $X$ . On définit le spectre de  $A$  par

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{\dim Y}\} \cup \infty ,$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $B$  sur son domaine de définition et où  $\infty$  est de multiplicité  $\dim X - \dim Y$  (l'espace propre  $E_\infty$  est l'orthogonal de  $Y$  dans  $X$ ).

On définit, pour  $\lambda$  non valeur propre de  $A$ , la résolvante  $R(\lambda) : X \rightarrow X$  par

$$R(\lambda) = j \circ (\lambda - B)^{-1} \circ P ,$$

où  $j$  est l'injection de  $Y$  dans  $X$  et  $P$  la projection orthogonale de  $X$  sur  $Y$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $L \in \mathcal{L}$ , on définit  $L_\lambda \in \mathcal{L}_\mathbb{C}$  (complexifié de  $\mathcal{L}$  formé des sous-espaces lagrangiens complexes de  $(X \oplus X^*) \otimes \mathbb{C}$ ) comme

$$L_\lambda = \{(x, \lambda x - \xi) | (x, \xi) \in L\} .$$

C'est un espace lagrangien dépendant analytiquement de  $L$  et  $\lambda$ .

$\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A = (Y, B)$  de variété lagrangienne  $L_A$  si et seulement si  $(L_A)_\lambda$  ne rencontre pas  $X \oplus 0$  transversalement. La multiplicité de  $\lambda$  est la dimension de cette intersection et l'espace propre est cette intersection. Si  $\lambda$  n'est pas valeur propre,  $(L_A)_\lambda$  est le graphe d'une application linéaire de  $0 \oplus X^*$  (que l'on identifie à  $X$ ) dans  $X \oplus 0$  dont l'image est contenue dans  $Y$  : cette application

$R(\lambda) : X \rightarrow X$  qui est définie lorsque  $\lambda$  n'est pas valeur propre est la résolvante. Elle dépend analytiquement de  $L$  et  $\lambda$ .  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A = (Y, B)$  de variété lagrangienne  $L_A$  si et seulement si  $(L_A)_\lambda$  ne rencontre pas  $X \oplus 0$  transversalement. La multiplicité de  $\lambda$  est la dimension de cette intersection et l'espace propre est cette intersection. Si  $\lambda$  n'est pas valeur propre,  $(L_A)_\lambda$  est le graphe d'une application linéaire de  $0 \oplus X^*$  (que l'on identifie à  $X$ ) dans  $X \oplus 0$  dont l'image est contenue dans  $Y$  : cette application  $R(\lambda) : X \rightarrow X$  qui est définie lorsque  $\lambda$  n'est pas valeur propre est la résolvante. Elle dépend analytiquement de  $L$  et  $\lambda$ .

Il en est donc de même des projecteurs spectraux définis de la façon habituelle

$$\Pi_I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda) d\lambda ,$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  dont les extrémités ne rencontrent pas le spectre et  $\gamma$  un cercle de diamètre  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

On peut ainsi définir des variétés  $\bar{W}_l^\mu$  dans  $\mathcal{L}$  qui sont formées des  $L$  qui admettent  $\mu$  comme valeur propre de multiplicité  $l$ . On a évidemment, en posant  $D_\mu = \{(x, \mu x) | x \in X\}$  :

$$\bar{W}_l^\mu = \{L \in \mathcal{L} | \dim(L \cap D_\mu) = l\}$$

qui est une variété de codimension  $l(l+1)/2$  de  $\mathcal{L}$  (on notera la variété  $\bar{W}_l^0$  et son analogue hermitien  $\bar{W}_l$ ). En effet, dans le cas où  $A$  est partout définie, cela résulte de la section 2.1 ; dans le cas général, l'isotropie de la grassmannienne lagrangienne montre que  $\bar{W}_l^\mu$  est une sous-variété compacte de  $\mathcal{L}$  dont l'espace tangent est défini de la façon suivante : si  $E_0 \subset Y$  est l'espace propre, on a

$$T_L \bar{W}_l^\mu = \{r \in \mathcal{Q}(L) | r|_{E_0} = 0\} .$$

On voit ainsi que les notions usuelles liées au spectre des matrices symétriques s'étendent sans difficultés aux éléments de  $\mathcal{L}$ .

En particulier la théorie des perturbations des valeurs propres multiples s'étend avec les formules évidentes faisant intervenir la forme quadratique sur  $L$  associée à  $\delta A$  qu'il faut restreindre à l'espace propre qui s'identifie évidemment à un sous-espace de  $L$ .

**2.5. L'indice de Maslov revisité.** Rappelons que le groupe de Poincaré ( $\pi_1$ ) de la grassmannienne lagrangienne  $\mathcal{L}$  est égal à  $\mathbb{Z}$ . Cela permet de définir l'indice de Maslov d'une courbe fermée. On peut le définir aussi comme le nombre d'intersection avec le cycle orienté de codimension 1 formé des lagrangiens qui ne sont pas transverses à un lagrangien  $L_0$  donné.

Dans notre exemple précédent, prenons pour  $L_0$  le lagrangien  $0 \oplus \mathbb{R}^V$  :  $L \cap L_0$  est non trivial ssi la forme quadratique associée à  $L$  a une valeur propre infinie.

Soit maintenant  $\gamma$  un lacet fermé de  $\mathcal{L}$  et  $\gamma_0$  une petite perturbation de  $\gamma$  telle que les valeurs propres des formes de  $\gamma$  soient toutes simples (c'est possible, car condition de codimension 2).

Alors on suit une valeur propre  $\lambda(\gamma_0(t))$  par continuité dans  $P^1(\mathbb{R})$ . Le degré de  $t \rightarrow \lambda(\gamma_0(t))$  est alors égal à l'indice de Maslov de  $\gamma$  et en particulier indépendant de la petite perturbation choisie.

On voit ainsi qu'il n'y a pas d'indexation uniforme possible pour le spectre...

### 3. INVARIANTS SPECTRAUX DE GRAPHERS

On peut se restreindre pour définir ces invariants associés à  $O_G$  et  $M_G$  au cas d'une valeur propre nulle, car ces ensembles sont invariants par translation par  $\lambda \text{Id}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

DÉFINITION 5.2. On note  $W_{l,k} \subset \text{Sym}(X)$  la sous-variété des  $A$  dont le spectre vérifie

$$\lambda_1 \leq \dots < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+l-1} = 0 < \dots .$$

On note  $W_l = \cup_k W_{l,k}$  et  $\bar{W}_l$  son adhérence dans  $\mathcal{L}_X$  définie par

$$\bar{W}_l = \{A = (Y, B) \mid \dim(L_A \cap X \oplus 0) = l\} .$$

Rappelons que ces 3 ensembles sont des sous-variétés lisses de  $\mathcal{L}_X$  de codimension  $\frac{l(l+1)}{2}$ .

On définit maintenant des invariants numériques attachés à un graphe  $G$ .

DÉFINITION 5.3. 1)  $\mu_k^{\mathbb{R}}(G)$  est le sup des entiers  $l$  tel qu'il existe  $A \in O_G \cap W_{l,k}$  tel que l'intersection de ces 2 sous-variétés soit transversale dans  $\text{Sym}(\mathbb{R}^V)$ .

Si cette condition de transversalité est vérifiée, on dira que le valeur propre 0 de  $A$  est  $O_G$ -stable.

On pose  $\mu(G) = \mu_2^{\mathbb{R}}(G)$ .

2)  $\mu_k^{\mathbb{C}}(G)$  est le sup des entiers  $l$  tel qu'il existe  $A \in M_G \cap W_{l,k}$  tel que l'intersection de ces 2 sous-variétés de  $\text{Herm}(\mathbb{C}^V)$  soit transversale.

On pose  $\nu(G) = \mu_1^{\mathbb{C}}(G)$ .

On peut reformuler algébriquement ces conditions de transversalité compte tenu de la description des espaces tangents à  $W_{l,k}$ .

PROPOSITION 5.1. Soit  $A \in O_G$  et  $F = \ker A$ . Supposons  $\dim(F) = l$ . Alors  $W_l$  coupe  $O_G$  transversalement en  $A$  si et seulement si les

formes quadratiques sur  $F$  définies par  $\varepsilon_{i,j}(x) = x_i x_j$ ,  $\{i, j\} \in E$  et  $\varepsilon_i(x) = x_i^2$ ,  $i \in V$  engendrent  $Q(F)$ . Notons que  $T_A O_G$  admet comme base les formes précédentes sur  $\mathbb{R}^V$ .

Même chose mutatis-mutandis pour le cas complexe : remplacer les  $\#V + \#E$  formes quadratiques bases de  $T_A O_G$  par les  $\#V + 2\#E$  formes hermitiennes suivantes qui forment une base de  $T_A M_G$  :

$$\varepsilon_i(x) = \|x_i\|^2, \quad \varepsilon'_{i,j}(\text{resp. } \varepsilon''_{i,j}) = \Re(\text{resp. } \Im)(x_i \bar{x}_j) .$$

**COROLLAIRE 5.1.** *Supposons que 0 soit une valeur propre  $O_G$ -stable de  $A$  et que  $G$  admette des composantes connexes  $G_i = (V_i, E_i)$ . Alors il existe  $i_0$  tel que,  $\forall i \neq i_0$ , les restrictions à  $V_i$  des  $\varphi \in \ker A$  soient nulles.*

*Preuve.* –

En effet dans le cas contraire, soit  $\varphi_1, \varphi_2$  2 éléments de  $F = \ker A$  de supports disjoints contenus dans 2 composantes connexes de  $G$ , alors si  $q$  est une forme quadratique sur  $F$  telle que  $q(\varphi_1, \varphi_2) = 1$ , il est impossible de la réaliser par une restriction d'une forme quadratique de  $T_A O_G$  car de telles formes rendent toutes  $\varphi_1$  orthogonale à  $\varphi_2$ .

□

Le théorème de Perron-Frobenius affirme que si le graphe est connexe et  $A \in O_G$  la première valeur propre de  $A$  est simple. On en déduit :

**COROLLAIRE 5.2.** *Pour tout  $G$ ,  $\mu_1^{\mathbb{R}}(G) = 1$ .*

**3.1. Signatures spectrales.** On dira qu'une suite de valeurs propres  $\sigma = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k)$  est un *spectre  $G$ -stable* si il existe  $A_0 \in O_G$  tel que le spectre de  $A_0$  soit  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq \lambda_N$  et que l'injection canonique de  $O_G$  dans  $\text{Sym}(\mathbb{R}^V)$  soit transversale à  $W_\sigma$  en  $A_0$ , où  $W_\Sigma$  est l'ensemble des matrices ayant  $\Sigma$  comme début du spectre.

On appelle *signature spectrale de  $G$*  et on note  $SS(G)$  l'ensemble des spectres  $\Sigma$  qui sont  $G$ -stables.

Comme la signature contient beaucoup d'informations, il peut être utile d'en extraire des invariants plus faibles : c'est le cas des  $\mu_k^{\mathbb{R}}$  définis plus haut.

Exemples de signatures spectrales (on n'a donné que les éléments maximaux des signatures de ces graphes).

**EXEMPLE 3.1.**  *$G$  est formé de  $N$  points et aucune arête, alors  $SS(G) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N\}$ .*



EXEMPLE 3.2.  $G$  est le graphe cyclique à  $N$  sommets, alors :  $SS(G) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots\}$ .

EXEMPLE 3.3.  $G$  est le graphe complet à  $N$  sommets, alors :  $SS(G) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N\}$ .

EXEMPLE 3.4.  $G$  est l'étoile à 3 branches, alors :  $SS(G) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4\}$ . On remarque que ce graphe a même signature spectrale que le cycle à 4 sommets.

On peut conjecturer que  $SS(G)$  est toujours donné par des restrictions sur la suite des multiplicités.

#### 4. MONOTONIE PAR MINEURS

Une des propriétés principales des invariants  $\mu_k^{\mathbb{R}}$  et  $\mu_k^{\mathbb{C}}$  et de la signature spectrale est leur monotonie par rapport à la relation de mineurs des graphes. C'est pour cela que la transversalité est indispensable.

Par exemple, le laplacien canonique sur le graphe  $E_N$  (étoile à  $N$  branches) a sa 2ème valeur propre de multiplicité  $N - 1$  alors qu'il est mineur de triangulations de  $S^2$  pour lesquelles cette multiplicité (Cheng discret) est au plus 3.

**4.1. Monotonie.** Le résultat principal est le :

THÉORÈME 5.4. *Si  $G'$  est un mineur de  $G$ ,*

$$\begin{aligned}\mu_k^{\mathbb{R}}(G') &\leq \mu_k^{\mathbb{R}}(G) , \\ \mu_k^{\mathbb{C}}(G') &\leq \mu_k^{\mathbb{C}}(G)\end{aligned}$$

*et si  $\Sigma \in SS(G')$ , alors  $\Sigma$  est aussi dans la signature spectrale de  $G$ .*

*Preuve.* –

Nous allons donner la preuve pour  $\mu_k^{\mathbb{R}}$ .

Il suffit bien sûr de travailler avec  $G' = R_{1,2}(G)$  ou  $G' = C_{1,2}(G)$  où  $\{1, 2\}$  est une arête de  $G$ . Le cas le plus difficile est celui de la contraction, car alors  $\mathbb{R}^{V'}$  est un espace différent de  $\mathbb{R}^V$ . C'est ce cas que nous allons traiter.

On utilise le théorème 4.2, ou plus précisément sa version pour  $O_G$  et le :

LEMME 5.1.  *$j(O_{G'})$  coupe transversalement  $\bar{W}_l$  en  $j(A)$  si et seulement si  $O_{G'}$  coupe transversalement  $W_l$  en  $A$ .*

Cela résulte du fait que  $\bar{W}_l$  est transversale à l'ensemble des formes quadratiques de domaine un sous-espace fixe de  $\mathbb{R}^V$ .

On utilise ensuite la stabilité par perturbations  $C^1$  d'une intersection transversale

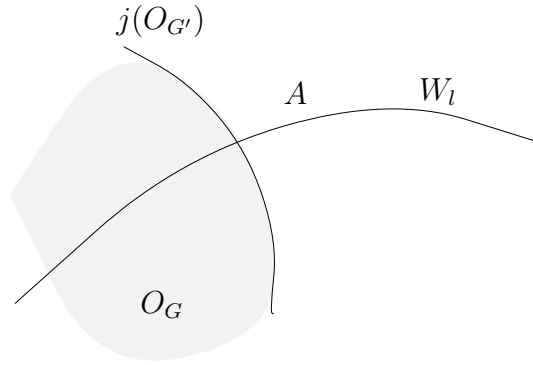


FIGURE 4. Transversalité

□

## 5. MU ET LA PLANARITÉ

**5.1. Exemples de  $\mu(G)$ .** 1) Il est facile de vérifier que  $\mu(K_N) = N - 1$  où  $K_N$  est le graphe complet à  $N$  sommets; on a du reste une réciproque : si  $\mu(G) = \#V - 1$ ,  $G$  est un graphe complet.

2) Il est intéressant de vérifier à titre d'exercice que  $\mu(K_{3,3}) = 4$  où  $K_{3,3}$  est le 2ème graphe de Kuratowski (voir figure 5).

**5.2. Le théorème de Cheng et sa réciproque.** On va prouver le :

**THÉORÈME 5.5.**  $\mu(G) \leq 3$  si et seulement si  $G$  est planaire.

On a besoin pour cela de la variante combinatoire suivante du théorème de Cheng prouvée dans [Moe95] :

**THÉORÈME 5.6.** Soit  $G$  le 1-squelette d'une triangulation de  $S^2$  ou d'un domaine à bord de  $S^2$ , alors si  $A \in O_G$ , la multiplicité de la seconde valeur propre de  $A$  est  $\leq 3$ .

*Preuve.*—

Soit  $i, j, k$  3 sommets d'un triangle de cette triangulation, il existe  $\varphi \in F \setminus 0$ , telle que  $\varphi(i) = \varphi(j) = \varphi(k) = 0$ .

On peut supposer que  $\varphi$  est de support minimal et donc vérifie le théorème de Courant, version van der Holst (2.4). On étend  $\varphi$  comme fonction affine sur chaque simplexe à partir de ses valeurs aux sommets.

On considère l'ouvert  $\Omega$  de  $S^2$  qui est le complémentaire du support fermé de  $\varphi$ . Soit  $U$  la composante connexe de  $(i, j, k)$  dans  $\Omega$ . Soit  $a, b, c$  3 sommets (il y en a au moins 3 à cause de la 3-connexité !!) de la frontière de  $U$  : chacun de ces sommets ( $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0$ ) est connecté à un sommet où  $\varphi > 0$  et à un sommet où  $\varphi < 0$  : la connexité des ensembles  $U_+ = \{\varphi > 0\}$  et  $U_- = \{\varphi < 0\}$  est alors impossible d'après le théorème de Jordan.

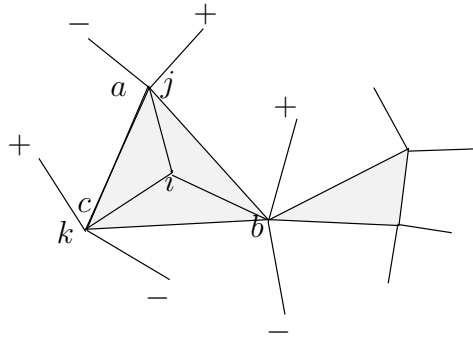


FIGURE 5. La région  $U$  et 3 sommets du bord joints à  $U_{\pm}$

□

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 5.5 :

une des implication résulte du théorème de Kuratowski [Kur30] : un graphe non planaire contient un mineur isomorphe à l'un des 2 graphes dits de Kuratowski, le graphe  $K_5$  complet à 5 sommets et le graphe  $K_{3,3}$ . On vérifie facilement que  $\mu(K_5) = \mu(K_{3,3}) = 4$ . On applique alors le théorème de monotonie de  $\mu$  par rapport à l'opération de mineur (5.4).

Je connais 4 preuves différentes de l'autre implication : les 2 premières sont purement combinatoires et données dans [BC95] et [Moe95], les 2 autres s'appuient sur des approximations du spectre d'opérateurs de Schrödinger par des laplaciens sur des graphes : on utilise soit l'approximation semi-classique de l'effet tunnel étudiées par Helffer-Sjöstrand (voir [Col97a]), soit l'étude asymptotique du spectre de voisinages tubulaires du graphe plongé ([Col87] et [Col93]) (voir la suite).

Donnons par exemple une preuve inspirée de [Moe95].

Soit  $G$  planaire avec  $\mu(G) \geq 4$ , on peut considérer  $G$  comme un mineur d'une triangulation de  $S^2$  : on prend une triangulation assez fine de  $S^2$  pour que  $G$  se trace comme une ligne polygonale sur le 1-squelette  $G_1$  de la triangulation. On applique à nouveau la monotonie de  $\mu$  (5.4) qui donne  $\mu(G_1) \geq 4$ , puis Cheng combinatoire (5.6) appliqué à  $G_1$  donne une contradiction.

**5.3.  $\mu(G)$  et le genre de  $G$ .** S. Cheng [Che76], puis G. Besson [Bes87], N. Nadirashvili et B. Sévenec [Sév94] ont donné (voir le chapitre 6) des majorations des multiplicités du  $\lambda_2$  des opérateurs de Schrödinger sur les surfaces.

On en déduit des majorations de  $\mu(G)$  en fonction des surfaces où  $G$  se plonge :

**THÉORÈME 5.7.** *a) Si  $G$  se plonge dans le plan projectif réel ou la bouteille de Klein,  $\mu(G) \leq 5$  ;*

*b) si  $G$  se plonge dans le tore de dimension 2 ;  $\mu(G) \leq 6$ ,*

*c) si  $G$  se plonge dans une surface  $S$  de caractéristique d'Euler  $\chi(S) < 0$ , alors  $\mu(G) \leq 4 - 2\chi(S)$ .*

*a) et b) sont optimales.*

**5.4.  $\mu(G)$  et les graphes ayant un plongement non noué dans  $\mathbb{R}^3$ .** Une généralisation intéressante de la classe des graphes planaires est la classe des graphes  $G$  admettant un plongement non noué dans  $\mathbb{R}^3$ , i.e. tel que 2 circuits disjoints quelconques de  $G$  ne soient pas entrelacés comme lacets de  $\mathbb{R}^3$ . L'exemple le plus simple est  $K_5$  qui n'est pas planaire, mais n'admet aucune paire de circuits disjoints.

L'analogie du théorème de Kuratowski est que ces graphes admettent une caractérisation par mineurs exclus : les graphes exclus étant les transformés par étoile-triangle de  $K_6$ . On montre dans [BC95] que  $\mu_2(G) = 5$  pour ces graphes et Lovász et Schrijver [LS96] ont réussi à montrer le joli :

**THÉORÈME 5.8.**  *$\mu_2(G) \leq 4$  si et seulement si  $G$  admet un plongement non-noué dans  $\mathbb{R}^3$ .*

De même que le théorème 5.5 est une version discrete du théorème de Cheng, on peut se demander si le théorème 5.8 n'admet pas un analogue continu.

## 6. NU ET LA LARGEUR D'ARBRE

**6.1. Introduction.** Que se passe-t-il pour les invariants  $\mu_k^{\mathbb{C}}$  ?

Les éléments de  $M_G$  s'obtiennent par discrétisation des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique. Les valeurs propres de tels opérateurs peuvent être très dégénérées. C'est le cas de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant dans le plan :

$$H = -(\partial_x - iBy)^2 - \partial_y^2 ;$$

le spectre de  $H$ , dont les éléments s'appellent les niveaux de Landau en physique est l'ensemble des valeurs propres  $\sigma(H) = \{E_n = (2n + 1)|B| \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Les espaces propres sont de dimension infinie.

On ne peut donc guère espérer de bornes de  $\nu(G)$  pour un graphe planaire ! (voir [CT93])

L'idée est de considérer les arbres. Si  $T$  est un arbre, tout  $A \in M_T$  est unitairement équivalent à un  $A' \in O_T$  par un *changement de jauge* unitaire. Le théorème de Perron-Frobenius montre alors que  $\nu(T) = 1$  (voir les détails dans la section 6.4).

On peut étendre cet argument aux graphes qui sont produit d'un arbre par un graphe à  $N$  sommets : une version vectorielle de l'argument précédent s'applique.

En utilisant la monotonie de  $\nu$  pour les mineurs, on est conduit à comparer  $\nu(G)$  à la *largeur d'arbre* de  $G$ .

**6.2. Largeurs d'arbres.** Donnons d'abord une définition de la largeur d'arbre un peu différente de celle de Robertson-Seymour ([RS84]).

D'abord, si  $G_1, G_2$  sont 2 graphes, on définit le produit  $G = G_1 \times G_2$  par  $V = V_1 \times V_2$  et  $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} \in E$  si et seulement si ou  $(a_1 = b_1$  et  $\{a_2, b_2\} \in E_2)$  ou  $(a_2 = b_2$  et  $\{a_1, b_1\} \in E_1)$ .

**DÉFINITION 5.4.** *La largeur d'arbre  $la(G)$  du graphe  $G$  est le plus petit  $N$  tel qu'il existe un arbre  $T$  tel que  $G$  est un mineur du produit  $T \times K_N$ .*

**6.3. Les résultats.** Maintenant, on a les 2 théorèmes :

**THÉORÈME 5.9.**  $\nu(G) = 1$  si et seulement si  $G$  est un arbre.

**THÉORÈME 5.10.** *Pour tout  $G$ ,  $\nu(G) \leq la(G)$  et  $\mu_k^C(G) \leq 2la(G)$ .*

Le théorème 5.9 se déduit du théorème 5.11, de  $\nu(P_2) = 2$  (section 6.5) et du fait qu'un graphe qui n'est pas un arbre contient le cycle  $P_2$  comme mineur.

Le théorème 5.10 se prouve comme une extension de l'idée de changement de jauge sur les arbres, mais pour des fibrés vectoriels.

**6.4.  $\nu$  des arbres vaut 1.** Prouvons d'abord le :

THÉORÈME 5.11. *Si  $T$  est un arbre et  $A \in M_T$ , la multiplicité de  $\lambda_1(A)$  est 1.*

*Preuve.*—

Soit  $U = \text{Diag}(\omega_i)$  avec  $|\omega_i| = 1$ . Soit  $A \in M_T$  et  $B = U^{-1}AU$ . On a :

$$b_{i,i} = a_{i,i}, \quad b_{i,j} = \omega_j^{-1}\omega_i a_{i,j}.$$

Si  $a_{i,j} = |a_{i,j}|e^{\sqrt{-1}\theta_{i,j}}$  et que l'on choisit  $\omega_i$  de façon que, pour toute arête  $\{i, j\}$  de  $T$ ,  $\omega_j^{-1}\omega_i e^{\sqrt{-1}\theta_{i,j}} = -1$ , alors  $B \in O_T$  ( $b_{i,j} = -|a_{i,j}|$  pour toute arête de  $T$ ). On peut faire un tel choix en partant de  $\omega_{i_0} = 1$  de proche en proche, car  $T$  n'a pas de cycle. On applique alors le théorème de Perron-Frobenius à  $B$ .

□

**6.5. Les graphes planaires  $P_N$ .** Les graphes  $P_N$  sont décrits comme graphes plongés dans  $\mathbb{C}$  de la façon suivante :  $V_N = V(P_N) = \{n + m\omega \mid 1 \leq n, m \leq N, n + m \leq N + 1\}$ , où  $\omega = e^{i\pi/3}$ .  $E_N = E(P_N)$  est l'ensemble des paires  $z, z' \in V_N$  telles que  $|z - z'| = 1$ . Autrement dit  $P_N$  est une triangulation d'un triangle équilatéral par des triangles équilatéraux de côtés 1.

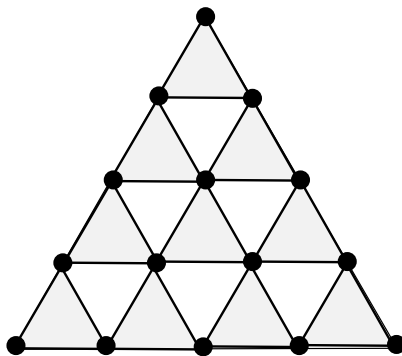


FIGURE 6. Le graphe  $P_5$

THÉORÈME 5.12.  $\nu(P_N) = N$

Comme corollaire,  $\nu$  n'est pas borné pour les graphes planaires ce qui est en contraste avec  $\mu$  qui est  $\leq 3$  pour les graphes planaires.

Pour prouver le théorème précédent, on va exhiber  $A \in M_{P_N}$  telle que  $A \geq 0$ ,  $\dim \ker(A) = N$  et  $0 \in \sigma_s(A, M_{P_N})$ .

Mais d'abord remarquons que, si  $A \in M_{P_N}$ ,  $\dim(\text{Ker}(A)) \leq N$  : autrement, il existerait une fonction non nulle dans  $\text{ker } A$  nulle sur l'ensemble  $B \subset V_N$  défini par :

$$B = \{1 + \omega, 2 + \omega, \dots, N + \omega\} ;$$

il est clair qu'une telle fonction serait identiquement nulle car on peut calculer grâce à l'équation  $A\varphi = 0$  les valeurs de  $\varphi$  sur tous les sommets à partir des valeurs sur  $B$ .

L'exemple le plus simple est une matrice  $A$  à coefficients réels :

$$Af(z) = \sum_{z' \sim z} f(z') + \frac{d(z)}{2} f(z) ,$$

où  $d(z)$  est le degré  $z$  ( $d(z) = 2, 4$  ou  $6$  suivant la position de  $z$ ).

Maintenant, si  $D : \mathbb{C}^{V_N} \rightarrow \mathbb{C}^{V_N}$  est définie par :

$$Df(z) = f(z) + f(z + 1) + f(z + \omega)$$

(ou  $Df(z) = 0$  si  $z + 1$  et  $z + \omega$  ne sont pas dans  $V_N$ ), alors on vérifie facilement que  $A = D^*D$ . Cela implique que  $A \geq 0$  et  $\text{ker}(A) = \text{ker}(D)$ . De plus, c'est un exercice facile de vérifier que :  $\dim(\text{ker}(D)) = N$ . Plus précisément, il y a une base de  $\text{ker } D$  formée des

$$\varphi_l \quad (l = 1, \dots, N)$$

où  $\varphi_l(i + \omega) = \delta_{i,l}$ .

On peut vérifier sans trop de mal la propriété de transversalité ([Col96]).

### 6.6. Preuve du théorème 5.10.

**DÉFINITION 5.5.** *Pour un graphe  $G = (V, E)$ ,  $M_{G,n}$  est l'ensemble des opérateurs de Schrödinger vectoriels sur  $X = \bigoplus_{i \in V} \mathbb{C}^n$  : ce sont les opérateurs autoadjoints  $A = (A_{i,j})$  sur  $X$  tels que les  $A_{i,j}$  sont inversibles si  $\{i, j\} \in E$  et nuls si  $i \neq j$  et  $\{i, j\} \notin E$ .*

Si  $\Gamma = G \times G_1$ , un opérateur de  $M_\Gamma$  s'identifie naturellement à un élément de  $M_{G, \#V(G_1)}$ .

Le théorème 5.10 sera une conséquence simple du :

**THÉORÈME 5.13.** *Si  $A \in M_{T,n}$  où  $T$  est un arbre dont les sommets sont de degré  $\leq 3$ ,  $\dim \text{ker}(A - \lambda_1(A)) \leq n$ .*

*De plus, si  $\dim \text{ker}(A - \lambda_k(A)) \geq 2n + 1$ , il existe  $\{i, j\} \in E(T)$  et  $\varphi \in \text{ker}(A - \lambda_k)$  tels que, si  $T_1$  et  $T_2$  sont les 2 composantes connexes de  $T$  privé de l'arête  $\{i, j\}$ , alors :*

(i)  $\varphi(i) = \varphi(j) = 0$

(ii) il existe  $a \in V(T_1)$  et  $b \in V(T_2)$  tels que  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\varphi(b) \neq 0$ .

6.6.1. *Un lemme crucial.*

LEMME 5.2. *Soit  $G = (V, E)$  un graphe fini connexe et  $\{1, 2\} \in E(G)$  tel que  $G' = (V, E \setminus \{1, 2\})$  n'est pas connexe. Soit  $A \in M_{G,n}$ ,  $F = \ker A$ , et soit  $r : F \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$  donnée par :*

$$r(\varphi) = (\varphi(1), \varphi(2)) .$$

Alors  $\dim r(F) \leq n$ .

*Preuve.* –

La preuve est basée sur une formule de Green. Soit  $V_1$  l'ensemble des sommets de la composante connexe de 1 dans  $G'$ . Pour toutes  $\varphi, \psi \in F$ , notons par  $\varphi_1, \psi_1$  les fonctions tronquées définies par  $\varphi_1(i) = \varphi(i)$  if  $i \in V_1$  et  $\varphi_1(i) = 0$  if  $i \notin V_1$  ;  $\psi_1(i) = \psi(i)$  if  $i \in V_1$  et  $\psi_1(i) = 0$  if  $i \notin V_1$ .

Calculons explicitement le membre de droite de l'identité suivante :

$$0 = \langle A\varphi_1 | \psi_1 \rangle - \langle \varphi_1 | A\psi_1 \rangle ,$$

utilisant le fait que la seule contribution au produit scalaire est la valeur au sommet 1 (si  $i \neq 1$ ,  $A\varphi_1(i) = 0$  ou  $\psi_1(i) = 0$ ).

Calculons  $A\varphi_1(1)$  utilisant le fait que  $A\varphi(1) = 0$ ; on obtient

$$A\varphi_1(1) = -A_{1,2}(\varphi(2)) .$$

ainsi, l'expression à évaluer se réduit à

$$0 = \langle A_{1,2}(\varphi(2)) | \psi(1) \rangle - \langle \varphi(1) | A_{1,2}(\psi(2)) \rangle ,$$

que nous appellons formule de Green.

Ecrivons  $B = A_{1,2}$  et notons par  $\omega$  la forme hermitienne sur  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$  donnée par :

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{-1}(\langle Bx_2 | y_1 \rangle - \langle x_1 | By_2 \rangle) .$$

Il est facile de voir que  $\omega$  est non dégénérée, de sorte que tout sous-espace isotrope est de dimension au plus  $n$ ; en particulier, c'est vrai pour  $r(F)$ .

□

Il y a une modification du résultat précédent que nous énonçons sans preuve :



LEMME 5.3. Si  $A \in M_G$ ,  $V_1 \subset V$  et soit  $E_0 = \{e_j = \{a_j, b_j\} \in E, j = 1, \dots, n\}$  l'ensemble des arêtes  $e = \{a, b\}$  de  $G$  telles que  $a \in V_1$  et  $b \notin V_1$ ; soit  $F = \ker A$ ,  $V_0 = \{a_j, b_j, j = 1, \dots, n\}$  (on a  $\#V_0 \leq 2n$ ).

Si  $r : F \rightarrow \mathbb{C}^{V_0}$  est donné par la restriction à  $V_0$ , alors  $\dim r(F) \leq n$ .

6.6.2. *Preuve du théorème 5.13.* Soit  $T$  un arbre fini dont les sommets sont de degré  $\leq 3$ .

Pour chaque arête  $\{i, j\} \in E(T)$ , notons par  $T_{i,j}$  et  $T_{j,i}$  les 2 sous arbres de  $T$  obtenus en effaçant l'arête  $\{i, j\}$  et tels que  $i \in V(T_{i,j})$  et  $j \in V(T_{j,i})$ .

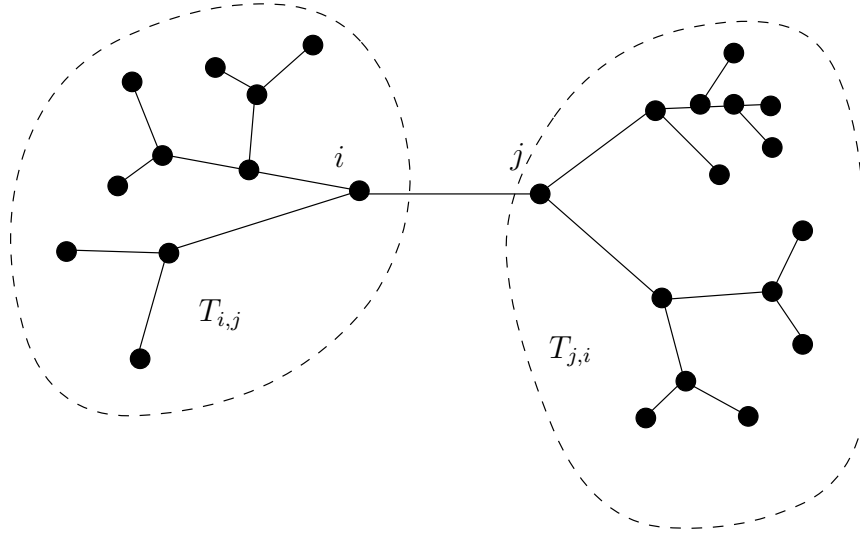


FIGURE 7. Les arbres  $T_{i,j}$  et  $T_{j,i}$

Soit  $n \geq 1$  un entier et  $A \in M_{T,n}$ .

Soit  $F = \ker A$ . Pour chaque  $\{i, j\} \in E(T)$ , notons par  $F_{i,j} \subset F$  l'espace vectoriel des  $\varphi \in F$  qui s'annulent en  $i$  et  $j$  et dont le support est dans  $V(T_{i,j})$ .

Si  $r = r_{i,j} : F \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$  est définie  $r(\varphi) = (\varphi(i), \varphi(j))$  on voit facilement que :

$$\ker r_{i,j} = F_{i,j} \oplus F_{j,i} .$$

On a alors le :

LEMME 5.4.  $\dim F > n$ , il existe  $\{i, j\} \in E(T)$  tel que

- (i)  $F_{i,j}$  est non réduit à 0,
- (ii)  $\text{degré}(i) = 3$ ,

(iii) les applications  $\epsilon_\alpha : F_{i,j} \rightarrow \mathbb{C}^n$  définies par  $\phi \rightarrow \phi(\alpha)$ , où  $\alpha$  est un des voisins de  $i$  avec  $\alpha \neq j$ , sont injectives. En particulier  $1 \leq \dim F_{i,j} \leq n$ .

COROLLAIRE 5.3. Si  $\dim F > 2n$ , il existe  $\{i, j\} \in E(T)$  telle que  $\dim F_{i,j} \geq 1$ ,  $\dim F_{j,i} \geq 1$ .

COROLLAIRE 5.4. Si  $A \geq 0$ ,  $\dim F \leq n$ .

*Preuve.*—

(Corollaire 5.3)

Choisissons  $\{i, j\}$  comme dans le lemme 5.4 et posons  $F_0 = \ker(r_{i,j})$ , on a :  $\dim F_0 \geq n + 1$  (lemme 1), et, comme  $F_0 = F_{i,j} \oplus F_{j,i}$ , et  $\dim F_{i,j} \leq n$ ,  $F_{j,i}$  est non trivial.

□

*Preuve.*—

(Corollaire 5.4)

Si  $\dim F > n$ , par (i), il existe  $\varphi \in F_{i,j} \setminus 0$ , et par (iii)  $\varphi(\alpha) \neq 0$ , où  $\alpha \neq j$  est un voisin quelconque de  $i$ . Définissons  $\psi$  par  $\psi(k) = \varphi(k)$  pour  $k \in V(T_{\alpha,i})$  et  $\psi(k) = 0$  autrement. Alors  $\psi \in \ker A$ :

$$(A\psi|\psi) = 0,$$

car  $A\psi$  s'annule là où  $\psi$  ne s'annule pas.

Posons  $Q(f) = (Af|f)$  et soit  $\delta$  la fonction sur  $V(T)$  définie par  $\delta(i) = 1$  et  $\delta(k) = 0$  si  $k \neq i$ .

Si on évalue  $Q(\psi + \epsilon\delta v)$  pour  $v \in \mathbb{C}^n$  and  $\epsilon > 0$ , on trouve :

$$Q(\psi + \epsilon\delta v) = 2\epsilon\Re(v|A_{i,\alpha}(\psi(\alpha))) + O(\epsilon^2).$$

Il est toujours possible de choisir  $v$  de sorte que

$$Q(\psi + \epsilon\delta v) < 0$$

pour  $\epsilon > 0$  assez petit (car  $A_{i,\alpha}$  est non singulière et  $\psi(\alpha) \neq 0$ ).

Cela contredit le fait que  $A \geq 0$ .

□

*Preuve.*—

(Lemme 5.4)

Choisissons une arête arbitraire  $\{i_1, j_1\}$  of  $T$ . Par le lemme 5.2, on peut supposer que  $F_{i_1, j_1}$  est non trivial (autrement, on permute  $i_1$  et  $j_1$ ).

Il est clair que  $i_1$  est de degré 2 ou 3.

Si le degré est 2 et si  $\{\alpha, j_1\}$  est l'ensemble des voisins de  $i_1$ ,  $\forall \varphi \in F_{i_1, j_1}$ ,  $\varphi(\alpha) = 0$ . On prend alors  $i_2 = \alpha$ ,  $j_2 = i_1$  et on itère.

Si le degré est 3 et si  $\{j_1, \alpha, \beta\}$  est l'ensemble des voisins de  $i_1$ , alors, si l'application  $\varphi \rightarrow \varphi(\alpha)$  n'est pas injective sur  $F_{i_1, j_1}$ , un des espaces  $F_{\alpha, i_1}$  or  $F_{\beta, i_1}$  est non trivial ; on peut supposer que c'est  $F_{\alpha, i_1}$  qui est non trivial, on pose  $i_2 = \alpha$ ,  $j_2 = i_1$  et on itère.

Cette itération va s'arrêter et donner une solution. □

Se réduisant au cas  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_k = 0$ , le théorème 5.13 est une simple reformulation des corollaires 5.3 et 5.4.

6.6.3. *Fin de la preuve du théorème 5.10.* Prouvons maintenant le théorème 5.10 :

*Preuve.* –

Soit  $G$  un graphe tel que  $la(G) = n$ ; alors, il existe un arbre  $T$  dont les sommets sont de degré  $\leq 3$  tel que  $G$  est un mineur de  $T \times K_n$ . Donc

$$\mu_k^{\mathbb{C}}(G) \leq \mu_k^{\mathbb{C}}(T \times K_n) .$$

On utilise maintenant l'identification de  $\mathbb{C}^{V(T \times K_n)}$  avec  $\bigoplus_{i \in V(T)} \mathbb{C}^n$ .

$k=1$ : dans ce cas, par le théorème 5.13, la multiplicité du fondamental de  $T \times K_n$  est  $\leq n$ .

$k$  arbitraire : si  $\mu_k^{\mathbb{C}}(T \times K_n) > 2n$ , il existe  $A \in M_{T \times K_n}$  tel que  $\dim \ker(A - \lambda_k(A)) > 2n$  et cette valeur propre  $\lambda_k$  est  $M_{T \times K_n}$ -stable.

Appliquant le théorème 5.13 (et avec les mêmes notations), notons  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$  les restrictions de  $\varphi$  à  $V(T_i)$  étendues par 0 en dehors  $T_i$ . Alors  $\varphi_i \in \ker(A - \lambda_k)$ , pour tout  $\alpha \in V(T \times K_n)$ ,  $\varepsilon_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = 0$  (on identifie ici  $\varepsilon_\alpha$  avec la forme hermitienne associée) car les supports sont disjoints, et pour tout  $\{\alpha, \beta\} \in E(T \times K_n)$ ,

$$\varepsilon'_{\alpha, \beta}(\varphi_1, \varphi_2) = 0 ,$$

et

$$\varepsilon''_{\alpha, \beta}(\varphi_1, \varphi_2) = 0 ,$$

car il n'y a pas d'arêtes  $\{\alpha, \beta\}$  pour laquelle  $\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta) \neq 0$ .

Cela contredit la transversalité.

□

## 7. PROBLÈMES

Nous présentons maintenant une liste de problèmes ouverts.

**7.1. Questions de calculabilité.** La question est de trouver des algorithmes pour calculer  $\mu(G)$  et  $\nu(G)$  à partir  $G$ .

Théoriquement, il y a des algorithmes puisqu'il s'agit de problèmes d'intersection de variétés algébriques.

Bien sûr, ce qui serait intéressant serait d'avoir des algorithmes explicites...

**7.2. Maximiser le trou spectral.** Pour différentes raisons, il est souhaitable d'avoir des matrices  $A \in O_G$  (ou  $L_G$ ) ayant un grand trou spectral  $\lambda_2 - \lambda_1$ .

Le problème est de trouver des conditions de normalisation sous lesquelles le problème soit raisonnablement posé.

De plus, il semble raisonnable que, si  $A$  maximise le trou spectral, alors la multiplicité de  $\lambda_2(A)$  est la plus grande possible.

Comparer avec [Nad88] pour le cas continu.

**7.3.  $\nu(G)$  et  $la(G)$ .** Des résultats généraux de Robertson-Seymour impliquent l'existence d'une borne

$$la(G) \leq F(\nu(G))$$

pour tous les graphes planaires. En un sens, la largeur d'arbre est la seule mesure de la complexité d'un graphe planaire. La question est de trouver une fonction  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  explicite.

**7.4. Nombres chromatiques.** Le problème le plus excitant est sûrement celui de décider la conjecture

$$C(G) \leq \mu(G) + 1 ,$$

où  $C(G)$  est le nombre chromatique de  $G$ . La preuve de cette conjecture donnerait une preuve du théorème des 4 couleurs. La conjecture d'Hadwiger implique la nôtre.

**7.5. Prescrire les spectres.** Le problème est de trouver les signatures spectrales de certains graphes simples comme les arbres.

C'est aussi de trouver des résultats généraux sur la forme de la signature spectrale : se traduit-elle toujours uniquement par des restrictions sur les suites de multiplicités ?

**7.6. Une question de Lex Schriver.** Est-il toujours vrai que

$$\mu(G) = \inf_{G < G'} m(G') ,$$

où  $m(G')$  est la multiplicité maximale de  $\lambda_2$  pour  $A \in O_{G'}$  ?

C'est vrai pour les graphes planaires, car  $m(G) = 3$  pour toute triangulation de  $S^2$  ([Moe95]).



## CHAPITRE 6

# DISCRET ET CONTINU

### 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons boucler la boucle : comment revenir des spectres d'opérateurs sur les graphes aux spectres d'opérateurs de type Schrödinger sur les variétés.

Tout d'abord, nous allons décrire les résultats connus à ce jour sur les multiplicités des valeurs propres des opérateurs de Schrödinger sur les surfaces.

Dans la suite du chapitre, nous nous bornerons à décrire sans preuves quelques résultats reliant les opérateurs différentiels sur les variétés et les opérateurs sur des graphes plongés dans celles-ci.

Dans le §3, nous expliquerons comment le calcul semi-classique de l'effet tunnel utilise un graphe sous-jacent, le graphe d'*Agmon* et un opérateur différentiel sur ce graphe.

Dans le §4, nous nous intéressons à la question centrale de l'approximation du spectre d'un opérateur de Schrödinger arbitraire par le spectre d'un opérateur sur un graphe : il s'agit d'une présentation naïve de quelques remarques sur la méthode des éléments finis.

### 2. MAJORATIONS DES MULTIPLICITÉS

Il s'agit dans cette section de décrire quelques résultats connus sur les multiplicités des opérateurs de type Schrödinger sur les variétés.

**2.1. La dimension 1.** Dans ce cas,  $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

opérant sur les fonctions périodiques. Les valeurs propres vérifient alors la suite d'inégalités :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \dots < \lambda_{2k} \leq \lambda_{2k+1} < \dots$$

et ce sont les seules contraintes sur une section finie du spectre [Moe76]

Ces inégalités se prouvent facilement en introduisant le spectre antipériodique  $\mu_k$  (ie les valeurs propres de  $H$  correspondant à des fonctions propres qui vérifient  $f(x+1) = -f(x)$ ) et en observant que ces 2 spectres ne se rencontrent pas. La preuve se fait alors par continuité à partir du cas  $V = 0$  ; on a ainsi les entrelacements :

$$\lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \mu_3 \leq \dots$$

**2.2. Les surfaces.** Soit  $H = \Delta_g + V$ , où  $\Delta_g$  est le laplacien d'une métrique riemannienne  $g$  sur une surface  $X$  connexe et  $V \in C^\infty(X, \mathbf{R})$ , opérant sur l'espace des fonctions sur  $X$ . On supposera, si  $X$  n'est pas compacte que  $V$  tend vers  $+\infty$  à l'infini de  $X$ . Cette hypothèse assure que le spectre est discret et s'accumule seulement en  $+\infty$ .

On note de nouveau  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  le spectre de  $H$  et  $m_k$  la multiplicité de  $\lambda_k$ .

On a alors les résultats suivants dus à Cheng, puis améliorés par Besson, Nadirashvili et Sévenec ([Che76], [Bes87], [Nad88], [Sév94], [Col87], [NHH97]) :

**THÉORÈME 6.1.** *Les multiplicités  $m_k$  vérifient :*

*si  $X = S^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ ,  $m_k \leq 2k - 3$  pour  $k \geq 3$ ,*

*si  $X = P^2(\mathbf{R})$  ou  $K_2$  (la bouteille de Klein),  $m_k \leq 2k + 1$ ,*

*si  $X = T^2$ ,  $m_k \leq 2k + 2$ ,*

*enfin si la caractéristique d'Euler  $\chi(X)$  est  $< 0$ ,  $m_k \leq 2k - 2\chi(X)$ .*

*Ces inégalités sont optimales pour  $k = 2$  et  $\chi(X) \geq 0$ . L'optimalité est obtenue pour des métriques à courbure constante, sauf pour  $K^2$  où une chirurgie à partir de  $P^2$  est nécessaire [Col87].*

**2.3. Une idée des preuves.** La preuve de Cheng et ses améliorations reposent sur le théorème de Courant sur les domaines nodaux [CH53] p. 451-453, voir aussi la section 3 :

**THÉORÈME 6.2.** *Si  $\varphi \in E_{\lambda_k} \setminus 0$ , alors le nombre de composantes connexes de  $X \setminus \varphi^{-1}(0)$  est inférieur ou égal à  $k$ .*

*Preuve.*—

On a besoin en outre d'un résultat sur la structure locale des zéros d'une fonction propre, si  $H\varphi = \lambda\varphi$ , au voisinage d'un zéro de  $\varphi$ , on a, dans des coordonnées orthonormales en  $z_o$  :

$$\varphi(z) = P_N(z) + O(|z|^{N+1}),$$

où  $P_N$  est un polynôme homogène harmonique de degré  $N$ .



De cela, on déduit que  $\varphi^{-1}(0)$  est un graphe  $\Gamma$  plongé dans  $X$  dont les sommets sont de degré pair.

On note alors  $\Omega_i$  les composantes connexes de  $X \setminus \varphi^{-1}(0)$  et  $S$  l'ensemble des sommets  $s$  de ce graphe, dont on note par  $v(s)$  les degrés. Le calcul de la caractéristique d'Euler de  $X$  donne :

$$\chi(X) = \sum_i \chi(\Omega_i) + \sum_s \left(1 - \frac{v(s)}{2}\right).$$

Dans le second membre, la première somme est  $\leq k$  d'après le théorème de Courant. La seconde est rendue petite en utilisant le fait que si  $E_{\lambda_k}$  est de dimension  $m_k$ , il existe par l'algèbre linéaire élémentaire une fonction  $\varphi \in E_{\lambda_k} \setminus 0$  telle que  $\varphi$  ait en  $z_o$  (choisi) un zéro d'ordre  $E(\frac{m_k}{2})$  (pour une solution de  $H\varphi = \lambda\varphi$  s'annuler à l'ordre  $N$  lorsqu'on s'annule à l'ordre  $N - 1$  nécessite 2 conditions). On obtient ainsi la majoration :

$$m_k \leq 2k - 2\chi(X) + 3.$$

Bien sûr, les améliorations ultérieures de Besson, Nadi-rashvili et Sévenec demandent des arguments plus fins.

□

Notons en particulier  $m(X)$  le sup des multiplicités de  $\lambda_2$  pour un opérateur de Schrödinger sur  $X$ . On a :

$$m(\mathbb{R}) = 1, \quad m(S^1) = 2, \quad m(S^2) = 3, \quad m(K^2) = m(P^2) = 5, \quad m(T^2) = 6,$$

$$m(X_\chi) \leq 4 - 2\chi(\chi < 0),$$

et ces résultats sont compatibles avec la conjecture suivante : **Conjecture [Col87]** *Si  $C(X)$  désigne le nombre chromatique de  $X$  (voir [Rin74]), on a :*

$$m(X) + 1 = C(X).$$

Remarquons qu'une preuve générale de cette conjecture redonnerait une preuve du théorème des 4 couleurs !!

### 3. L'EFFET TUNNEL SEMI-CLASSIQUE

Pour plus détails sur ce §, voir [Col97a].

**3.1. Description du problème.** Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne que l'on supposera compacte connexe de dimension  $d$ . Soit  $W \in C^\infty(X, \mathbb{R})$  telle que  $\inf W = 0$  et les minimas  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\} = W^{-1}(0)$  (les puits) soient non dégénérés.

On souhaite décrire le spectre de

$$\hat{H} = \frac{h^2}{2} \Delta_g + W$$

lorsque  $h \rightarrow 0^+$ .

Soient

$$\Omega_i = \frac{h^2}{2} \Delta_{g_i} + \frac{1}{2} W''(A_i)(x)$$

les oscillateurs harmoniques sur  $T_{A_i}X$  ( $g_i$  métrique euclidienne sur l'espace tangent associée à  $g$ ) que nous pouvons appeler oscillateurs harmoniques osculateurs.

Soient  $\Sigma_i(h) = \{h \cdot \mu_{k,i}\}$  les spectres des  $\Omega_i$ . C'est un résultat banal que, si on ordonne la suite des  $\mu_{k,i}$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq k$  suivant la convention habituelle pour les spectres sous la forme

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots,$$

alors la  $n$ -ème valeur propre ( $n$  fixé)  $\lambda_n(h)$  de  $\hat{H}_h$  vérifie :

$$\lambda_n(h) = \mu_n h + o(h).$$

Si on souhaite des renseignements plus précis, on peut obtenir la suite des  $\lambda_n(h)$  modulo  $O(h^\infty)$  comme réunion ordonnée des spectres des oscillateurs harmoniques locaux : les opérateurs  $\hat{H}_i = \hat{H}$  sur un petit disque centré en chaque  $A_i$  avec condition au bord de Dirichlet.

Si maintenant, on se place dans le cas où les  $\hat{H}_i$  ont des spectres indistinguables modulo  $O(h^\infty)$ , il faut recourir à une approximation plus fine prenant en compte les effets exponentiellement petits dûs à l'*effet tunnel* entre les *puits* (voisines des  $A_i$ ).

Intéressons-nous plus précisément aux  $N$  premières valeurs propres de  $\hat{H}$  sous l'hypothèse que :

$$(\star) \sup_i \{\mu_{1,i}\} < \inf_i \{\mu_{2,i}\}.$$

Soit  $F$  le sous-espace de dimension  $N$  de  $L^2(X)$  somme des espaces propres associés aux  $N$  premières valeurs propres de  $\hat{H}$ .

L'espace  $F$ , qui dépend de  $h$ , admet une base orthonormée  $\varphi_i$  formé de fonctions localisées près des  $A_i$  au sens que la norme  $L^2$  de  $\varphi_i$  dans le complémentaire d'un voisinage de  $A_i$  est  $O(e^{-C/h})$  avec  $C > 0$ .

Le but est d'exprimer la matrice  $M$  de  $\hat{H}$  dans la base des  $\varphi_i$ .

Il faut penser les  $\varphi_i$  comme des gaussiennes centrées aux  $A_i$ .

Plus précisément, on montre que l'exposant de ces gaussiennes est donné par la distance d'Agmon.

**3.2. Distance d'Agmon.** Soit  $G = Wg$ . Cette métrique riemannienne singulière aux  $A_i$  s'appelle métrique d'Agmon. On note  $D$  la distance associée.

Soit  $K(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - W$ ,  $\mathcal{X}_K$  le gradient symplectique de  $K$ , qui admet un point singulier hyperbolique en  $(A_i, 0)$ . Soit  $\Lambda_i$  la variété instable de  $(A_i, 0)$ , alors  $l_i(x) = D(A_i, x)$  est une fonction génératrice de  $\Lambda_i$ .

Cela résulte du fait que les surfaces :  $K = 0$  et  $G^* = 1$  sont confondues (ici  $G^*$  désigne la transformée de Legendre de  $G$ ).

La distance d'Agmon étant donné, on lui associe un graphe que j'appelle *graphe d'Agmon*.

Si  $S_o = \inf_{j \neq l} D(A_j, A_k)$ , le graphe  $\Gamma_{g,W}$  est construit ainsi : ses sommets sont les puits  $A_i$  et il y a un arête entre 2 sommets  $A_j$  et  $A_k$  si  $D(A_j, A_k) = S_o$ .

On a le :

LEMME 6.1. *Le graphe d'Agmon est plongé dans  $X$ .*

*Preuve.* –

On choisit, pour chaque  $\{j, k\} \in E$ , une géodésique de longueur  $S_o$  pour  $D$  qui joint  $A_j$  à  $A_k$ . Il suffit de montrer que ces géodésiques ne se rencontrent pas. Traitons le cas d'une intersection transversale : si  $M$  est le point d'intersection des géodésiques  $l_{1,2}$  qui joint  $A_1$  à  $A_2$  et  $l_{3,4}$  qui joint  $A_3$  à  $A_4$ , on considère les 4 sommes

$$D(A_j, M) + D(A_k, M)$$

où  $j \in \{1, 2\}$ ,  $k \in \{3, 4\}$ .

Ces sommes valent  $4S_o$ . L'une au moins est  $\leq S_o$ , soit  $D(A_1, M) + D(A_3, M)$  : la distance de  $A_1$  à  $A_3$  est alors  $< S_o$ , d'où la contradiction. □

**3.3. Approximation des valeurs propres de  $\hat{H}$ .** On a alors les estimations suivantes :

$$(6) \quad \exists M > 0, \varphi_i = O(h^{-M} e^{-l_i(x)/h}),$$

et dans le complémentaire du cut-locus pour  $G$  :

$$(7) \quad \varphi_i = h^{-\frac{d}{4}} a_i(x, h) e^{-\frac{l_i(x)}{h}},$$

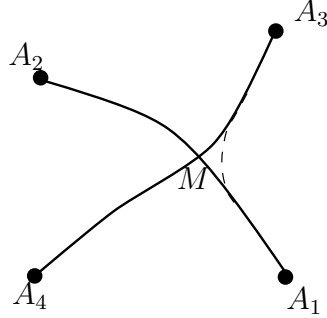


FIGURE 1. Le graphe d'Agmon est plongé

où

$$a_i(x, h) = a_{0,i}(x) + O(h)$$

et  $a_0 > 0$ .

De ceci, on déduit que la matrice  $M$  de  $\hat{H}$  dans la base  $\varphi_i$  est de la forme

$$M = \text{diag}(\tilde{\mu}_j) + B + O(e^{-\frac{S_0 + \varepsilon}{h}}),$$

où  $\tilde{\mu}_j$  est égale modulo  $O(h^\infty)$  à la première valeur propre de  $\hat{H}_i$ ;  $b_{i,j} = 0$  si  $\{i, j\}$  n'est pas une arête de  $\Gamma_{g,W}$  ou  $i \neq j$  et sinon

$$b_{i,j}(h) = -c_{i,j} \sqrt{h} e^{-\frac{S_0}{h}} (1 + O(h))$$

avec  $c_{i,j} > 0$

La chose importante est que les termes dominants de  $M$  forme une matrice de  $O_\Gamma$  et que c'est cette matrice qui donne les  $N$  premières valeurs propres de  $\hat{H}$  à  $O(e^{-\frac{S_0 + \varepsilon}{h}})$  près.

Bien sûr, ce qui est difficile est d'obtenir les estimations 6 et 7.

**3.4. Applications.** La principale application est le plongement de graphes dans les surfaces :

**THÉORÈME 6.3.** *Si  $\Gamma$  se plonge dans la variété compacte  $X$ , il existe un opérateur de Schrödinger  $\hat{H}$  sur  $X$  dont la seconde valeur propre est de multiplicité  $\mu(\Gamma)$ . En particulier, cette multiplicité est arbitrairement grande dès que  $X$  est de dimension  $\geq 3$ . On a de plus une borne linéaire de  $\mu(\Gamma)$  en fonction du genre du graphe  $\Gamma$  (le genre d'un graphe  $\Gamma$  est le plus petit genre d'une surface où  $\Gamma$  se plonge).*

## 4. LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS REVISITÉE

**4.1. Introduction.** Soit maintenant  $X$  une variété riemannienne compacte et  $W$  une fonction  $C^\infty$  à valeurs réelles. Peut-on approcher

les valeurs propres de l'opérateur  $\hat{H} = \Delta_g + W$  au moyen de spectres de matrices de  $O_\Gamma$  pour des graphes  $\Gamma$  convenables ?

La réponse est oui et nécessite quelques outils. Nous nous restreindrons à la dimension 2 où le contrôle des triangulations est simple. Voir [CM90].

L'idée est la suivante, on considère une suite de triangulations géodésiques  $T_N$  de  $X$  dont le module  $|T_N|$  (plus grand diamètre des triangles) tend vers 0.

On applique alors la méthode des éléments finis : considérons l'espace  $F_N$  des fonctions qui sont continues affines par morceaux sur le 1-squelette  $\Gamma_{T_N}$  de  $T_N$  et prolongées harmoniquement à l'intérieur des triangles. On munit  $F_N$  de la norme  $L^2$  induite par celle de  $X$  ainsi que de la forme quadratique  $q_N$  induite par la forme quadratique de l'opérateur de départ : ce qui donne lieu à un opérateur  $A_N$  sur  $F_N$  dont on calcule le spectre. Plusieurs problèmes se posent : la convergence quand  $N$  tend vers l'infini; l'appartenance à  $O_\Gamma$ .

Les deux problèmes dépendent de ce que les triangles ne sont s'aplatissent pas lorsque  $N$  tend vers l'infini : pour toute arête, la somme des 2 angles qui voient cette arête doit être  $< \pi$ . En particulier, c'est le cas si la triangulation n'a que des angles aigus; qu'une telle triangulation existe et même avec tous les angles  $\leq 2\pi/5 + \varepsilon$  est démontré dans [CM90].

**4.2. Analyse fonctionnelle.** Soit  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  un espace de Hilbert,  $A$  un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte dont le spectre vérifie :

$$(H1) \quad 1 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \leq a < a + b \leq \lambda_{N+1} \leq \dots ,$$

les estimations que l'on va donner sont uniformes lorsque  $a, b > 0$  sont fixés.

Soit  $F$  le sous-espace de dimension  $N$  de  $\mathcal{H}$  engendré par les vecteurs propres associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ . Soit maintenant  $q$  la forme quadratique associée à  $A$ ,  $\|\cdot\|_1^2 = q(\cdot)$ , et  $\mathcal{K}$  le domaine de  $q$ .

Soient  $\mathcal{X}$  un ensemble d'éléments notés  $T$ , supposons définie un module  $|T| > 0$  et  $F_T \subset \mathcal{K}$  un sous-espace tel que, si  $\pi_T : F \rightarrow E_T$  est la projection  $\|\cdot\|_1$ -orthogonale, on ait :

$$(H2) \quad \|x - \pi_T x\|_1 = O(|T|) \|x\|_1 .$$

Soit alors  $q_T$  la restriction de  $q$  à  $F_T$  et  $A_T : F_T \rightarrow F_T$  l'opérateur auto-adjoint associé.

Alors, on a :

THÉORÈME 6.4. *Sous (H1) et (H2), on a :*

$$\forall 1 \leq j \leq N, \lambda_j \leq \lambda_j(A_T) \leq \lambda_j + O(|T|^2) .$$

On peut améliorer ce théorème : le même énoncé reste vrai si on remplace  $q_T$  et  $\|\cdot\|_{F_T}$  par des normes équivalentes à un facteur  $O(|T|^2)$  près.

On a aussi des énoncés pour la proximité de  $F$  et de l'espace analogue pour  $A_T$  : leur angle tend vers 0 en  $O(|T|)$ .

**4.3. Triangulations.** Maintenant, on veut des réalisations concrètes de  $F_T$  où  $T$  va être une triangulation totalement géodésique d'une surface riemannienne  $(X, g)$  et  $\mathcal{X}$  une suite de triangulations.

On définit alors  $|T|$  comme le sup des diamètres des triangles de  $T$  et, si  $\Gamma_T = (V_T, E_T)$  est le 1-squelette de  $T$ , on définit  $F_T$ , isomorphe à  $\mathbb{R}^{V_T}$  comme l'espace des fonctions continues sur  $X$  qui sont affines sur les arêtes de  $T$  et harmoniques dans chaque face. L'isomorphisme avec  $\mathbb{R}^{V_T}$  est donné par l'évaluation aux sommets  $V_T$ .

On prend comme norme

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in V_T} A_i f(i)^2 ,$$

où  $A_i$  est l'aire du domaine de Voronoï associé à la donnée de  $V_T$ .

Soit aussi

$$\rho(\tau) = \frac{\text{Aire}(\tau)}{\text{Diametre}(\tau)^2} ,$$

et  $\rho(T) = \inf_{\tau} \rho(\tau)$  où le inf porte sur les triangles  $\tau$  de  $T$ .

Alors, on a le

THÉORÈME 6.5. *Si  $\forall T \in \mathcal{X}$ ,  $\rho(T) \geq \rho_o > 0$ , alors on est dans les conditions d'application du résultat de la section 4.2.; de plus, si les angles des triangles de  $T$  sont tous  $\leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  fixé), les opérateurs  $A_T$  sont dans  $O_{\Gamma_T}$ .*

Nous allons voir ce qui se passe lorsque  $g$  est localement euclidienne : soit  $\tau = (A, B, C)$  un triangle de  $\mathbb{R}^2$  euclidien; supposons

$$\text{Diam}(\tau) = \varepsilon \text{ et Aire}(\tau) = \alpha ,$$

on a alors, pour  $f$  de classe  $C^2$ , avec des  $O$  qui ne dépendent que de bornes sur les dérivées de  $f$  et si  $f_{\tau}$  est la fonction affine sur  $\tau$  qui à les mêmes valeurs que  $f$  aux sommets :

$$\sup_{\tau} |f - f_{\tau}| = O(\varepsilon) ,$$

et

$$\sup_{\tau} \|df - df_{\tau}\| = O\left(\frac{\varepsilon^3}{\alpha}\right).$$

On en déduit :

$$\int_{\tau} |f - f_{\tau}|^2 = O(\varepsilon^4),$$

$$\int_{\tau} \|df - df_{\tau}\|^2 = O\left(\frac{\varepsilon^4}{\rho(\tau)}\right).$$

On a les estimations voulues si on se rappelle que le nombre de triangles est

$$O\left(\frac{1}{\rho_o |T|^2}\right).$$

Maintenant, si  $g$  est euclidienne, on a, pour  $f$  affine sur  $\tau$  et en notant  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles de  $\tau$  :

$$\int_{\tau} \|df\|_g^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{(f(B) - f(C))^2}{\tan \alpha} + \frac{(f(C) - f(A))^2}{\tan \beta} + \frac{(f(A) - f(B))^2}{\tan \gamma} \right).$$

Ce qui prouve que, dans ce cas, la forme quadratique considérée est dans  $O_{\Gamma}$  dès que, pour chaque arête  $\{i, j\}$  de  $\Gamma$ , en notant  $\omega$  et  $\omega'$  les 2 angles qui voient cette arête,

$$\omega + \omega' < \pi.$$

**4.4. Applications.** Si  $X$  est une variété compacte, on définit  $\mu(X)$  par analogie avec le  $\mu(\Gamma)$  :  $\mu(X)$  est la plus grande multiplicité possible pour le  $\lambda_2$  d'un opérateur de Schrödinger sur  $\Gamma$  satisfaisant la condition de transversalité suivante :  $(\star)$  :  $W_{\lambda_2, n}$  est transversale en  $\hat{H}$  aux opérateurs de Schrödinger sur  $X$ .

On peut expliciter cette condition en termes d'une base  $f_i$  de l'espace propre. Notons  $F_{i,j} = f_i f_j$  et  $G_{i,j} = df_i \otimes df_j + df_j \otimes df_i$ , la condition  $(\star)$  se réécrit :

$(\star)$  les  $F_{i,j} \oplus G_{i,j}$ ,  $(1 \leq i \leq j \leq \mu)$  sont linéairement indépendantes.

Comme application principale, on a le

**THÉORÈME 6.6.** *Pour tout  $X$ , on a*

$$\mu(X) = \sup\{\mu(\Gamma) \mid \Gamma \text{ se plonge dans } X\}.$$

On peut de même travailler avec  $\nu$  et Schrödinger avec champ magnétique et on a l'analogie magnétique du théorème précédent qui ne dit rien de vraiment intéressant, car on peut trouver des graphes planaires de  $\nu$  arbitraire; donc  $\nu(X) = +\infty$  pour toute variété de dimension  $\geq 2$ .

Cependant, on peut remarquer que cela peut être intéressant si on travaille sur des surfaces avec des restrictions sur la norme  $L^1$  du champ magnétique !!



## RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

### 1. RÉPONSE D'UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons un certain nombre de résultats généraux sur les réseaux électriques et plus particulièrement ceux qui sont planaires. Pour plus de détails, on pourra lire [Col94], [CGV96], [CIM96].

#### 1.1. Réseaux électriques.

**DÉFINITION 7.1.** *Un réseau est un graphe à bord  $G = (V, V_0, E)$  qui peut avoir des boucles et des arêtes multiples.*

**DÉFINITION 7.2.** *Un réseau électrique  $(G, \rho)$  est une paire constituée d'un réseau  $G = (V, V_0, E)$  et de conductances  $\rho = (\rho_{i,j}) \in ]0, \infty[^E$ . Si  $G$  est donné, on note  $\mathcal{R}_G$  l'ensemble des conductances. Les sommets de  $V_0$  s'appellent terminaux, ceux de  $V_1 = V \setminus V_0$  sont les sommets intérieurs. On note  $n = \#V_0$ ,  $N = \#V$ ,  $n_1 = N - n = \#V_1$ .*

*Si  $x \in \mathbb{R}^V$  est un potentiel, son énergie électrique est donnée par :*

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j} (x_i - x_j)^2 .$$

*On utilisera la décomposition*

$$\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V_0} \oplus \mathbb{R}^{V_1}$$

*que l'on écrira  $x = (y, z)$ .*

*On pose  $\Delta x(i) = \sum_{j \sim i} \rho_{i,j} (x_i - x_j) (= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i})$ . On dit que  $x$  est un potentiel d'équilibre si*

$$\forall i \in V_1, \Delta x(i) = 0 .$$

Les équations des potentiels d'équilibre sont les équations d'Euler-Lagrange de  $\mathcal{E}$  lorsque les  $y_j$  sont donnés pour  $j \in V_0$ . Si  $\mathcal{E}(y, z)$  est l'énergie, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_i}(y, z) = 0 .$$

De plus, si on définit le courant électrique  $I_{i,j}$  de  $i$  vers  $j$  sur l'arête  $\{i, j\}$  par :

$$I_{i,j} = \rho_{i,j}(x_i - x_j)$$

(les courants descendent les potentiels), la condition d'équilibre au sommet  $i$  équivaut à la loi de Kirchoff qui affirme que la somme des courants sortant de  $i$ ,  $-\sum_{j \sim i} I_{i,j}$ , est nulle.

### 1.2. Réponses.

**PROPOSITION 7.1.** *Si  $y \in \mathbb{R}^{V_0}$  est donné et si  $G$  est connexe et  $V_0 \neq \emptyset$ , il existe un unique potentiel d'équilibre  $x = (y, z) \in \mathbb{R}^V$  qui vaut  $y$  sur  $V_0$ . Le potentiel  $z$  est alors une fonction linéaire de  $y$  :  $z = z(y)$ .*

*Preuve.*—

Les équations d'Euler sont un système linéaire  $n_1 \times n_1$ . Il suffit donc de prouver l'unicité qui résulte du *principe du maximum* : si  $x$  est un potentiel d'équilibre,  $x$  est constant au voisinage de tout sommet  $i$  de  $V_1$  où il atteint un maximum ou un minimum local ; en effet la condition d'équilibre au sommet  $i$  dit que  $x_i$  est une valeur moyenne pondérée des  $x_j$  pour  $j$  voisin de  $i$ .

□

**DÉFINITION 7.3.** *La réponse de  $(G, \rho)$  est l'application linéaire  $L = L_{G,\rho}$  qui, à  $y \in \mathbb{R}^{V_0}$ , associe les courants sortants par les sommets  $i \in V_0$ .*

$$I_i = L(y)_i = - \sum_{j \sim i} \rho_{i,j}(x_i - x_j)$$

où  $x = (y, z)$  est un potentiel d'équilibre.

On note  $\Sigma_{V_0}$  l'ensemble des applications symétriques  $A$  de  $\mathbb{R}^{V_0}$  telles que  $A1 = 0$ .

On note  $\Phi_G : \mathcal{R}_G \rightarrow \Sigma_{V_0}$  l'application qui, à  $\rho$ , associe  $L_{G,\rho}$ .

Deux réseaux électriques  $(G, \rho)$ ,  $(G', \rho')$  seront dits électriquement équivalents s'ils ont même  $V_0$  et même réponse.

Le résultat principal est alors le :

**THÉORÈME 7.1.** *La réponse  $L$  de  $(G, \rho)$  est une application symétrique de  $\mathbb{R}^{V_0}$  (potentiels) dans  $\mathbb{R}^{V_0}$  (courants). Elle vérifie  $L(1) = 0$  (donc  $L_{G,\rho} \in \Sigma_{V_0}$ ) et  $\forall i, j \in V_0$ ,  $l_{i,j} \geq 0$ .  $l_{i,j}$  est  $> 0$  si les sommets  $i$  et  $j$  sont connectés par un chemin de  $G$  qui ne coupe  $V_0$  qu'en  $i$  et  $j$ . Toute endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^{V_0}$  vérifiant les conditions précédentes est la réponse de réseaux électriques.*

*Preuve.* –

Si on pose  $\mathcal{F}(y) = \mathcal{E}(y, z(y))$ , on a :

$$I_i = -\frac{\partial \mathcal{F}(y)}{\partial y_i}.$$

En effet :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_i}(y, z(y)) + \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_j}(y, z(y)) \frac{\partial z_j}{\partial y_i}$$

et cette dernière somme est nulle, car le potentiel est d'équilibre.

On en déduit que  $L$  est l'application linéaire associée à la forme quadratique  $\mathcal{F}$ .

□

### 1.3. Connections.

**DÉFINITION 7.4.** Soient  $A$  et  $B$  2 parties disjointes de  $V_0$  ayant même nombre d'éléments  $k$  ; on dira que  $(A, B)$  est  $G$ -connectée s'il existe  $k$  chemins  $\gamma_i$  de  $G$  2 à 2 disjointes d'origine dans  $A$  et d'extrémités dans  $B$  et ne rencontrant  $V_0$  qu'en leurs extrémités.

Un tel ensemble de chemins s'appelle une  $G$ -connection. On note  $\mathcal{C}(A, B)$  leur ensemble.

Les bijections  $\sigma$  de  $A$  sur  $B$  associées à une telle famille de chemins s'appellent  $G$ -bijections.

On alors la :

**PROPOSITION 7.2.** Soit  $L_{A,B}$  la sous-matrice  $A \times B$  de  $L$  qui décrit les courants sortant par  $B$  lorsqu'on applique un potentiel nul hors de  $A$ . Si  $L_{A,B}$  est non-singulière,  $(A, B)$  est  $G$ -connectée.

*Preuve.* –

On applique le théorème de Whitney-Menger ([**Ber67**] p. 199) aux sommets  $a$  et  $b$  du graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un sommet  $a$  joint à tous les sommets de  $A$ , un sommet  $b$  joint à tous ceux de  $B$  et en ôtant les sommets de  $V_0 \setminus (A \cup B)$ . Si  $G$  ne connecte pas  $A$  et  $B$ , on montre ainsi qu'il existe un choix de  $q < k$  sommets de  $G$  privé des sommets de  $V_0 \setminus \{A \cup B\}$ , qui, si on les ôte, déconnecte  $A$  de  $B$  (certains de ces sommets peuvent être dans  $A$  ou  $B$ ).

Il est alors clair que la matrice  $L_{A,B}$  se factorise par une application dans  $\mathbb{R}^q$  et donc est singulière : en effet on peut commencer par déterminer le potentiel d'équilibre sur ces  $q$  sommets, puis à partir de cette seule donnée déterminer les courants sortants par  $B$ .

□

La réciproque n'est pas vraie en général. Soit  $\sigma$  et  $\tau$  2  $G$ -bijections telles que  $\sigma^{-1} \circ \tau$  soit de signature  $-1$ , alors il existe  $\rho$  tel que  $L_{A,B}$  soit singulière pour  $(G, \rho)$ . On a cependant la :

**PROPOSITION 7.3.** ([CIM96]) a) Si  $(A, B)$  est  $G$ -connectée et que, pour toutes  $G$ -bijections  $\sigma, \tau$  de  $A$  sur  $B$ , la signature de  $\tau^{-1} \circ \sigma$  soit  $+1$ , alors  $L_{A,B}$  est non singulière et son déterminant (calculé en identifiant  $A$  et  $B$  au moyen d'une  $G$ -bijection) est positif.

b) Si cela n'est pas le cas, il existe  $\rho$  tel que  $L_{A,B}$  soit singulière.

*Preuve.* –

a) La preuve résulte d'une formule explicite pour le déterminant de  $L_{A,B}$ . On peut donner une preuve géométrique directe pour  $k = 2$  et dans le cas des réseaux circulaires planaires ([Col94]).

Si  $X = Y \oplus Z$  et

$$M = \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix}$$

est un endomorphisme de  $X$  tel que  $K$  est non singulière, on définit la *réduite de Schur*  $M/K$  de  $M$  par  $M/K = F - GK^{-1}H$  qui est un endomorphisme de  $Y$ . Si  $M$  est symétrique,  $M/K$  aussi.

On a alors

$$\det M = \det (M/K) \det K .$$

En effet,  $M = \Phi \circ \Psi$  avec  $\Psi(y, z) = (y, Hy + Kz)$  et  $\Phi(y, z) = ((M/K)y + GK^{-1}Hz, z)$ .

Si  $A, B \subset V_0$  sont disjoints et de même cardinal  $k$ , on identifie  $A$  et  $B$  au moyen de bijections avec  $\{1, \dots, k\}$ . On pose alors  $Y = \mathbb{R}^A = \mathbb{R}^B = \mathbb{R}^k$  et  $Z = \mathbb{R}^{V_1}$ . Soit  $\Delta_{A,B}$  l'endomorphisme de  $Y \oplus Z$  obtenu en appliquant  $\Delta$  aux potentiels nuls sur  $V_0 \setminus A$  et en considérant les courants aux sommets  $V_1 \cup B$ . Soit  $\Delta_{Dirichlet} : Z \rightarrow Z$  le laplacien de Dirichlet obtenu en donnant la valeur 0 à  $y$ .

On a alors :

$$L_{A,B} = -\Delta_{A,B}/\Delta_{Dirichlet} .$$

On a donc :

$$\det L_{A,B} = (-1)^k \frac{\det \Delta_{A,B}}{\det \Delta_{Dirichlet}} .$$

Comme le déterminant de  $\Delta_{Dirichlet}$  est  $> 0$ , le signe de  $\det L_{A,B}$  est celui de  $(-1)^k \det \Delta_{A,B}$ .

On a la formule suivante :

$$\det \Delta_{A,B} = (-1)^k \sum_{\alpha \in C(A,B)} \varepsilon(\sigma) \prod_{\{i,j\} \in E(\alpha)} \rho_{i,j} \det \Delta_{Dirichlet}^\alpha ,$$

où  $\alpha$  est une  $G$ -connection de  $A$  à  $B$  induisant la permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, k\}$  et  $\Delta_{Dirichlet}^\alpha$  est le laplacien de Dirichlet pour  $G$  privé des sommets de  $\alpha$ .

Pour cela, on pose  $m = k + \#V_1$  et on écrit brutalement

$$\det \Delta_{A,B} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \varepsilon(\sigma) \rho_{1,\sigma(1)} \cdots \rho_{m,\sigma(m)} ,$$

on décompose  $\sigma = \varphi \circ \mu$  où  $\varphi$  est la restriction de  $\sigma$  à la réunion  $W$  des cycles de  $\sigma$  qui contiennent  $\{1, \dots, k\}$  et  $\mu$  la restriction de  $\sigma$  au complémentaire. On voit que le produit des termes  $\rho_{i,\sigma(i)}$  pour  $i \in W$  est non nul si et seulement si les  $\{i, \sigma(i)\}$  pour  $i \in W$  forment une  $G$ -connection  $\alpha$  de  $A$  à  $B$ . Une évaluation des signatures donne sans mal le résultat cherché.

b) Réciproquement, il suffit de prendre  $\rho$  proche de 0 sur les arêtes n'appartenant pas à la  $G$ -connection pour fabriquer une matrice  $L_{A,B}$  ayant tous ses coefficients petits à l'exception de ceux qui correspondent à des paires de sommets  $G$ -connectés qui ont des limites  $> 0$ . Le signe relatif des déterminants est alors donné par la signature de la permutation de  $A$  obtenue en composant les 2  $G$ -connections. Par connexité de  $\mathcal{R}_G$ , on obtient l'existence de  $\rho$  tel que  $L_{A,B}$  soit singulière.

□

**1.4. Interprétation symplectique.** Considérons maintenant un réseau  $(G, \rho)$  quelconque avec  $\rho_{i,j} \in \mathbb{R}$ . On peut considérer les paires  $(y, J)$  telle que  $y$  est un potentiel d'équilibre et  $J$  le courant sortant associé (dans le cas précédent, ces paires forment le graphe de la réponse  $L$ ), en général ces paires ne forment plus un graphe, mais on a :

**THÉORÈME 7.2.** *L'ensemble des paires  $(y, J)$  forment un sous-espace lagrangien de  $\mathbb{R}^{V_0} \oplus \mathbb{R}^{V_0}$  muni de la structure symplectique provenant de la dualité potentiel-courant.*

*Preuve.* –

La démonstration est une belle application de la *réduction symplectique* : si  $(E, \omega)$  est un espace symplectique de dimension  $2n$  et  $F \subset E$  un sous-espace *co-isotrope*, i.e. tel que  $F^o \subset F$  ( $F^o$  désignant l'orthogonal de  $F$  pour  $\omega$ ), on construit un nouvel espace symplectique  $(F/F^o, \bar{\omega})$  appelé espace réduit, noté  $\bar{F}$ . La forme  $\bar{\omega}$  est définie par

$$\bar{\omega}(x + F^o, y + F^o) = \omega(x, y) .$$

On note  $\pi$  la projection de  $F$  sur  $F/F^o$ . Si  $\Lambda \subset E$  est un sous-espace lagrangien de  $E$ ,  $\pi(\Lambda \cap F) = \Lambda_F$  est un sous-espace lagrangien de  $\bar{F}$ .

Ici, on prend  $E = \mathbb{R}^V \oplus \mathbb{R}^V$  qui est l'ensemble des couples potentiels-courants (duals l'un de l'autre). Puis  $F = \{((y, z), (\eta, 0))\}$ . On a alors

$$\bar{F} = \mathbb{R}^{V_0} \oplus \mathbb{R}^{V_0} .$$

Soit  $\Lambda$  le graphe de la différentielle de  $\mathcal{E}$ , i.e.  $\Lambda = \{(x_i, (\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}))\}$ . Alors la réponse est l'espace lagrangien  $\Lambda_F$ .

□ La réduction symplectique est ainsi une extension de la réduction de Schur.

**1.5. Cas non-linéaire.** Montrons que tout ce qui précède s'étend aux réseaux résistifs non-linéaires.

Tout d'abord un conducteur  $(i, j)$  non-linéaire, *orienté* de  $i$  vers  $j$ , est donné par un réponse  $v = x_i - x_j \rightarrow I = \varphi(v)$ , où  $I$  est le courant algébrique traversant le conducteur orienté. On supposera que  $\varphi$  est  $C^1$ , de dérivée partout  $> 0$ , et qu'il existe  $v_0$ , pas nécessairement égal à 0, mais unique, tel que  $\varphi(v_0) = 0$ . On définit alors l'énergie  $e_{i,j}(v)$  du conducteur soumis à la différence de potentiel  $v$  par :

$$e_{i,j}(v) = \int_{v_0}^v \varphi(w) dw .$$

Dans le cas linéaire,  $\varphi(v) = \rho_{i,j}v$ ,  $e_{i,j}(v) = \frac{1}{2}\rho_{i,j}v^2$ . Ici, on voit que  $e_{i,j}$  est  $C^2$  et que sa dérivée seconde est  $> 0$ .

On définit alors un réseau électrique comme la donnée d'un graphe  $G = (V, V_0, E)$ , où cette fois les arêtes sont supposées orientées une

fois pour toutes, et, pour chaque arête orientée  $(i, j)$ , la donnée d'une réponse  $\varphi_{i,j}$  et donc de l'énergie  $e_{i,j}(v)$ .

On définit maintenant un potentiel d'équilibre comme un potentiel  $y \in \mathbb{R}^V$  tel que les courants associés vérifient les lois de Kirchoff aux sommets intérieurs.

On a le :

**THÉORÈME 7.3.** *Si  $y \in \mathbb{R}^{V_0}$  est donné, il existe un potentiel d'équilibre unique, celui qui minimise l'énergie totale à  $y$  fixé. La réponse  $L : \mathbb{R}^{V_0} \rightarrow \mathbb{R}^{V_0}$  qui, au potentiel  $y$ , associe les courants sortants par les sommets terminaux est une variété lagrangienne  $C^1$  de  $\mathbb{R}^{V_0} \oplus \mathbb{R}^{V_0}$ , muni de la structure symplectique canonique.*

*Preuve.*—

Il suffit d'introduire l'énergie électrique totale

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{(i,j) \in E} e_{i,j}(x_i - x_j)$$

et de constater que cette fonction est strictement convexe sur l'espace affine donné par la condition que  $x$  vaille  $y$  sur  $V_0$ . Cela résulte du fait que la seule direction de non stricte convexité est la diagonale de  $\mathbb{R}^V$  qui n'est pas contenue dans l'espace affine considéré.

Maintenant, si  $Q(y) = \inf_z \mathcal{E}(y, z)$ , le inf est atteint pour un  $z(y)$  unique qui dépend de façon  $C^1$  de  $y$  par les fonctions implicites.

□

Comment maintenant passer du cas linéaire au cas non linéaire ? Simplement en remarquant que la différentielle en un point  $y_0 \in \mathbb{R}^{V_0}$  de la réponse  $L$  est la réponse du réseau résistif linéaire dont les conductances sont les dérivées des  $\varphi_{i,j}$  au point  $x_i - x_j$  où  $x$  est le potentiel d'équilibre pour  $y_0$ .

A toute propriété des réponses de réseaux linéaires est ainsi associée la propriété non-linéaire correspondante de la dérivée de  $L$ .

## 2. LIMITES SINGULIÈRES

**DÉFINITION 7.5.** *Si  $G = (V, V_0, E)$  est un réseau, un mineur  $G' = (V', V'_0, E')$  est un mineur du graphe  $G$  et on prend pour  $V'_0$  les sommets de  $V'$  (parties connexes de  $V$ ) qui contiennent au moins un sommet de  $V_0$ .*

**THÉORÈME 7.4.** *Soit  $G = (V, V_0, E)$ , soit  $G'$  un mineur de  $G$ . On peut plonger (voir 4.2)  $\mathcal{R}_{G'}$  dans  $\mathcal{L}_V$  et l'image est alors une strate*

de l'adhérence de  $\mathcal{R}_G$ . L'application réponse de  $\mathcal{L}_V$  dans  $\mathcal{L}_{V_0}$  est alors continue sur  $\overline{\mathcal{R}_G}$ .

*Preuve.*—

D'après la proposition 4.1, sur l'adhérence d'un cône simplicial de formes quadratiques, les topologies lagrangiennes et de la convergence simple coïncident. La forme énergie est dans le cône simplicial engendré par les  $(x_i - x_j)^2$  alors que la réponse est dans le cône simplicial engendré par les  $(y_i - y_j)^2$ .

Soit donc  $q_n \in \mathcal{R}_G$  qui converge simplement vers  $q_\infty$ . On peut bien sûr supposer que  $q_n$  est croissante.

Soit  $Q_n \in Q(\mathbb{R}^{V_0})$  les formes quadratiques associées aux réponses. Soit  $Q_\infty$  la forme quadratique non partout définie associée à la réponse de  $q_\infty$ .

On a :

$$Q_n(y) = \inf_z q_n(y, z) ,$$

où le inf porte en fait sur le compact  $K(y)$  des  $z$  tels que  $\sup_i |z_i| \leq \|y\|_\infty$ .

On peut appliquer le lemme 4.4 qui montre que  $Q_n$  converge simplement vers  $Q_\infty$ .

□

### 3. REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES

**3.1. Pavages rectangulaires.** Pour ceci voir [BSST40], [Ken95].

Soit  $P$  un pavage par des rectangles d'un polygône dont tous les côtés sont parallèles aux axes.

A un tel pavage, on associe un réseau électrique  $(G, \rho)$  et un potentiel d'équilibre sur ce réseau de la façon suivante : les sommets du réseau sont les segments horizontaux dessinés par le pavage, en particulier,  $V_0$  est l'ensemble des côtés horizontaux du polygône. Les arêtes sont les rectangles et les conductances  $\rho_{i,j}$  sont les rapports  $\frac{l}{h}$  de la largeur sur la hauteur. Le potentiel  $x$  est donné par l'ordonnée des segments horizontaux et le courant par la largeur des rectangles.

On déduit de la construction précédente le :

**THÉORÈME 7.5.** ([BSST40]) *Si un rectangle admet un pavage par des carrés, le rapport de ses deux côtés est rationnel.*

*Preuve.*—



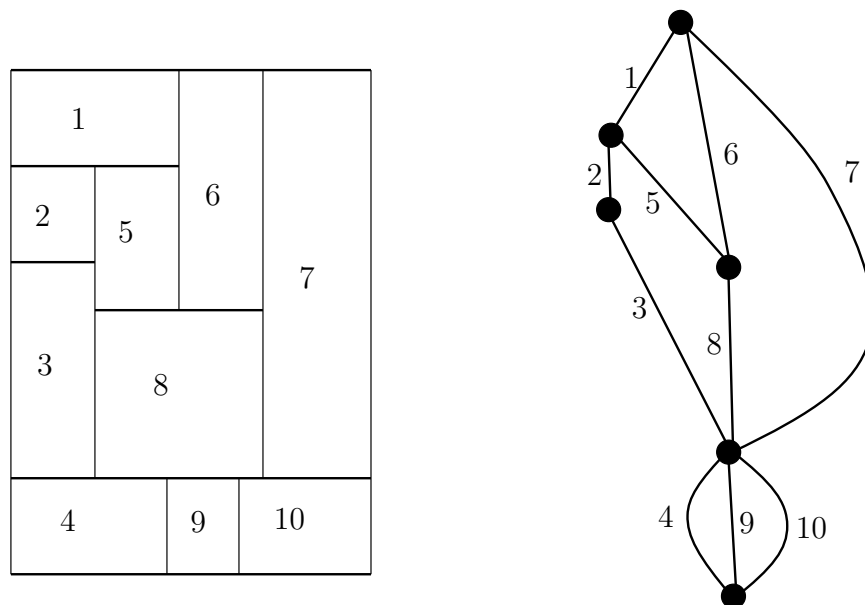


FIGURE 1. Pavage d'un rectangle et réseau associé

La construction précédente s'applique et le réseau a toutes ses conductances égales à 1. Sa conductance globale est donc rationnelle.

□

### 3.2. Graphe médial.

3.2.1. *Construction du graphe médial.* A tout réseau électrique planaire on peut associer son *graphe médial* (cf [Grü67]). Le graphe médial  $M(G)$  d'un réseau électrique planaire est construit ainsi :

1) *Considérons d'abord le cas sans bord :*

soit  $G = (V, E)$  un réseau plongé dans la sphère. On lui associe un nouveau réseau plongé  $M(G)$  le graphe médial de  $G$  construit ainsi : Les sommets de  $M(G)$  sont les milieux des arêtes de  $G$ . Si  $F$  est une face de  $G$ , on joint par une arête de  $M(G)$  les milieux de 2 côtés consécutifs de  $F$ .

On obtient ainsi un graphe tétravalent  $M(G)$ . Les faces de  $M(G)$  sont coloriées en noir si elle contient un sommet de  $G$ , en blanc sinon. 2 faces adjacentes sont de couleurs différentes.

On peut renverser la construction. Si on a un graphe tétravalent, on commence par le colorier (c'est possible de 2 façons), puis les sommets de  $G$  sont les faces noires qui sont jointes par une arête si elles ont un sommet de  $M(G)$  en commun.

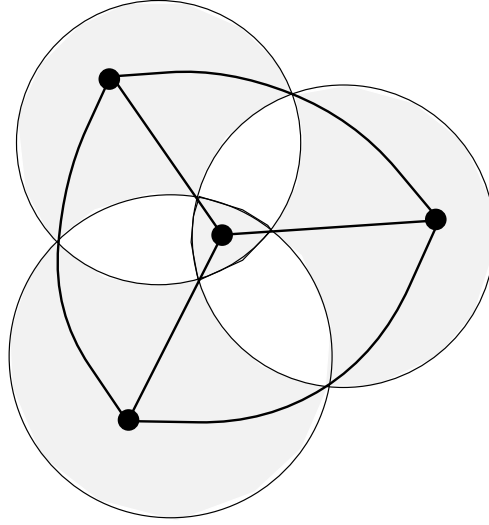


FIGURE 2. Le graphe médial

2) Pour le cas à bord :

On s'intéresse maintenant aux réseaux à bord les plus simples :

**DÉFINITION 7.6.** *Un réseau électrique planaire circulaire (REPC) est un réseau  $(G, \rho)$  tel que  $G$  est plongeable dans le disque unité  $D$  du plan de façon que  $V_0$  s'envoie sur le bord de  $D$ .*

*Le réseau  $G$  sous-jacent sera dit réseau planaire circulaire (RPC)*

On fait alors la construction précédente pour le graphe  $G'$  obtenu en ajoutant un sommet à l'infini qui est joint aux sommets de  $V_0$  qui sont sur  $\partial D$ .

On installe sur  $\partial D$   $2n$  sommets du graphe médial  $M(G)$  : les intersections de  $M(G')$  avec  $\partial D$ .

Le graphe médial  $M(G)$  est donc un graphe à bord. Les arcs de  $M(G)$  sont des courbes maximales connexes obtenues comme union d'arêtes qui sont face à face en chaque sommet de  $M(G)$ . Il y a des arcs intervalles joignant 2 sommets de  $\partial D$ , on les appellent des *cordes*, et des arcs fermés, on les appellent *boucles*.

Notons que cette construction peut être renversée. Il faut simplement partir d'un graphe  $M$  dont tous les sommets intérieurs sont de degré 4, les  $2N$  sommets du bord de degré 1.

3.2.2. *Représentation des potentiels d'équilibre.* Le graphe médial  $M(G)$  définit une cellulation de  $S^2 \setminus \cup_{\alpha} D_{\alpha}$ .

On veut représenter les potentiels d'équilibre sur cette cellulation de la façon suivante : si  $x \in \mathbb{R}^V$  est le potentiel d'équilibre, on attribue

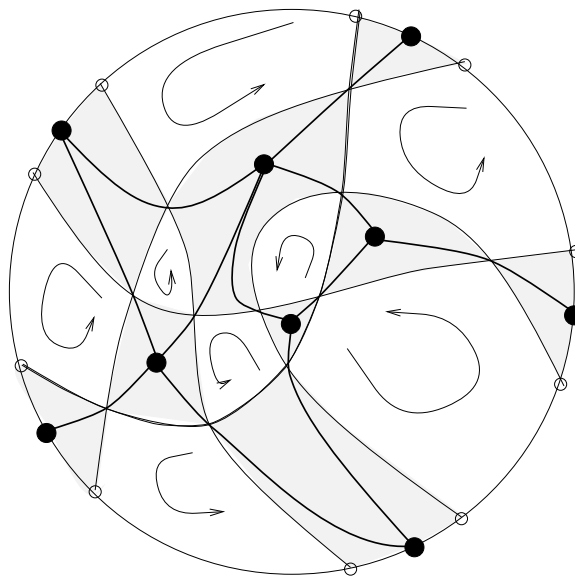


FIGURE 3. Le graphe médial d'un RPC

à la cellule noire attachée au sommet  $i$  la valeur  $x_i$  du potentiel en ce sommet.

Les cellules blanches permettent de représenter les courants : si  $G$  est un réseau planaire sans bord supposé plongé dans  $S^2$  orientée, une face de  $G$  est une composante connexe de  $S^2 \setminus G$ . A toute face  $F$ , on associe le courant électrique  $j_F$  qui vaut 1 sur le bord orienté de  $F$  et 0 ailleurs. Les courants  $j_F$  engendrent l'espace vectoriel des courants électriques qui satisfont les lois de Kirchoff en tout sommet, la seule relation est  $\sum_F j_F = 0$ .

Si  $G$  est un RPC, on fabrique un réseau sans bord  $G'$  en ajoutant un sommet  $\omega$  à l'infini que l'on joint aux terminaux. Un courant qui satisfait Kirchoff aux sommets intérieurs de  $G$  se prolonge de façon triviale en un courant sur  $G'$  qui satisfait ces lois ; on peut donc lui appliquer ce qui précède. Les courants associés aux faces qui contiennent  $\omega$  représentent le courant sortant des terminaux de  $G$ .

Il y a une bijection entre les cellules blanches de  $M(G)$  et les faces de  $G'$ . Pour tout courant  $I$  sur  $G$  qui satisfait Kirchoff aux sommets intérieurs décomposé suivant les courants des faces de  $G'$ ,  $I = \sum I_F j_F$  (de façon unique à addition près d'une constante globale), on attache ainsi à toute cellule blanche de  $M(G)$  le nombre  $I_F$ .

Le couple potentiel-courant est donc représenté par un nombre attaché à chaque cellule de  $M(G)$ .

Pour avoir une configuration d'équilibre, il reste à satisfaire la loi d'Ohm qui se lit à chaque croisement de cordes de  $M(G)$  : elle est de la forme  $I_\alpha - I_\beta = \rho(x_i - x_j)$  : relation reliant les valeurs attribuées aux 4 cellules adjacentes au croisement associé à l'arête  $\{i, j\}$  et de conductance  $\rho$ .

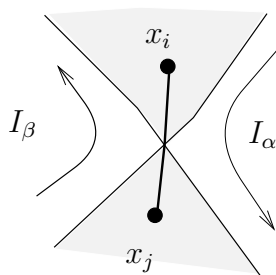


FIGURE 4. Loi d'Ohm

Ces couples  $(x, I)$  induisent des couples  $(y, J)$  sur les cellules en nombre  $2n$ , alternativement blanches et noires, qui touchent  $\partial\Omega$ .

Il est clair que la donnée de l'ensemble de ces couples  $(y, J)$  équivaut à la donnée du graphe de l'application  $L_{G,\rho}$  et donc de la réponse  $L_{G,\rho}$  du réseau  $(G, \rho)$ .

Les couples  $(x, I)$  et  $(y, J)$  associés à des potentiels d'équilibre seront appelées *paires admissibles*. On note PE (*paire d'équilibre*) les  $(x, I)$  et BPE (*paire d'équilibre au bord*) les  $(y, J)$ .

#### 4. LA COMBINATOIRE DES RPC

**4.1. Réseaux électriques planaires circulaires.** Pour les RPC, on a une description complète des réponses possibles et une caractérisation des réseaux équivalents.

On a besoin d'introduire une relation d'équivalence purement combinatoire entre les réseaux :

**DÉFINITION 7.7.** *Deux RPC  $G_1$  et  $G_2$  sont dits combinatoirement équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de transformations élémentaires point, boucle, bras mort, série, parallèle, étoile-triangle, triangle-étoile, opérant uniquement sur la combinatoire.*

*Deux REPC  $(G_1, \rho_1)$  et  $(G_2, \rho_2)$  sont dits géométriquement équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie des mêmes transformations élémentaires point, boucle, bras mort, série, parallèle, étoile-triangle, triangle-étoile.*

Ces transformations seront notées  $\emptyset$ , (B), (BM), (S), (P), (Y- $\Delta$ ) et ( $\Delta$ -Y). Elles ont une version combinatoire et une version électrique.

( $\emptyset$ ) (*point*) consiste à effacer un sommet isolé.

(**B**) (*boucle*) consiste à effacer une boucle de sommet  $a$ .

(**BM**) (*bras mort*) consiste à effacer un sommet  $a$  de degré 1 ( $a \notin V_0$ ) et l'arête qui en est issue.

(**S**) (*série*) consiste à effacer un sommet  $a$  ( $a \notin V_0$ ) de degré 2 et les 2 arêtes qui lui sont adjacentes, et à joindre les 2 voisins  $b$  et  $c$  de  $a$  par une arête unique, avec la formule :

$$\rho_{b,c} = (\rho_{a,c}^{-1} + \rho_{c,b}^{-1})^{-1} .$$

(**P**) (*parallèle*) consiste à remplacer une arête double joignant 2 sommets  $a$  et  $b$  par une seule arête, avec la formule

$$\rho_{a,b} = \rho'_{a,b} + \rho''_{a,b} .$$

(**Y- $\Delta$** ) (*étoile-triangle*) consiste à remplacer une étoile à 3 branches de centre 0 et d'arêtes  $\{0, i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  par un triangle de sommets  $(1, 2, 3)$  à condition toutefois que le centre de l'étoile ne soit pas un élément de  $V_0$ , avec la formule :

$$\rho'_{i,j} = \frac{\rho_{0,i}\rho_{0,j}}{\rho_{0,1} + \rho_{0,2} + \rho_{0,3}} .$$

( **$\Delta$ -Y**) (*triangle-étoile*) consiste à remplacer un triangle par une étoile à 3 branches, avec la formule inverse de la précédente.

*Remarque* : ces transformations sont définies pour un réseau quelconque. Nous les utiliserons uniquement pour des réseaux planaires. Comme la dernière transformation ne préserve pas la planarité, nous l'utiliserons uniquement pour des réseaux planaires plongés en ajoutant l'hypothèse que l'intérieur du triangle limité par le  $\Delta$  ne rencontre pas  $G$ .

On commence par décrire les classes d'équivalences combinatoires de réseaux planaires circulaires (RPC). On introduit à cette fin un graphe orienté  $\mathcal{G}$  dont les sommets sont les RPC (à isotopie près fixant les terminaux) et ayant une arête orientée  $G \rightarrow G'$  si on peut passer de  $G$  à  $G'$  par une transformation électrique élémentaire. On note  $[G]$  la composante connexe de  $G$  dans  $\mathcal{G}$ . Deux RPC  $G$  et  $G'$  seront combinatoirement équivalents,  $G \sim G'$ , s'ils sont dans la même composante connexe de  $\mathcal{G}$ . Bien sûr, dans ce cas ils ont même nombre de terminaux.

Soit maintenant  $e(G) = |E|$  le nombre d'arêtes de  $G$  et  $\varepsilon(G) = \inf_{G' \sim G} e(G')$ . Un RPC  $G$  sera dit *minimal* si  $e(G) = \varepsilon(G)$ .

On a alors le

**THÉORÈME 7.6.** *Tout RPC  $G$  peut être joint par un chemin orienté (i.e. la fonction  $e$  y est décroissante) de  $\mathcal{G}$  à un réseau minimal. Deux*

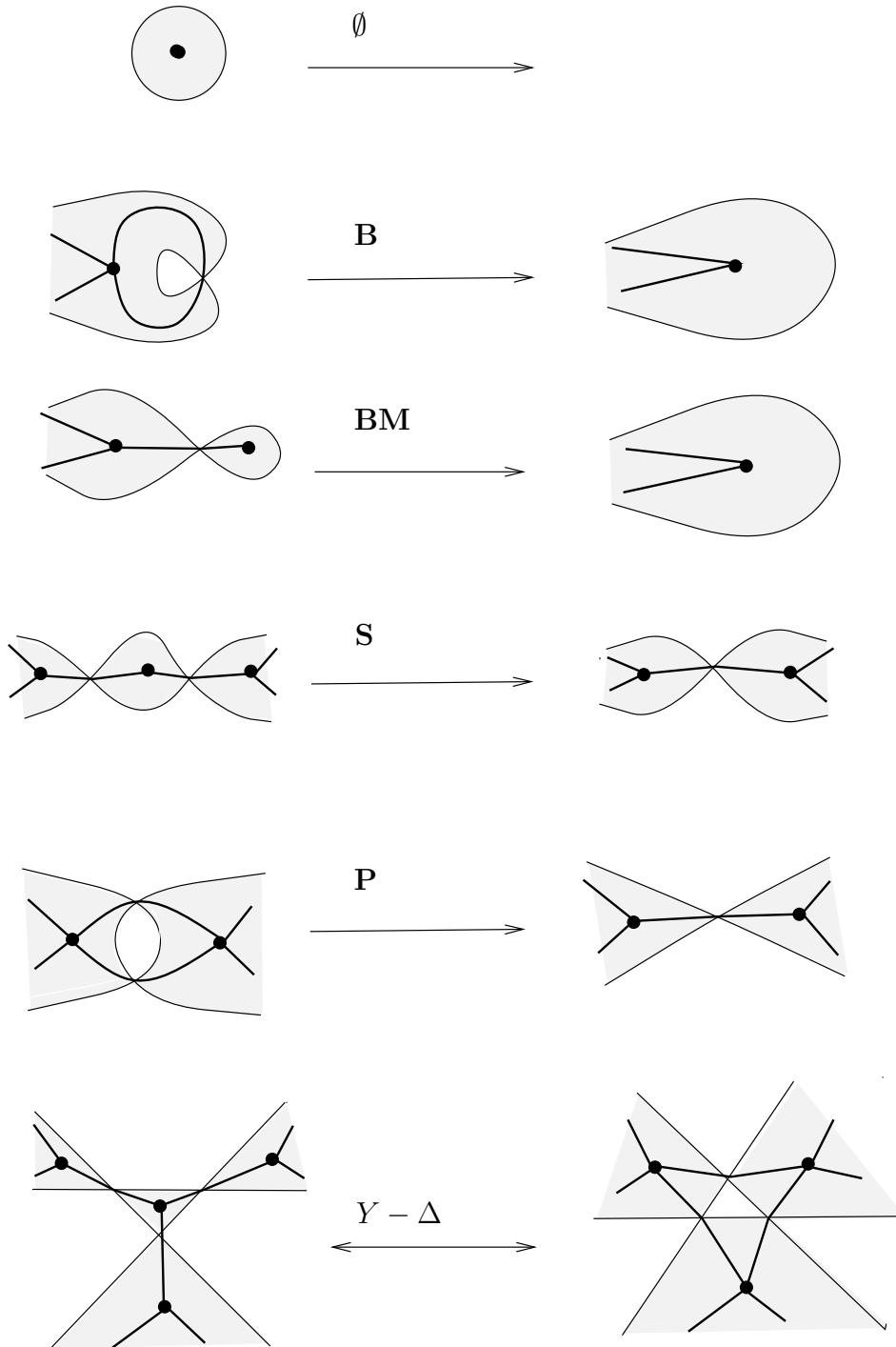


FIGURE 5. Les transformations électriques élémentaires

RPC minimaux  $G_i, i = 1, 2$  de  $[G]$  sont joints par un chemin de  $\mathcal{G}$  le long duquel  $e$  est constant égal à  $\varepsilon(G_1)$ .

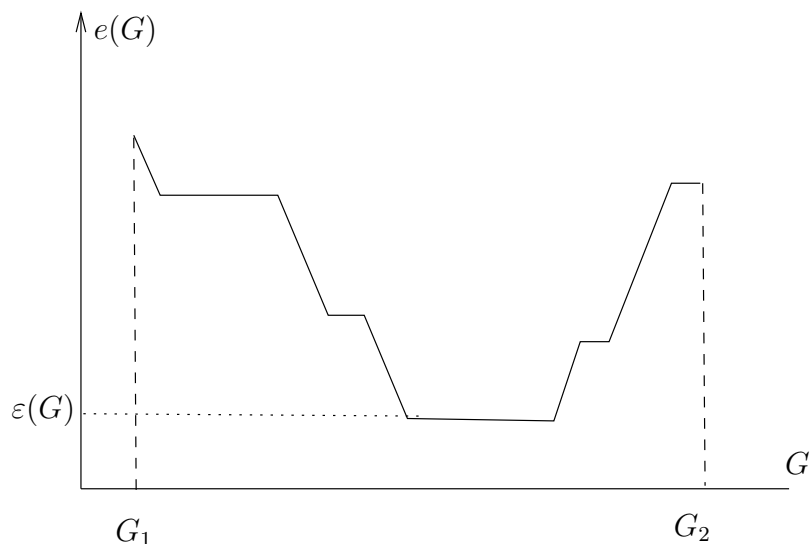


FIGURE 6. Chemin de  $G_1$  à  $G_2$

Une conséquence de ce théorème est que l'équivalence combinatoire de 2 RPC est décidable algorithmiquement contrairement à ce qui se passe pour des problèmes voisins comme l'équivalence de noeuds donnés par les diagrammes plans associés.

On a une caractérisation simple des RPC minimaux en terme de leur graphe médial : celui-ci est *tendu* (voir 7.10 pour la définition).

Un cas particulièrement simple concerne les RPC bien connectés introduits dans [Col94].

**DÉFINITION 7.8.** *Un RPC  $G$  est dit bien connecté si toute paire  $(A, B)$  disjointe non entrelacée (pour l'ordre cyclique) de  $V_0$  admet une  $G$ -connection.*

**THÉORÈME 7.7.** *Pour chaque valeur de  $n = |V_0|$ , les RPC bien connectés forment une composante connexe de  $\mathcal{G}$ . La notion de minimalité précédente coïncide pour eux avec la notion de  $n$ -criticité : un RPC est dit  $n$ -critique si  $\#V_0 = n$ , s'il est bien connecté et qu'aucun mineur strict de  $G$  n'est bien connecté. Ces RPC bien connectés vérifient  $\varepsilon(G) = n(n-1)/2$ .*

*Pour tout RPC  $G$  non bien connecté,  $\varepsilon(G) < n(n-1)/2$ .*

Discutons maintenant le problème inverse :

**THÉORÈME 7.8.** *Si  $G$  est un RPC minimal,  $\Phi_G$  est un plongement de  $\mathcal{R}_G$  dans  $\Sigma_n$  d'image une sous-variété  $Z_{[G]}$  de  $\Sigma_n$  qui ne dépend que de la classe d'équivalence de  $G$ . Si  $G$  est un RPC quelconque,  $\Phi_G$  est une fibration différentiable de  $\mathcal{R}_G$  sur  $Z_{[G]}$ , de fibre difféomorphe à  $\mathbb{R}^{\varepsilon(G)-\varepsilon(G)}$ .*

Plus généralement, on a le

**THÉORÈME 7.9.** *Si  $(G, \rho)$  et  $(G', \rho')$  sont 2 REPC ayant la même réponse, ils sont géométriquement équivalents :  $G \sim G'$  et  $\rho'$  se déduit de  $\rho$  en suivant les transformations électriques élémentaires le long d'un chemin quelconque de  $G$  à  $G'$  dans  $\mathcal{G}$  (voir la section 5.1 pour la définition précise).*

Enfin, on a une réponse complète au problème direct de trouver l'ensemble des réponses possibles pour un RPC ; on définit, pour chaque  $n$ , un ouvert  $\Omega_n$  de  $\Sigma_n$  :

**DÉFINITION 7.9.** *On considère l'ordre cyclique sur  $\{1, \dots, n\}$  (qui sera l'ordre des terminaux du RPC). Deux parties  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  seront dites non entrelacées si elles sont disjointes et qu'on peut choisir une origine sur le cercle telle que  $a_1 < \dots < a_k < b_1 < \dots < b_k$ .  $\Omega_n$  est alors l'ensemble des  $L \in \Sigma_n$  telle que  $\det L_{A,B} > 0$ , où le déterminant est calculé en identifiant  $a_i$  et  $b_{k-i}$ .*

**THÉORÈME 7.10.** *Si  $G$  est bien connecté,  $Z_{[G]} = \Omega_n$ . L'ensemble des réponses possibles des RPC à  $n$  terminaux est l'adhérence  $\bar{\Omega}_n$  de  $\Omega_n$  dans  $\Sigma_n$ . Les  $Z_{[G]}$  forment une partition de  $\bar{\Omega}_n$ .*

*Preuve.* –

Montrons que si  $G$  est un REPC bien connecté,  $L$  est dans  $\Omega_n$ . Cela résulte de la proposition 7.3. En effet, il est clair que dans le cas d'un REPC, l'hypothèse a) de la proposition 7.3 est satisfaite : toute  $G$ -connection de  $A$  à  $B$  identifie  $a_i$  et  $b_{k-i}$ .

□

*Remarque :* dans [CIM96], une caractérisation purement algébrique de  $\bar{\Omega}_n$  est donnée.  $L \in \bar{\Omega}_n$  si et seulement si tous les déterminants  $\det(L_{A,B})$  sont  $\geq 0$ .

**4.2. Equivalence combinatoire et graphe médial.** Lorsque le réseau est planaire, les transformations électriques se lisent simplement sur le graphe médial (voir figure 5), en particulier la transformation (Y- $\Delta$ ) est proche du 3ème mouvement de Reidemeister pour les projections de noeuds.



**DÉFINITION 7.10.** *Le graphe médial  $M$  est dit tendu s'il ne possède pas de composantes intérieures (cycles), si 2 cordes quelconques ont au plus 1 intersection et si aucune corde n'a d'autointersection.*

Un ingrédient essentiel est la

**PROPOSITION 7.4.** ([Grü67]) *A l'aide de transformations électriques (orientées), tout RPC peut être transformé en un RPC dont le graphe médial est tendu.*

*Preuve.*—

On travaille directement sur le graphe médial  $M$ . On note, pour un graphe médial  $M$ , par  $\nu(M)(= e(G))$  le nombre de croisements intérieurs. On va montrer que les transformations électriques (opérant sur le graphe médial comme expliqué plus haut) permettent de diminuer  $\nu(M)$  tant que  $M$  n'est pas tendu.

□

Donnons quelques

**DÉFINITION 7.11.** *Une lentille est une région de  $D$  limitée par 2 arcs de 2 courbes du graphe médial compris entre 2 intersections consécutives de celles-ci. Une boucle est une région de  $D$  limitée par un arc d'une courbe dont les extrémités sont un point double de la courbe.*

*Une lentille est dite minimale si son intérieur ne contient aucune autre lentille ou boucle de  $M$ .*

*Une lentille (resp. une boucle) est dite vide si son intérieur ne rencontre pas  $M$ .*

On voit qu'une boucle non vide contient une lentille ou une boucle vide : seules les lentilles sont donc à considérer dans la suite, car on peut éliminer les boucles vides.

On a alors besoin du

**LEMME 7.1.** *Si on se donne une boucle ou une lentille minimale de  $M$ , par des transformations  $(Y - \Delta)$  ou  $(\Delta - Y)$ , on peut transformer  $M$  de façon que celle-ci devienne vide sans changer  $\nu(M)$ .*

*Preuve.*—

L'idée de la preuve est qu'une lentille minimale qui contient un sommet intérieur contient un triangle dont un côté est sur la frontière de celle-ci (et même sur chacun des 2 arcs de la frontière). S'il n'y a pas de sommets intérieurs, la preuve est encore plus simple.

□

On a en fait le

LEMME 7.2. *Si  $\gamma$  est un des 2 arcs du bord d'une lentille qui contient un croisement, il y a un triangle d'intérieur vide dont les côtés sont des arcs du graphe médial et dont l'un des côtés est contenu dans  $\gamma$ .*

*Preuve.*—

On considère les croisements  $p_i$  intérieur à la lentille  $L$  qui sont adjacents à un croisement situé sur  $\gamma$ . Il suffit de prendre un  $p_i$  tel que le nombre de faces limité par les 2 cordes qui se croisent en  $p_i$  et  $\gamma$  soit minimal.

□

Si maintenant, on a une lentille ou une boucle vide, on peut la supprimer par une transformation électrique qui diminue  $\nu(M)$  de 1. Cela prouve la proposition.

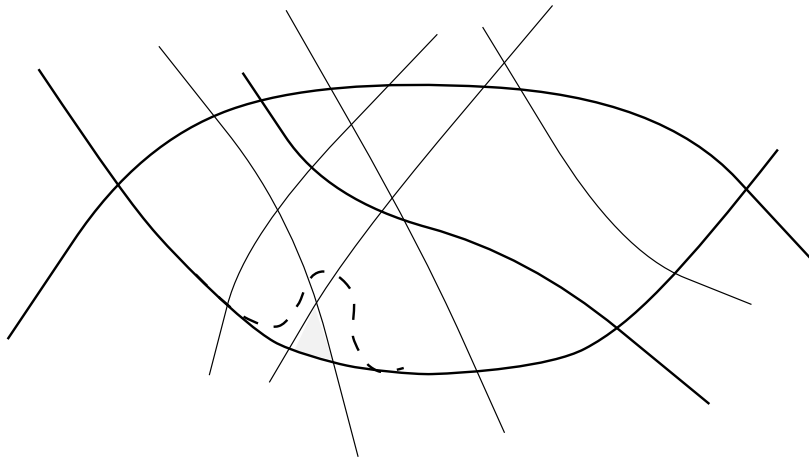


FIGURE 7. Elimination d'une lentille

Il reste à montrer la

PROPOSITION 7.5. *2 graphes tendus sont équivalents si et seulement si leurs cordes ont mêmes paires d'extrémités ; dans ce cas, ils le sont par des transformations  $Y - \Delta$  et  $\Delta - Y$ .*

*Preuve.*—

Montrons la 1ère implication : si les cordes ont mêmes paires d'extrémités, on peut faire une homotopie de graphes tendus. On raisonne par récurrence sur le nombre de cordes. Pour une corde c'est Schönflies (une courbe fermée

simple borde un disque standard). Ensuite on prend une corde quelconque qui limite avec le bord du disque une lentille minimale et on la vide comme plus haut. On peut alors ôter un croissant et appliquer l'hypothèse de récurrence.

L'autre sens résultera de la section 5.2 où l'on montrera comment lire ces paires sur la réponse : si  $G \sim G'$ , on peut choisir  $\rho, \rho'$  telles qu'ils aient la même réponse et donc le même graphe médial, s'ils sont minimaux.

□

De ces 2 propositions résulte le théorème 7.6 que l'on peut reformuler ainsi :

**THÉORÈME 7.11.** *Tout RPC  $G$  peut être joint par un chemin orienté (ie la fonction  $e$  y est décroissante) de  $\mathcal{G}$  à un RPC minimal. Deux RPC minimaux  $G_i$ ,  $i = 1, 2$  de  $[G]$  sont joints par un chemin de  $\mathcal{G}$  le long duquel  $e$  est constant égal à  $\varepsilon(G_1)$ . De plus les RPC minimaux sont exactement ceux dont le graphe médial est tendu. Les classes d'équivalence sont donc caractérisées par la liste des paires d'extrémités de cordes du médial d'un réseau minimal quelconque de la classe.*

En particulier, l'équivalence combinatoire des RPC  $G$  et  $G'$ , tous deux minimaux, équivaut à l'égalité des paires de terminaux de  $M(G)$  et  $M(G')$  liées par une corde.

**4.3. Le cas bien connecté : minimalité et criticité.** On va caractériser les graphes médiaux minimaux bien connectés : en effet le fait d'être bien connecté est invariant par équivalence.

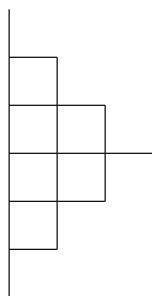


FIGURE 8. Le graphe  $C_7$

Le graphe  $C_n$  dessiné ci-dessus joue un certain rôle dans la suite.

On repère les sommets  $v_{i,j}$  de  $C_n$  par les coordonnées entières  $(i, j)$  qui satisfont :

$$i \geq 1, \quad i \leq j \leq n + 1 - i,$$

et les arêtes sont les segments horizontaux et verticaux joignant 2 des points précédents. Il n'est pas difficile de vérifier que le nombre d'arêtes de  $C_n$  est  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

On voit aussi que le graphe médial de  $C_n$  est tendu et que toutes les cordes sont des diamètres : on dira qu'il est *diamétral*.

En fait, on a le

**LEMME 7.3.** *Tout RPC dont le graphe médial est diamétral tendu est équivalent à  $C_n$  par une suite de transformations étoile-triangle.*

*Preuve.*—

Résulte du théorème 7.11, en effet alors les paires d'extrémités des cordes du médial sont les mêmes.

□

On a maintenant la :

**PROPOSITION 7.6.** *Si  $G$  est un RPC, il y a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :*

- i)  $G$  est bien connecté.*
- ii) le graphe médial d'un RPC minimal de  $[G]$  est diamétral.*

**COROLLAIRE 7.1.** *Le réseau électrique planaire  $G$  bien connecté est  $n$ -critique si et seulement si son graphe médial est diamétral minimal. En particulier, tout graphe  $n$ -critique peut être joint à  $C_n$  par une suite de transformations étoile-triangle et a  $\frac{n(n-1)}{2}$  arêtes.*

## 5. LE PROBLÈME INVERSE POUR LES REPC

**5.1. Equivalence géométrique de réseaux.** A toute transformation électrique élémentaire  $G \rightarrow G'$  (arête de  $\mathcal{G}$ ) est associée une application  $\Psi_{G,G'} : \mathcal{R}_G \rightarrow \mathcal{R}_{G'}$  qui à  $\rho$  associe  $\rho'$  (REPC équivalents au sens électrique) ; par exemple, pour la transformation (S) portant sur une arête  $(\alpha, \beta)$  suivie d'une arête  $(\beta, \gamma)$  de  $G$ ,

$$\Psi_{G,G'}(\rho_{\alpha,\beta}, \rho_{\beta,\gamma}, \rho_1) = \left( \frac{\rho_{\alpha,\beta}\rho_{\beta,\gamma}}{\rho_{\alpha,\beta} + \rho_{\beta,\gamma}}, \rho_1 \right).$$

On voit que  $\Psi_{G,G'}$  est une fibration de fibre difféomorphe à  $\mathbb{R}$  pour les 5 premières transformations et un difféomorphisme pour les 2 autres ( $Y - \Delta$  et  $\Delta - Y$ ).

De plus, on a bien sûr :

$$\Phi_{G'} \circ \Psi_{G,G'} = \Phi_G$$

qui exprime que la réponse est conservée par cette transformation.

Plus généralement, si  $\gamma$  est un chemin orienté de  $\mathcal{G}$  joignant un réseau  $G$  à un réseau  $G'$ , on obtient une application  $\Psi_{G,G'}^\gamma : \mathcal{R}_G \rightarrow \mathcal{R}_{G'}$  en composant les flèches précédentes. Ces applications sont des fibrations différentiables de fibres difféomorphes à  $\mathbb{R}^{e(G)-e(G')}$ .

On a bien entendu préservation de la réponse par l'application  $\Psi_{G,G'}^\gamma$ .

Il se peut que cette application dépende du chemin (à extrémités fixées), mais ce n'est pas le cas si  $G'$  est minimal : cela résultera de l'injectivité de  $\Phi_{G_o}$  lorsque  $G_o$  est minimal (5.3), puisque les images de  $\rho$  par les  $\Psi_{G,G_o}^\gamma$  ont la même réponse.

**DÉFINITION 7.12.** *On appelle équivalence géométrique la relation d'équivalence entre REPC notée*

$$(G, \rho) \sim (G', \rho')$$

*engendrée par les transformations électriques élémentaires :  $G'$  s'obtient de  $G$  par une transformation élémentaire et  $\rho' = \Psi_{G,G'}(\rho)$ .*

Il résultera de ce qui suit que si  $(G, \rho) \sim (G', \rho')$ , on peut prendre comme chemin un chemin réunion de 2 chemins monotones joignant respectivement  $G$  et  $G'$  à un réseau minimal  $G_0$ .

En particulier  $(G, \rho) \sim (G, \rho')$  si les images par  $\Psi_{G,G_0}$  de  $\rho$  et  $\rho'$  sont égales, avec  $G_0$  minimal.

2 REPC géométriquement équivalents ont la même réponse. Le fait que la réciproque soit vraie est l'objet du théorème 7.9 qui est un des principaux résultats de ce chapitre.

**5.2. Paires d'équilibre à support compact.** Le support d'une PE  $(x, I)$  est l'ensemble des cellules (fermées) qui ne sont pas marquées de la valeur 0. On peut de la même façon parler du support d'une BPE  $(y, J)$  qui s'identifie à une réunion d'intervalles fermés de  $\partial D$ .

*Remarque :* les supports possibles pour des BPE  $(y, J)$  forment un ensemble d'informations que l'on peut déduire de la réponse  $L_{G,\rho}$ .

On va prouver sur ces supports les 2 lemmes suivants :

**LEMME 7.4.** *Supposons  $M(G)$  tendu et  $a, b$  2 extrémités d'une corde  $\gamma$  de  $M(G)$ . Soit  $\gamma_+$  l'un des arcs de  $\partial D$  limités par  $a$  et  $b$ ,  $D_+$  le domaine limité par  $\gamma$  et  $\gamma_+$  et  $D_-$  le complémentaire de  $D_+$  dans  $D$ . Alors, il existe une BPE  $(y, J)$  de support  $\gamma_+$  restriction au bord d'une PE  $(x, I)$  à support  $D_+$ .*

**LEMME 7.5.** *Soit  $a, b$  sommets terminaux de  $M(G)$  limitant  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sur  $\partial D$ . S'il existe 2 BPE  $(y_+, J_+)$  et  $(y_-, J_-)$  à supports respectifs  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ , alors  $a$  et  $b$  sont les 2 extrémités d'une même corde de  $M(G)$ .*

Les 2 lemmes précédents impliquent le

**COROLLAIRE 7.2.** *La réponse d'un REPC  $(G, \rho)$  détermine la classe  $[G]$ .*

En effet, on peut évidemment supposer  $G$  minimal et les lemmes impliquent que la réponse détermine les extrémités des cordes de  $M(G)$ .  
*Preuve du lemme 7.4-*

La preuve est par récurrence sur le nombre de cordes de  $M(G)$  entièrement contenues dans  $D_+$ . On montre l'assertion suivante plus générale que le lemme 1 :

( $\star$ ) *tout couple  $(x_-, I_-)$ , défini dans  $D_- = D \setminus D_+$  et admissible dans  $D_-$  se prolonge en une PE. Si le couple de départ est nul, il y a un prolongement de support  $D_+$ .*

1) Le cas où il n'y a aucune corde de  $M(G)$  contenue dans l'intérieur de  $D_+$  :

on règle d'abord le cas où  $M(G)$  n'a aucun croisement intérieur à  $D_+$ , qui est trivial.

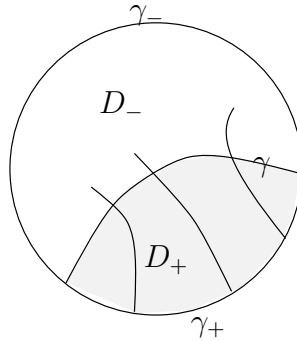
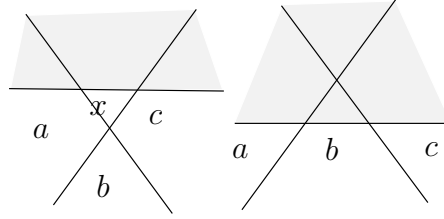


FIGURE 9. Solutions à support compact

Ensuite, on se ramène à ce cas par transformations  $(Y - \Delta)$  successives (vider les croisements dans la lentille  $D_+$ ), en contrôlant les solutions pour une transformation  $(Y - \Delta)$  : on passe à un nouveau PE simplement par modification concernant les petits triangles. Il faut vérifier que les supports ont un bon comportement par rapport à la transformation  $Y - \Delta$ , comme on peut le voir sur la figure 10 :

2) La récurrence :

on fabrique un nouveau graphe  $M(G')$  en supprimant une lentille contenue dans  $D_+$  limitée par  $\partial D$  et une

FIGURE 10. Supports et  $Y_\Delta$ 

corde de  $M(G)$  contenue dans  $D_+$ ; on suppose en plus que la lentille ainsi ôtée est minimale, ce qui permet de lui appliquer la 1ère étape.

On applique d'abord l'hypothèse de récurrence à  $G'$ ; puis on prolonge à la lentille ôtée. On peut choisir un prolongement qui ne soit nul sur aucune cellule de la lentille car on peut toujours ajouter un multiple grand d'une PE dont le support est ladite lentille.

□

*Preuve du lemme 7.5-*

On peut démontrer le lemme 2 avec n'importe quel graphe minimal de  $[G]$  : on choisit une représentation *géodésique*, c'est-à-dire qu'on demande aux cordes du graphe médial d'être des segments de droites euclidiennes.

Pour voir que cela est possible commencer par joindre par des segments euclidiens les paires d'extrémités de cordes du médial. Puis bouger un peu les extrémités de façon à se placer dans une situation générique où les segments ne se coupent que 2 par 2.

Maintenant, on peut parler de convexité. Soit  $(x, I)$  une PE. On définit un sous-ensemble ouvert  $N(x, I)$  de  $D$  de la façon suivante :  $N(x, I)$  est le complémentaire du support fermé (réunion des cellules fermées où  $x$  ou  $I$  est non nul).

Il est alors clair que les composantes connexes de  $N(x, I)$  sont convexes : en effet il est impossible que  $N(x, I)$  contienne l'intérieur de 3 des 4 cellules attachées par un seul sommet à cause de la loi d'Ohm. Les composantes sont donc des polygones connexes et localement convexes, donc convexes.

Supposons maintenant que la corde  $\delta$  de  $M(G)$  issue de  $a$  ait son autre extrémité  $c$  sur l'intérieur de  $\gamma_+$ . Alors la composante connexe de  $N(x_-, I_-)$  contenant  $\gamma_+$  contient les 2 intervalles contigus à  $a$ .

En effet, elle contient le disque limité par  $\gamma_+$  et  $\delta$  (enveloppe convexe de  $\gamma_+$ ) et, par application successive de la loi d'Ohm en partant de  $c$  aux sommets de  $M(G)$  situés sur  $\delta$ , un voisinage de  $\delta$  et donc de  $a$  contrairement à l'hypothèse.

Le cas où cette corde issue de  $a$  a son autre extrémité dans  $\gamma_-$  est aussi absurde et cela conclut la preuve du lemme 2.

□

### 5.3. Injectivité de $\Phi_G$ pour $G$ minimal. On aura besoin du

LEMME 7.6. *Si  $G_0$  est minimal connexe,  $G_0$  est équivalent à un réseau minimal  $G$  dont le graphe médial a une cellule triangulaire (3 côtés) dont un côté est un arc de  $\partial D$ .*

Suivant que cette cellule est noire ou blanche,  $G$  s'obtient donc d'un réseau minimal  $G'$  ayant une arête de moins par adjonction d'une arête après un des sommets terminaux de  $G'$  ( $G = \Sigma(G')$ ) ou en connectant par une arête 2 sommets terminaux voisins de  $G'$  ( $G = \Pi(G')$ ).

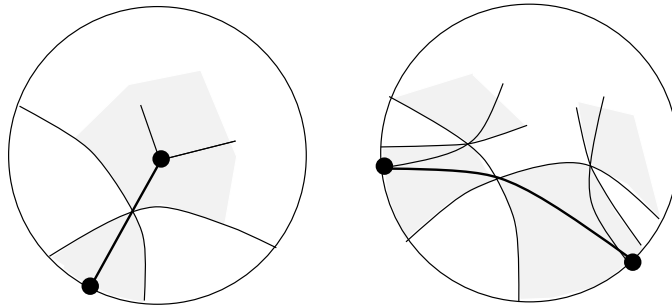


FIGURE 11. Les graphes  $\Sigma(G)$  et  $\Pi(G)$

*Preuve.*—

On considère un arc  $(a, b)$  du graphe médial de  $G_0$  limitant avec le bord de  $D$  une lentille ne contenant aucune autre corde de  $M(G_0)$  complètement. Comme  $G_0$  est connexe, l'arc  $(a, b)$  de cet lentille contient d'autres sommets terminaux de  $M(G_0)$ . Soit  $c$  celui qui suit immédiatement  $a$  : les cordes issues de  $a$  et de  $c$  se



coupent : par isotopie générique (vider la demi-lentille qu'elles déterminent), on peut faire qu'elles déterminent la cellule triangulaire cherchée.

□

La preuve de l'injectivité de  $\Phi_G$ , et donc du théorème 7.8, se fait donc de la façon suivante : à partir de la réponse, on détermine la conductance  $\rho_0$  de l'arête mise en évidence dans le lemme, puis on conclut par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $G$ .

1) Détermination de  $\rho_0$ .

On applique les résultats de la section 5.2 à une corde  $\gamma$  bordant le triangle.

On a ainsi une PE  $(x, I)$  à support dans la lentille limitée par  $\gamma$  et cette propriété de support se lit sur la valeur au bord  $(y, J)$  de ce couple. Les valeurs marquées dans le triangle et la région contigüe de la lentille détermine la résistance  $\rho_0$  de l'arête isolée.

2) Récurrence.

La réponse de  $(G, \rho)$  détermine  $\rho_0 y$  et donc de façon évidente la réponse de  $G'$ . En effet les graphes de ces 2 réponses se déduisent l'un de l'autre par une transformation simple ne faisant intervenir que  $\rho_0$ . Il suffit de constater que  $G'$  est minimal, ce qui résulte de la construction de son graphe médial à partir de celui de  $G$  : il suffit de faire franchir le bord de  $D$  par le croisement utilisé de  $M(G)$ .



## Bibliographie

- [Ahu87] Ahumada, G. Fonctions périodiques et formule de traces de Selberg sur les arbres. *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 305:709–712, 1987.
- [Alo86] Alon, N. Eigenvalues and expanders. *Combinatorics*, 6:83–96, 1986.
- [AM85] Alon, N. et Milman, V.  $\lambda_1$ , isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators. *J. Comb. Theory B*, 38:73–88, 1985.
- [AM94] Aizenman, M. et Molchanov, S. Localization at large disorder and at extreme energies : an elementary derivation. *Commun. Math. Phys.*, 157:245–278, 1994.
- [Arn67] Arnold, V. On a characteristic class intervening in quantization conditions. *Functional analysis and its applications*, 1:1–14, 1967.
- [Arn72] Arnold, V. Modes and quasi-modes. *Functional analysis and its applications*, 6:94–101, 1972.
- [Arn95a] Arnold, V. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Sel. Math. Sov., New Series*, 1:1–19, 1995.
- [Arn95b] Arnold, V. The Sturm intersection theory and symplectic geometry. *Functional analysis and its applications*, 19:251–259, 1995.
- [Bas92] Bass, H. The Ihara-Selberg  $\zeta$ -function of a tree-lattice. *Internat. Jour. of Maths*, 6:717–798, 1992.
- [BC95] Bacher, R. et Colin de Verdière, Y. Multiplicités des valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes. *Bull. Soc. Math. France*, 123:101–117, 1995.
- [BdH94] Bacher, R. et de la Harpe, P. Exact values of Kazhdan constants for some finite groups. *J. Algebra*, 163:495–515, 1994.
- [Ber67] Berge, C. *Théorie des graphes et applications*. Dunod, Paris, 1967.
- [Ber84] Berry, M. Quantal phases accompanying adiabatic changes. *Proc. Royal Soc. London*, A 392:45–57, 1984.
- [Ber88] Berry, M. The quantum phase five year latter. *Geometric phase in physics*, 1988.
- [Bér86] Bérard, P. *Spectral geometry : direct and inverse problems*. Springer Lecture Notes, 1986.
- [Bes87] Besson, G. Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble)*, 5:107–132, 1986-1987.
- [BGM71] Berger, M., Gauduchon, P., et Mazet, E. *Le spectre d'une variété riemannienne compacte*. Springer Lecture Notes in Maths, 1971.
- [Bie89] Bien, F. Constructions of telephone networks by groups representations. *Notices AMS*, 36:5–22, 1989.
- [Big74] Biggs, N. *Algebraic graph theory*. Cambridge U. P., 1974.
- [Bol79] Bollobas, B. *Graph Theory*. Springer, 1979.

- [Bot54] Bott, R. Nondegenerate critical manifolds. *Ann. of Maths*, 60:248–261, 1954.
- [BS97] Benjamini, I. et Schramm, O. Every graph with a positiv Cheeger constant contains a tree with a positiv Cheeger constant. *Geometric and Functional Analysis*, 00:1–16, 1997.
- [BSST40] Brooks, R., Smith, C., Stone, A., et Tutte, W. The dissection of rectangles into squares. *Duke Math. Journ.*, 7:312–340, 1940.
- [Bur91] Burger, M. Constantes explicites pour la propriété (T) pour  $SL_3(\mathbb{Z})$ . *J. de Crelle*, 413:36–67, 1991.
- [BW84] Berry, M. et Wilkinson Spectra of triangles. *Proc. Royal Soc. London, A* 392:15–43, 1984.
- [CC88] Colbois, B. et Colin de Verdière, Y. Sur la multiplicité de la première valeur propre d’une surface de Riemann à courbure constante . *Comm. Math. Helv.*, 63:194–208, 1988.
- [CDS80] Cvetkovic, D., Doob, M., et Sachs, H. *Spectra of graphs : theory and applications*. Academic Press, 1980.
- [CFKS87] Cycon, H.L., Froese, R.G., Kirsch, W., et Simon, B. *Schrödinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [CGV96] Colin de Verdière, Y., Gitler, I., et Vertigan, D. Réseaux électriques planaires II . *Comm. Math. Helv.*, 71:144–167, 1996.
- [CH53] Courant, R. et Hilbert, D. *Methods of mathematical physics*. Interscience, 1953.
- [Che76] Cheng, S. Y. Eigenfunctions and nodal sets. *Comm. Math. Helv.*, 51:43–55, 1976.
- [Cho69] Choquet, G. *Cours d’analyse, tome II (Topologie)*. Masson, Paris, 1969.
- [Chu89] Chung, F. Diameters and eigenvalues. *Journal of the AMS*, 2:187–196, 1989.
- [Chu97] Chung, F. *Lecture notes on spectral graph theory*. AMS, 1997.
- [Cia78] Ciarlet, P. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- [CIM96] Curtis, E., Ingerman, D., et Morrow, J. Circular planar graphs and resistor networks. *Linear algebra and its applications*, 00:1–35, 1996.
- [Cin75] Cinlar, E. *Introduction to stochastic processes*. Prentice Hall, New-York, 1975.
- [CK84] Carter, D. et Keller, G. Elementary expressions for unimodular matrices. *Comm. in Algebra*, 12:379–389, 1984.
- [CM90] Colin de Verdière, Y. et Marin, A. Triangulations presque équilatérales des surfaces. *J. of Diff. Geom.*, 32:199–207, 1990.
- [CMM94] Curtis, E., Mooers, E., et Morrow, J. Finding the conductors in circular networks from boundary measurements. *RAIRO, Modelisation Math. Anal. Numer.*, 28:781–813, 1994.
- [Col86a] Colin de Verdière, Y. Spectre de variétés Riemanniennes et spectre de graphes. *Proc. Intern. Cong. Math. (Berkeley)*, pages 522–530, 1986.
- [Col86b] Colin de Verdière, Y. Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien . *Comm. Math. Helv.*, 61:254–270, 1986.
- [Col87] Colin de Verdière, Y. Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. *Ann. Sc. ENS.*, 20:599–615, 1987.

- [Col88a] Colin de Verdière, Y. Distribution de points sur une sphère . *Séminaire Bourbaki*, 703:1–11, 1988.
- [Col88b] Colin de Verdière, Y. Sur une hypothèse de transversalité d’Arnold . *Comm. Math. Helv.*, 63:184–193, 1988.
- [Col90] Colin de Verdière, Y. Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité. *J. Comb. Theory B*, 50:11–21, 1990.
- [Col91a] Colin de Verdière, Y. Sur les singularités de van Hove génériques . *Mémoire SMF*, 119:99–109, 1991.
- [Col91b] Colin de Verdière, Y. Théorème de Kirchhoff et théorie de Hodge. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble)*, 9, 1991.
- [Col93] Colin de Verdière, Y. Multiplicité des valeurs propres : laplaciens discrets et laplaciens continus. *Rendiconti Math.*, 13:433–460, 1993.
- [Col94] Colin de Verdière, Y. Réseaux électriques planaires. *Comm. Math. Helv.*, 69:351–374, 1994.
- [Col96] Colin de Verdière, Y. Multiplicities of eigenvalues and tree-width of graphs. *Prépublication I.F.*, 366:1–21, 1996.
- [Col97a] Colin de Verdière, Y. *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*. Institut Fourier, 1997.
- [Col97b] Colin de Verdière, Y. Spectre d’opérateurs différentiels sur les graphes. *Proceeding Cortona Conference on random walks and discrete potential theory*, pages 1–27, 1997.
- [COM78] Coulson, C., O’Leary, B., et Mallon, R. *Hückel theory for Organic Chemists*. Academic Press, 1978.
- [CPY97] Colin de Verdière, Y., Pan, Y., et Ycart, B. Limites singulières d’opérateurs de Schrödinger sur les graphes. *Prépublication Institut Fourier*, 384:1–26, 1997.
- [CR87] Coulombeau, C. et Rassat, A. Calculs de propriétés électroniques et des fréquences normales de vibration d’agrégats carbonés formant des polyèdres réguliers et semi-réguliers. *J. Chem. Phys.*, 78:119–125, 1987.
- [CRS97] Cvetovič, D., Rowlinson, P., et Simić, S. *Eigenspaces of graphs*. Cambridge U. P., 1997.
- [CS93] Chung, F. et Sternberg, S. Mathematics and the Buckyball . *American Scientist*, 81:56–71, 1993.
- [CT93] Colin de Verdière, Y. et Torki, N. Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble)*, 11:9–18, 1992-1993.
- [Dal93] Dal Maso, G. *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Birkhäuser, 1993.
- [Dia88a] Diaconis, P. Applications of non-commutative Fourier analysis to probability problems. In *Ec. d’Ete, Saint-Flour, Lect. Notes Math. 1362*, pages 51–100, 1988.
- [Dia88b] Diaconis, P. *Group representations in probability and statistics*. IMS Lecture Notes-Monograph Series, 11. Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics, 1988.
- [Dod84] Dodziuk, J. Difference equations, isoperimetric inequalities, and transience of certain random walks. *Trans. AMS*, 284:787–794, 1984.
- [DS84] Doyle, P. et Snell, J. *Random walks and electric networks*. Carus Math. Monographs, 1984.
- [Dui96] Duistermaat, J. *Fourier Integral Operators*. Birkhauser, Boston, 1996.

- [Fel71] Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, New-York, 1971.
- [For92] Forman, R. Determinants, Finite-Difference Operators and Boundary Value Problems. *Comm. Math. Phys.*, 147:485–506, 1992.
- [For93] Forman, R. Determinants of Laplacians on graphs . *Topology*, 32:35–46, 1993.
- [Fri93a] Friedman, J. . Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions. *Duke Math. Journal*, 69:487–525, 1993.
- [Fri93b] Friedman, J. *Expanding graphs*. AMS, 1993.
- [FS83] Fröhlich, J. et Spencer, T. Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energies. *Comm. Math. Phys.*, 188:151–184, 1983.
- [FW84] Freidlin, M. et Wentzell, A. *Random perturbations of dynamical systems*. Springer (Berlin), 1984.
- [FY94] François, O. et Ycart, B. Introduction au problème de l'estimation de la vitesse de convergence pour les processus de Markov. *Polycopié LMC-IMAG*, 00:1–19, 1994.
- [GG81] Gabber, O. et Galil, Z. Explicit Constructions of Linear-Sized Superconcentrators. *J. of computer and systems sciences*, 22:407–420, 1981.
- [Grü67] Grünbaum, B. *Convex polytopes*. Wiley, London, 1967.
- [Gui94] Guillopé, L. Entropies et spectres. *Osaka J. Math.*, 31:247–289, 1994.
- [Har91] de la Harpe, P. *Spectres de graphes (notes de cours)*. Département de Mathématiques, Genève, 1991.
- [Har93] de la Harpe, P. On Hilbert's metric for simplices. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 181:97–119, 1993.
- [Has90] Hashimoto, K. . On  $\zeta$  and  $L$ -functions of finite graphs. *Intern. J. of Maths*, 1:381–396, 1990.
- [HG97] de la Harpe, P. et Giorchiuk, R. On problems related to growth, entropy and spectrum in group theory. *J. of dynamical and control systems*, 3:51–89, 1997.
- [HLS95] van der Holst, H., Laurent, M., et Schrijver, A. On a minor-monotone graph invariant. *J. Comb. Theory B*, 65:291–304, 1995.
- [Hol96] van der Holst, H. *Topological and spectral graph characterization*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1996.
- [Hol97] van der Holst, H. A characterization of graphs with  $\nu(G) \leq 3$ . *Preprint*, 1997.
- [Hug88] Hughes, T. *The finite element Method*. Prentice Hall, 1988.
- [HV89] de la Harpe, P. et Valette, A. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Astérisque (Soc. Math. France), 1989.
- [Iha66] Ihara, Y. Discrete subgroups of  $PSL_2(k_p)$ . *Proc. Symp. Pure Maths.*, 9:272–278, 1966.
- [Kat76] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, Berlin, 1976.
- [Ken95] Kenyon, R. Tiling with squares and square-tileable surfaces. *Prépublication ENS Lyon*, 00:1–20, 1995.
- [Kur30] Kuratowski, K.= . Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [Lag67] Lagrange, J.-L. *Oeuvres, vol. 1*. Gauthier-Villars, 1867.

- [LL93] Lieb, E. et Loss, M. Fluxes, Laplacians and Kasteleyn's theorem. *Duke Math. J.*, 71:337–363, 1993.
- [LPS86] Lubotzsky, A., Phillips, R., et Sarnak, P. Hecke operators and Distributing points on the sphere I. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 39:149, 1986.
- [LPS87] Lubotzsky, A., Phillips, R. et Sarnak, P. Hecke operators and Distributing points on the sphere II. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 40:401, 1987.
- [LPS88] Lubotzsky, A., Phillips, R. et Sarnak, P. Ramanujan graphs. *Combinatorica*, 8:261–277, 1988.
- [LS96] Lovász, L. et Schrijver, A. A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterieation of linklessly embeddable graphs. *Proc. AMS (à paraitre)*, 00:1–15, 1996.
- [Lub94] Lubotsky, A. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*. Birkhauser, 1994.
- [Mar73] Margulis, G. Explicit construction of concentrators. *Problemy Information Transmission*, 9:325–332, 1973.
- [Moe76] van Moerbeke, P. The spectrum of Jacobi matrices. *Inventiones Math.*, 37:45–81, 1976.
- [Moe95] van der Holst, H. A short proof of the planarity criterion of Colin de Verdière. *J. Comb. Theory B*, 65:269–272, 1995.
- [Nad88] Nadirashvili, N. Multiple eigenvalues of Laplace operators. *Math. USSR Sbornik*, 61:225–238, 1988.
- [NHH97] Nadirashvili, N. , Hoffmann-Ostenhof, M. et Hoffmann-Ostenhof, T. On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces. *Preprint*, 1-7, 1997.
- [NW29] von Neumann, J. et Wigner, E. Uber das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. *Phys. Zeit.*, 30:467–470, 1929.
- [Pös90] Pöschel, J. On the Fröhlich-Spencer estimate in the theory of Anderson localization. *Man. Math.*, 70:27–37, 1990.
- [Rin74] Ringel, G. *Map color theorem*. Springer Grundlehren, 1974.
- [RS75a] Reed, M. et Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I*. Academic Press, New-York, 1975.
- [RS75b] Reed, M. et Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics II*. Academic Press, New-York, 1975.
- [RS83] Robertson, N. et Seymour, P. Graphs minors I. *J. Comb. Theory B*, 35:39–61, 1983.
- [RS84] Robertson, N. et Seymour, P. Graphs minors III : planar tree-width . *J. Comb. Theory B*, 36:49–64, 1984.
- [RS90] Robertson, N. et Seymour, P. Graphs minors IV : Tree-width and well quasi-ordering . *J. Comb. Theory B*, 48:227–254, 1990.
- [RS92] Robertson, N. et Seymour, P. Graphs minors VI : disjoint paths across a disk . *J. Comb. Theory B*, 41:115–138, 1992.
- [Sév94] Sévenec, B. Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique. *Prépublication ENS Lyon*, 1994.
- [Sal96] Saloff-Coste, L. *Lectures on finite Markov chains*. Cours à St-Flour, 1996.
- [Sar91] Sarnak, P. *Some applications of modular forms*. Cambridge tracts in Maths, 1991.
- [Ser97] Serre, J.-P. Répartition asymptotique des valeurs propres des opérateurs de Hecke. *Jour. of the AMS.*, 10:75–102, 1997.

- [Sma72] Smale, S. On the mathematical foundations of electrical circuit theory. *J. Diff. Geom.*, 7:193–210, 1972.
- [SW86] Simon, B. et Wolff, T. Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians. *Commun. Pure Appl. Math.*, 39:75–90, 1986.
- [Tho80] Thomassen, C. 2-linked graphs *European Jour. of Combinatorics*, 1:371–378, 1980.
- [Val97] Valette, A. Les graphes de Ramanujan. *Bourbaki*, 00:1–20, 1997.
- [VN94] Venkov, A. et Nikitin, A. The Selberg trace formula, Ramanujan graphs and some problems of mathematical physics. *Petersburg Math. J.*, 5:1–65, 1994.
- [Woe94] Woess, W. Random walks on infinite graphs and groups - a survey of selected topics. *Bull. London Math. Soc.*, 26:1–60, 1994.
- [Yca95] Ycart, B. *Systèmes Markoviens, modèles*. Cours de DEA (Grenoble), 1995.
- [Zel90] Zelditch, S. On the generic spectrum of a Riemannian cover. *Ann. Inst. Fourier*, 40:407–422, 1990.
- [Zuk96] Zuk, A. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres. *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 323:453–458, 1996.



## Index

- $L_G$ , 13
- $M_G$ , 2, 13
  - $M_{G_n}$ , 87
- $O_G$ , 2, 13, 67
- $\Gamma$ -convergence, 51, 54, 60, 62, 67
- $\mu$ , 79, 82, 101
- $\mu_k^{\mathbb{C}}(G)$ , 10, 79
- $\mu_k^{\mathbb{R}}(G)$ , 10, 79
- $\nu$ , 79, 84, 85, 101
- éléments finis, 4, 98
- étoile-triangle, 56, 114, 119
  
- Agmon
  - distance  $d'$ , 97
  - graphe  $d'$ , 97
- arbre, 1, 26, 85
  - Cheeger, 35
  
- Cheeger, 34
- chimie, 8
- compactification, 51, 64, 67
- contraction d'une arête, 56, 66
- cycle, 1
- cône simplicial, 62
  
- degré, 1
- densité d'état, 28
- diamètre, 38
  
- effet tunnel, 5, 95
- espace lagrangien, 52, 108
- expasseur, 9, 38
- extensions auto-adjointes, 51
  
- forme quadratique, 13, 52
  - $q_A$ , 13
- formule de Green, 88
  
- gap, 3
- graphe, 1
  - de Cayley, 20, 40
  - de Ramanujan, 28
  - graphe à bord, 103
  - médial, 111
  - tendu, 118
  
- indice de Maslov, 78
  
- Kato, 33, 46
- Kazhdan, 40, 44
  
- laplacien, 3
  - canonique, 3
  - combinatoire, 3
  - harmonique, 3
- largeur d'arbre, 84
- lemme de Gabber-Galil, 25, 43
- lentille, 118
  
- matrice d'adjacence, 2, 40
- mesure spectrale, 23
- mineurs, 10, 62, 81
  - mineurs faibles, 10, 63
- minimax, 14, 56
- multiplicité, 9, 71, 93
  
- nombre chromatique, 92
  
- opérateur différentiel, 13
  
- pavage, 110
- pendules couplés, 4
- perturbation des valeurs propres, 71
- planarité, 1, 82, 86
  - réseaux planaires circulaires, 113
- plongement non noué, 84
- point diabololo, 76

- processus de Markov, 8, 37, 57
  - réversible, 8
- quotient de Rayleigh, 37
- Ramanujan, 39
- recuit simulé, 57
- réduction
  - de Schur, 108
  - symplectique, 108
- réponse, 104
- réseau électrique, 10, 103
  - bien connecté, 115
- signature spectrale, 80
- spectre, 14
- théorème de Courant, 16, 94
  - pour les graphes, 18
- théorème de Perron-Frobenius, 16
- transversalité, 9, 74, 79
- triangulation, 100
- trou spectral, 3, 9, 14, 33, 92